

“回顾与思考”专栏蕴含的数学思想方法和教学思考

——以人教A版高中数学教材“数与代数”为例

王思敏, 倪仁兴

绍兴文理学院数学系, 浙江 绍兴

收稿日期: 2023年11月21日; 录用日期: 2023年12月19日; 发布日期: 2023年12月26日

摘要

高中数学教材中的“回顾与思考”专栏的设置不但有助于师生明确各章节的知识内容,并在揭示知识间联系、感受数学思想方法、形成完善的知识方法体系等有很好的价值。但目前“回顾与思考”专栏的使用情况非常不乐观,基本上形同虚设,没有发挥其应有的作用,而目前关于该专栏所蕴含的数学思想方法和教学思考鲜有学者进行探讨。文章以人教A版高中数学教材中数与代数为例,就其中“回顾与思考”所渗透的数学思想方法进行提炼,并给出教学思考,以期教师能够重视教材,回归课本“原点”。

关键词

人教A版高中数学教材, 回顾与思考, 数学思想方法, 教学思考

The Mathematical Thinking Method and Teaching Thinking in “Review and Thinking” Column

—Taking the People’s Education Press Version A High School Mathematics Textbook “Number and Algebra” as an Example

Simin Wang, Renxing Ni

Department of Mathematics, Shaoxing University, Shaoxing Zhejiang

Received: Nov. 21st, 2023; accepted: Dec. 19th, 2023; published: Dec. 26th, 2023

Abstract

The setting of “Review and Thinking” column in senior high school mathematics textbooks is not

only helpful for teachers and students to clarify the knowledge content of each chapter, it is of great value in revealing the relationship between knowledge, feeling mathematical thinking and methods, and forming a perfect knowledge and method system. But at present, the use of the column "Review and Thinking" is not optimistic and has not played its due role, at present, few scholars have discussed the mathematical thinking and teaching thinking in this column. The article takes the "numbers and algebra" from the People's Education Press version A high school mathematics textbook as an example, this paper refines the mathematical thinking method permeated by "Review and Thinking" in the Senior High School Mathematics Textbook of People's Education (A Edition), and gives the teaching thinking so that teachers can attach importance to the textbook, go back to the textbook.

Keywords

People's Education Press Version A High School Mathematics Textbook, Review and Thinking, Mathematical Thinking Methods, Teaching Thinking

Copyright © 2023 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

《普通高中数学课程标准(2017年版)》指出“数学教材为‘教’与‘学’活动提供学习主题、基本线索和具体内容,是实现数学课程目标、发展学生数学核心素养重要的教学资源”[1]。人教A版高中数学教材中的“小结”作为一个重要栏目,是整章课程目标的集中体现,其中的“回顾与思考”部分的内容主要概括了本章所学知识间的相互联系,能帮助学生梳理本章包含的知识点,点出知识所内涵的数学思想方法,并通过一系列在思考上有深度和力度的追问加深学生对本章核心知识和数学思维的领悟[2]。然而许多教师在实际教学中对于该部分的内容均是一笔带过,本文以人教A版高中数学教材为例,着重对数与代数部分的教材中“回顾与思考”栏目中所蕴含的数学思想方法进行提炼,并针对性地给出教学思考,以期教师能够重视教材,回归课本原点。

2. 人教A版高中数学“回顾与思考”专栏的使用现状

调查发现,高中数学教师在教学中对“回顾与思考”专栏的应用凸显出明显的局限性,大部分的数学教师在教学中对“回顾与思考”专栏的使用情况基本上形同虚设,导致“回顾与思考”专栏的应用很难在如今的数学教学实践中发挥其预期的价值和作用,甚至会对新高考背景下开展高中数学教学活动产生负面影响[3]。对上述情况进行分析,能看出高中部分数学教师在教学实践中因为追赶教学进度而对教材的研究不够深入,这是因为他们无法摆脱应试教育思想,这就导致他们不能借助“回顾与思考”栏目的教育功能对教学活动进行有效的创新和改革。一些高中数学教师其自身综合素质相对不足,教研能力较弱,就导致难以结合教材的变化对“回顾与思考”部分进行深入的探究和总结,尤其是如果“回顾与思考”专栏的教学经验不足,就更加不能按照学情对“回顾与思考”专栏进行灵活的应用。

因此,在高中数学教学改革道路中,一线教师和教研人员应结合人教A版教材中“回顾与思考”栏目的教学现状,努力探索如何有效利用“回顾与思考”栏目提出教学策略,开展教学实践,从而最大限度地发挥“回顾与思考”栏目的辅助作用,以提高教学质量,为高中学生创造良好条件,促使学

生能通过数学学习获得自主学习能力, 得到综合发展。

3. 人教 A 版高中数学“回顾与思考”专栏蕴含的数学方法及教学思考

在必修一的集合部分中, “回顾与思考”中以“类比数与数的关系, 我们研究了集合之间的包含关系与相等关系……”指出了类比的思想方法[4]。教师在教学中需点明集合知识学习的方法, 教给学生学习研究数学知识的一般方法——即类比方法。集合是高中阶段的学生接触的一个新的数学概念, 在接受和认知上难免会有困难, 教师应当教会学生运用类比的方法将复杂问题简单化, 尤其是运用类比的方法去学习一个新的概念, 并从对简单问题的解决中得到解决复杂问题的方法。由于是高中阶段的学生, 教师最好能够引导学生形成新的猜想或问题, 以发展学生的数学思维。当学生学会自主使用类比方法进行新概念新知识的学习以后, 学生的自学能力也会得到明显的提高, 在后续函数、不等式等知识的学习中会有事半功倍的效果。

不等式这一章中, 教材中给出了学习研究数学知识的方法, 即发现一定的数学规律和数学关系→借助直观去理解数学内容→通过逻辑推理来证明数学结论。教师在课堂中可以带领学生总结这一过程方法以指导学生未来的自主学习。教师可以按照教材的编排, 首先类比“相等用等式表示”, 从生活情境中发现数学的不等关系, 举一些用不等式来表示不等关系的实例, 这一步即发现数学规律与数学关系; 其次, 两个实数大小关系和实数的基本性质是研究不等式的性质的基础, 那么分析、理解关于两个实数大小关系的本质, 即借助直观理解数学内容; 再次, 类比等式的基本性质去研究不等式的基本性质及其证明, 这一步即通过逻辑推理证明数学结论[5]。通过这样的过程让学生明确并掌握学习数学知识流程方法, 以便为学生的自主学习提供帮助。

函数这一章, 教材通过“在研究这些基本性质时, 一般是先从几何直观(观察图像)入手, 然后运用自然语言描述函数的图像特征, 最后抽象到用数学符号刻画相应的数量特征。”指出了从直观到抽象的研究方法。这不仅是函数学习中常用的方法, 同时也是数学学习乃至大多数研究学习中常用的方法。教师在教学中应对这一句话进行解释, 以使学生在更高的角度去理解数学学习, 为自己的独立学习与研究掌握方法。从函数到指数函数与对数函数, 这是一个数学概念推广的过程。因此, 教材在“回顾与总结”部分总结了数学概念推广的一般方法, 即通过原概念的研究思路去研究新的概念。主要经过“定义质-表示质-性质-运算(法则)质-应用”的思路, 也就是说根据函数的定义, 画出函数的图像, 并通过图象分析函数性质, 最后加以应用, 从而形成完整的知识体系。在教学中教师应该根据这部分内容进行总结, 强调函数、映射、对应的思想方法从头到尾贯彻在这一过程中。以教会学生面对新的函数知识该如何进行研究。

在必修二复数这一章教材主要强调了数系扩充的方法[6]。教材对于学生数系的学习是由有理数扩充到实数再扩充到复数的, 因此实数是复数系的特殊化, 有理数是实数系的特殊化。教师在复数的教学中要点明这一点以加强学生的理解。因此教师在复数教学中要联系实数, 引导学生注意到复数本质上是一一对有序实数。在这一章的学习中主要用到的就是之前已经渗透过的类比方法, 这也是教师锻炼学生运用类比自主学习的一个绝佳机会。

选择性必修二中数列这一章的“回顾与思考”中, 教材点出了研究数列问题的一个主要方法——数学归纳法[7]。其主要的思维模式即“观察质-归纳质-猜想质-证明”。教师可以在学生解决用归纳法证明的题目中, 为学生介绍数学归纳法。数学归纳法是归纳结合了演绎, 也被称为完全归纳法, 简称为归纳法。教师应该明确用数学归纳法得到的结论就是确定的真理。

在一元函数的导数及其应用这一章中, 教材点出“导数是研究函数性质的基本工具”。教师在教学中应该通过生活实例使学生感受到在研究函数和解决现实生活问题中导数具有极大的作用, 并体会导数

的意义。并且教师应根据教材的编排, 让学生在学习经历由平均变化率过渡到瞬时变化率这一数学过程, 从而得到导数的概念, 理解导数的几何意义。通过导数的几何意义, 让学生明白导数是一种关于瞬时变化率的数学表达, 客观世界中大量的变化率问题都可以用导数加以刻画。教师要将导数与函数联系在一起, 让学生体会导数的几何意义直观地反映了函数的局部变化情况, 是研究函数性质的基本工具, 认识到导数是研究函数极值问题的通法, 也是解决现实中优化问题的工具。

4. 人教 A 版高中数学“回顾与思考”专栏蕴含的数学思想及教学思考

在必修一的集合部分中, “回顾与思考”中的“数学运算并不局限与数的运算, 这对提升我们的数学运算素养是很有意义的。”提出了数学运算的形式, 除了数的运算, 人教 A 版高中数学部分的运算还包括集合的运算, 式的运算及向量的运算。教师在教学中可以对这句话为学生进行重点解释, 使学生提前形成这种数学运算数学思想, 为后面的新知识的学习作为铺垫。在几何运算的教学中, 教师要使学生感受到使用 Venn 图的重要性。Venn 图是了解、领悟、应用集合语言及其它数学语言的最有利的工具。除此之外, 教师在本章教学中要强调集合思想的渗透, 应该把学生的实际生活和他们已经学过的数学知识结合起来, 在列举他们生活中丰富的例子的过程中使他们理解集合的含义。要创设数学情境, 使学生能够用集合语言表达和交流, 使学生在实际使用过程中熟悉集合语言、自然语言和图形语言的特点, 进行相互转换。教师要通过这一章的教学, 让学生学会如何用集合语言表示数学对象, 这也是后面函数相关知识的基础。

在不等式这一章, 教材先提出了“用函数理解方程和不等式”的函数思想, 为后期学生学习函数做铺垫。教师在教学中可以用这里给出的问题作为引导, 进行知识的前铺。教师要让学生认识到理解函数的思想和解不等式的相关问题时, 用函数的观点来讨论不等式是相较于初中用等式的性质来解不等式更简单并且更加容易理解的方法和角度。

函数这一章节, 教材通过“函数是描述变量之间依赖关系的重要数学模型”渗透了模型思想; 在后面的教材中又再次出现指数函数与对数函数“是刻画客观世界中‘指数爆炸’‘对数增长’现象的重要数学模型”。教师在教学中可以将这两个部分一起总结, 让学生通过阅读这两段话, 结合所学的知识自己总结函数这一数学模型的使用方法, 点出函数模型在数学和生活中的广泛应用, 并体会用模型思想发现和提出问题、分析和解决问题的数学方法。教师在课堂教学中可以根据实际的教学内容设计活动性强、开放性强的数学问题, 为学生提供自主提出问题、自主学习、自主探索、自主解决问题的机会。教师在函数教学过程中可以渗透一些较为简单的数学模型, 让学生以小组为单位主动的提出问题, 发现问题, 合作学习, 合作解决问题。教师在教学引导中要立足于学生对问题的分析。对解决问题过程的理解, 要让学生在学数学到用数学的过程中培养学习能力、激发学生兴趣, 形成学生自发学习的良性循环。除此之外, 教师还可以开展多样的数学建模活动, 开设数学建模选修课程。还可以以个人或小组为单位, 在教师的指导下, 以现场的比赛、课外完成定时的作业、数据与结果的报告、成品展示交流等形式来开展数学建模教学, 强化学生的模型思想。

在必修二的复数这一章, “回顾与思考”通过“本章强调数与形的结合, 学习时应注意把握数学结合的思想方法”提出了数形结合思想。数形结合思想是数学中的一个重要思想, 而这在前面的集合中的 Venn 图, 函数图象, 不等式中的一元一次不等式在坐标系中表示一个区间, 二元一次不等式在坐标系中表示一个区域等就有体现, 在复数中教材如今再次点了出来。复数中是通过向量与几何的结合来体现数形结合思想的。教师可在这里对学生学过的数形结合思想请学生进行总结, 还可以通过以几何形式描述复数, 又将复数运用于几何中两个过程来帮助学生理解什么是“以形论数”和“以数助形”。教师还可以带领学生去总结学习复数的两条主线, 一条是用代数形式来表现复数的概念; 另一条是则用几何的形

式来描述复数概念。教师就可以引导学生在几何、向量和三角形这三者中建立联系,使复数得到更加直观的解释。在这一章的练习中,教师要提醒学生注意复数运算的几何意义,在解决数学问题时要学会利用复数与几何、向量、三角形、方程等方面的结合发挥综合应用的作用。

选择性必修二中数列这一章的“回顾与思考”中,教材先通过“数列是一种特殊的函数”点出了数列与函数思想的关系,又通过建立数列模型渗透出模型思想。教师在教学中应当对这部分内容进行强调,让学生意识到函数与数列既有共同点,又有不同点;既相互关联,又相互区别,并在一定条件下相互转化。教师在等差数列和等比数列的教学中,可以将数列的通项公式与相应形式的函数解析式相联系,以反映数列的本质属性。除此之外,教材在这一部分中渗透了与正整数 n 有关的命题的证明确的思想方法,即从有限到无限。这里教师要透过这一部分的内容让学生提前感受极限思想,并形成观察质-归纳质-猜想质-证明的思维模式。

在下一章一元函数的导数及其应用中,教材直接在“回顾与思考”中指出本章蕴含的导数的内涵思想及极限思想。这属于学生对于微积分部分知识的初步涉及,教师要让学生在这里初步感受极限思想,带领学生了解微积分的基本思想。教师要结合物理学科背景,并通过导数的具体实例——速度、膨胀率、效率、增长率等引导学生理解导数思想和本质,经历由平均变化率到瞬时变化率的过程,这一过程蕴含了无穷逼近的思想,这正是极限思想的本质。教师可以结合丰富的实际优化类数学模型,让学生感受到导数在变化率有关问题以及函数的基本性质研究和实际优化问题中的综合应用。教师还应在本课程的这一部分反复使用图形让学生认识和感受导数的几何意义,加深学生对于导数本质的认识和理解,将极限思想直观化。

5. 结语

总之,结合人教 A 版高中数学教材中关于“回顾与思考”专栏的现实情况,在高度重视“回顾与思考”专栏的基础上整合应用教学资源,挖掘“回顾与思考”专栏的功能,从而顺利地开展数学教学活动,探索如何创设教学情境。

“回顾与思考”概括了哪些知识和哪些常用数学思想方法?为了使学生对每一章的知识和思想方法有更加清晰的认识。“授人以鱼不如授人以渔”,只有掌握了思想方法,学生才能举一反三,避免题海战术,达到真正“减负”的目的。学生明确了数学思想方法的知识载体以后,才能使思想方法显性化,加深认识,在解题分析的过程中体会具体应用了哪些数学思想和哪些数学方法,对问题有一个分析、选择、判断、归纳的过程,提升运用思想和方法的自觉性和能力,切身体会数学思想、方法之美。因此在教学中,教师要重视“回顾与思考”中渗透点出的数学思想方法,将数学思想方法明晰化。同时,期望教师能够重视教材,回归课本“原点”。

基金项目

2021 年度省级一流本科专业——数学与应用数学建设点(教高厅函[2022]14 号)。

参考文献

- [1] 中华人民共和国教育部. 普通高中数学课程标准(2017 年版 2020 年修订) [S]. 北京: 人民教育出版社, 2020.
- [2] 李凯, 韩林锋. 湘教版与人教 A 版高中数学教科书“章小结”内容的比较研究[J]. 中小学课堂教学研究, 2023(1): 35-38.
- [3] 张爽. 高中数学教材“小结”栏目的教学研究——以人教 A 版教材为例[D]: [硕士学位论文]. 福州: 福建师范大学, 2018.
- [4] 课程教材研究所中学数学课程教材研究开发中心. 普通高中教科书 A 版必修第一册[M]. 北京: 人民教育出版社, 2019.

- [5] 宋莉莉. 在回顾、梳理基础上提炼、迁移, 发展一般性的思想方法——《普通高中教科书·数学(人教 A 版)》(第一册)第二章“一元二次函数、方程和不等式”的教材设计与教学思考[J]. 中学数学教学参考, 2019(31): 19-22.
- [6] 课程教材研究所中学数学课程教材研究开发中心. 普通高中教科书 A 版必修第二册[M]. 北京: 人民教育出版社, 2019.
- [7] 课程教材研究所中学数学课程教材研究开发中心. 普通高中教科书 A 版选择性必修第二册[M]. 北京: 人民教育出版社, 2019.