

人教版普通高中数学教科书(2019)数学史内容呈现研究

彭天水*, 董金辉#

黄冈师范学院数学与统计学院, 湖北 黄冈

收稿日期: 2023年5月26日; 录用日期: 2023年7月28日; 发布日期: 2023年8月7日

摘要

新课标强调将数学史融入数学课程, 数学史在教材中的编排及呈现效果直接影响了学生对数学文化的学习感受。以人教A版高中数学教科书为研究对象, 对数学史内容在书中的数量与位置分布, 内容的选择与篇幅, 信息载体, 作用预设四个方面进行研究, 发现教材对数学史内容的编排还存在内容选择不够丰富, 内容分配不够均匀, 作用预设不够明显等问题。因此, 教科书中数学史内容的设计和编排, 应注重数学史选取的典型、呈现视角和信息载体的多样化、强化作用预设等方面。

关键词

高中数学, 数学史, 教科书, 呈现

A Study on the Presentation of the History of Mathematics Content in the Ordinary High School Mathematics Textbook of People's Education Press (2019)

Tianshui Peng*, Jinhui Dong#

School of Mathematics and Statistics, Huanggang Normal University, Huanggang Hubei

Received: May 26th, 2023; accepted: Jul. 28th, 2023; published: Aug. 7th, 2023

Abstract

The new curriculum standard emphasizes the integration of the history of mathematics into the

*第一作者。

#通讯作者。

文章引用: 彭天水, 董金辉. 人教版普通高中数学教科书(2019)数学史内容呈现研究[J]. 创新教育研究, 2023, 11(8): 2069-2078. DOI: 10.12677/ces.2023.118308

mathematics curriculum. The arrangement and presentation of the history of mathematics in the textbook directly affect the students' learning experience of the mathematics culture. Taking the A-edition high school mathematics textbook as the research object, this paper studies the quantity and location distribution of the history of mathematics content in the book, the selection and length of the content, the information carrier, and the function presupposition, and finds that there are still some problems in the arrangement of the history of mathematics content in the textbook, such as not rich content selection, not even content distribution, and not obvious function presupposition. Therefore, the design and arrangement of the history of mathematics content in textbooks should pay attention to the typical selection of the history of mathematics, the diversification of presenting perspectives and information carriers, and the presupposition of strengthening effect.

Keywords

High School Mathematics, History of Mathematics, The Textbook, Presentation

Copyright © 2023 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

2016年7月1日, 习近平总书记在庆祝中国共产党成立95周年大会上, 正式提出了“文化自信”, 并对其深刻的价值与内涵进行了阐述[1]。此后, 文化自信深入人心。在文化自信的大背景下, 数学文化也包含与其中。”

在数学史方面, 《普通高中数学课程标准(2017年版2020年修订)》提到“数学文化渗透”[2], 强调了数学文化的重要性, 而数学史作为传递数学文化的主要途径, 其呈现方式直接影响了学生对数学文化的认识。

张奠宙先生曾指出, 数学史与数学文化的研究已经取得了一些进展并促进了数学史与数学教育的结合, 数学史内容也很多, 但在数学史呈现上, 他指出许多问题, 如内容呈现过于简单罗列, 数学史教学品味较低等问题[3]。因此, 有关数学史呈现还有许多值得研究的问题, 例如: 如何选择教科书中数学史的内容并限定字数? 布置在哪个位置? 选择多少个数学史知识? 怎么设计问题以达到该有的效果等等。

以“高中数学”“数学史”“呈现”为关键字索引, 发现有关文章鲜有。徐乃楠、孔凡哲、刘鹏飞在2015年发表的《高中数学教科书中的数学史呈现研究》一文中, 只统计必修册, 没有统计选修册。并且, 2019年后, 新版教材已陆续施行, 教材内容也发生变动。因此, 重新审视新版高中数学教科书(全套共五本)中的数学史内容及其呈现方式能为教科书的修订和使用提供帮助。

研究依据数学史内涵的标准, 对全套五本高中数学教科书中全部的数学史内容进行统计, 分析数学史在教材中的客观位置分布情况和数量分配情况; 分析数学史内容的选择类型、某一数学史内容的篇幅大小; 分析数学史内容呈现在教科书上所依托的信息载体种类; 以及举例分析某一数学史内容的设计能否达到预期的教学效果等。研究通过以上分析, 找出存在的问题与不足, 如位置与数量分配应更加均匀, 数学史内容选择的类型应更加多样, 增加影视资料, 对数学史内容的设计应达到预期的效果等, 最终得出此版教材的数学史呈现在细节上还有待改进的结论。因此, 研究结尾给出了一些建议, 以此改进数学史在教材中的呈现效果, 帮助教师更好地实施教学, 提升学生学习数学史的体验, 最终促进学生发展。

2. 教材中数学史内容的呈现研究

2.1. 数学史位置与数量分布

准确了解数学史的概念有助于分辨数学史内容。李文林教授在其著作《数学史概论》中对数学史概念做了详细解释, 主要内涵包括: 数学史研究的是数学的历史, 数学史包含数学自身的发生、发展过程, 同时还涉及社会政治、经济文化等其他方面的发展[4]。

朱展霖、胡典顺教授在研究某三个版本教材的数学史内容时, 将其划分为章前语、正文等七个栏目[5]。研究基于此将其修改为: 章引言, 正文、习题、标注、特色专栏和小结六个部分。同时参考张盛熔的硕士论文中的有关观点[6], 对数学史内容在其每一节的位置进行统计(以下内容专指数学史), 见表 1。

Table 1. History of mathematics content statistics table

表 1. 数学史内容统计表

册数	知识主题	内容	所属位置类型	页码	
必修 第一册	预备知识	康托尔与集合论	习题	p. 6	
		基数的英文缩写	标注	p. 15	
		国际数学家大会图标——赵爽弦图	正文	p. 39	
		函数符号与莱布尼兹	标注	p. 62	
		函数概念的发展历程	特色专栏	p. 75	
		函数的形成与发展	特色专栏	p. 97	
		对数符号的来源	标注	p. 122	
		对数的发明	特色专栏	p. 128	
		函数	中外历史上的方程求解	特色专栏	p. 147
			对数概念的形成与发展	特色专栏	p. 157
			弧度制概念的诞生	标注	p. 173
			三角学与天文学	特色专栏	p. 186
			数学家制作三角函数表	正文	p. 190
	必修 第二册	几何与代数	振幅、周期、频率、相位	特色专栏	p. 250
Taylor 公式			习题	p. 256	
			向量和向量符号的由来	特色专栏	p. 6
			海伦和秦九韶	特色专栏	p. 55
			数学家研究负数开平方的问题	章引言	p. 67
			复数的虚数单位 i 的引入	标注	p. 68
			复数的几何表示	标注	p. 71
			代数基本定理的介绍	特色专栏	p. 81
			复数的发展历程	小结	p. 93
			画法几何与蒙日	特色专栏	p. 112
	祖暅原理与柱体、锥体的体积	特色专栏	p. 121		

Continued

		欧几里得《原本》、公理化方法	特色专栏	p. 165
		几何学的发展	特色专栏	p. 166
		大数据技术	特色专栏	p. 217
		样本空间概念的引入	标注	p. 226
	概率与统计	概率的古典定义	标注	p. 234
		大数定律, 伯努利肖像	标注	p. 253
		蒙特卡洛方法	标注	p. 255
		解析几何的创立	章引言	p. 50
		笛卡尔与解析几何	特色专栏	p. 80
	选择性必修 第一册	几何与代数	坐标法与数学机械化	特色专栏 p. 89
			圆锥曲线的发现与研究	章引言 p. 104
			解析几何的形成与发展	特色专栏 p. 142
		谢尔宾斯三角形	正文	p. 6
		毕达哥拉斯学派 ——用沙粒和小石子研究数	习题	p. 9
		斐波那契数列	特色专栏	p. 10
		高斯的故事	正文	p. 18
		高斯简介	标注	p. 18
		古巴比伦时期的计数方法	标注	p. 27
		《庄子·天下》中提到的数列问题	正文	p. 27
	选择性必修 第二册	函数	古印度国王奖励象棋发明者的故事	正文 p. 34
			中国古代数学家关于数列求和的方法	特色专栏 p. 42
			《莱因德纸草书》上的历史数学题	习题 p. 55
			瑞典数学家刻画描述雪花形状的图案	习题 p. 55
			基于《算法统宗》的数学问题	习题 p. 55
			基于冰雹猜想改编的数学问题	习题 p. 56
			牛顿法——用导数方法 求方程的近似解	特色专栏 p. 82
			微积分的创立与发展	特色专栏 p. 101
	选择性必修 第三册	概率与统计	二项式定理的产生、 完备和推广历程	习题 p. 35
		数学建模与 数学探究活动	杨辉三角的性质与应用	特色专栏 p. 39

Continued

概率与统计	贝叶斯公式	标注	p. 51
	随机变量概念的起源	标注	p. 57
	高尔顿板实验	正文	p. 74
	正态密度函数与正态分布的发现	标注	p. 84
	“回归现象”的起源	标注	p. 110
	回归与相关	特色专栏	p. 122

对六种位置类型进行分类统计, 见表 2。

Table 2. History of mathematics content classification statistical table

表 2. 数学史内容分类统计表

位置类型	特色专栏	标注	习题	正文	章引言	小结	总计
数量(个)	24	16	8	7	3	1	59
比例(%)	39.32	26.53	13.74	12.14	5.74	2.54	100

根据表 2, 从内容板块的角度来看, 特色专栏最多, 其次是标注, 其他依次, 小结最少, 总体说明人教版教材数学史的分布位置较为丰富。特色专栏作为每节最末尾的一栏, 则以其吸引眼球不同于正文的多样化设计, 达到学生阅读或写作的效果, 符合学生学习的兴趣规律, 是数学史内容的主要呈现方式。标注在正文的两侧, 可以辅助学生理解知识和了解数学史。习题和正文相差不大, 习题帮助学生巩固和应用, 正文则作为教材的主要内容不可忽略, 两者在数学史呈现上均起到一定的作用。而章引言和小结较少, 也可能与他的功能受限有关。

为了了解数学史内容在整本教材中的位置分布是否均匀, 对其相邻内容的页码间距进行画表, 记横坐标 n_i 表示第 i 个数学史和第 $i+1$ 个数学史, 纵坐标 d_i 为第 i 个数学史和第 $i+1$ 个数学史的页码差, 同时保留页码两端的值, 见图 1。

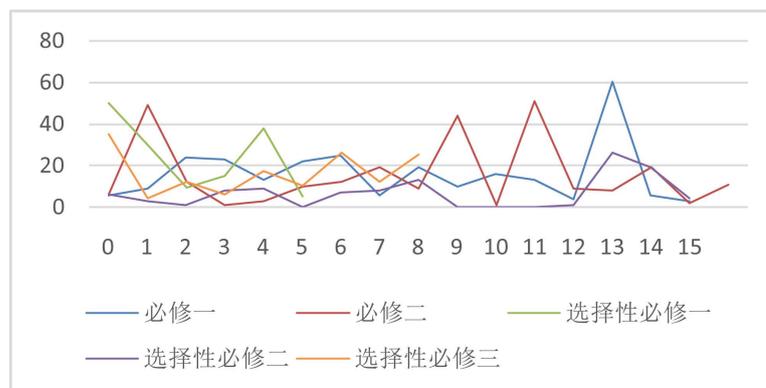


Figure 1. Page difference line chart of the history of mathematics

图 1. 各册数学史页码差折线图

从图 1 发现, 教材中数学史内容位置分布很不均匀, 原因可能是, 数学发展跌宕起伏, 每个新领域、新知识的发现过程本身就是不均匀的, 所以其编排也是不均匀的, 虽然这不太影响学生学习数学史, 但

均匀分配对提升学生的阅读体验是有帮助的。

从数学史内容分布的角度对表 1 进行统计分析, 见图 2。

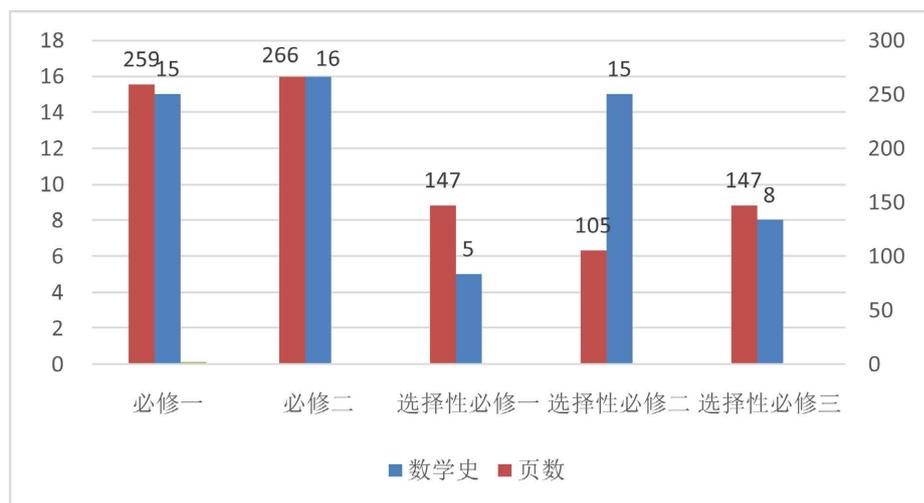


Figure 2. The total number of pages in each textbook and the total content of the history of mathematics

图 2. 各册教材总页数及数学史内容的总量

为了更科学地比较各册数学史含量, 引入“内容密度”的概念(“内容密度 = 内容/页码”), 见表 3。

Table 3. Content density table of the history of mathematics

表 3. 各册数学史内容密度表

册数	必修一	必修二	选择性必修一	选择性必修二	选择性必修三
内容密度(例/页)	0.058	0.060	0.034	0.143	0.054

结合图 2 和表 3 可以看出, 虽然必修二的数学史内容最多, 有 16 例, 但选择性必修二的数学史内容密度最大, 说明选择性必修二的数学史内容最密集, 同时, 选择性必修一的最稀疏。

2.2. 内容选择与篇幅

Table 4. History of mathematics content type frequency table

表 4. 数学史内容类型频数表

册数	数学家	数学故事	数学名著	数学术语	数学名题	思想方法	背景	综合专题	其他	合计
必修一	1	0	0	4	0	0	0	7	3	15
必修二	1	3	0	3	0	1	1	7	0	16
选择性必修一	0	0	0	0	0	1	1	3	0	5
选择性必修二	1	4	1	0	4	1	0	4	0	15
选择性必修三	0	1	0	4	0	0	0	2	1	8
合计	3	8	1	11	4	3	2	23	4	59

内容选择方面,刘云、朱维宗对数学史内容的呈现方式分为了数学家、数学故事、数学名著等九种[7]。其中提到数学应用,研究认为,数学应用被认为是数学史还有待商酌。数学史是数学知识的产生和发现过程,而数学应用则是在数学知识发生之后,人们将其运用在实践中,两者截然不同,当然,如果在实践中又产生了新的知识则理当别论。因此,本研究使用其他8种分类作为本文的分类依据,对数学应用持保留意见。研究对8种分类在教科书中的数学史数量进行统计,见表4。

从表4数据的大小可以直观看到,虽然涉及的面较广,内容比较丰富,但分配得不够均匀,其中综合专题最多,从形式上看,综合专题一般独立于正文内容,处于每一节的末尾,这样可以较为集中地展现数学史的内容。其次是数学术语,数学的发展史就是一部符号的发展史,数学符号的发展极大地推动了数学内容体系的进步与完善,而数学术语大多产生于其中,因此,有关数学术语的数学史内容较多是正常的。其他方面也零散地涉及,但有关数学名著的数学史内容只有一例,应适当增加其内容。

研究也对教科书中数学史所涉及的学科类别进行部分统计,列举了几个具有代表性的示例,见表5。

Table 5. Table of interdisciplinary types in the history of mathematics

表 5. 数学史交叉学科类型

内容示例	赵爽弦图	函数概念的 发展历程	函数的形成 与发展	对数的发明	振幅、周期、 频率、相位	画法几何 与蒙日
学科领域	文化	天文学、 军事、航海	物理	天文、航海、工程、 贸易、军事	物理	美术

由表5可知,除了主要涉及的数学知识之外,数学史还交叉了一些其他学科领域,如文化、天文、军事、航海、物理、工程、贸易、美术等,这说明在编排和设计的时候考虑到与其他学科进行融合,体现了数学的基础性、实用性与广泛性,这对增强学生对数学的了解以及学习兴趣都有很好的帮助。

篇幅方面,某一内容的篇幅大小间接影响了学生对该内容的重视程度,数学史也是如此。因此,对内容篇幅进行统计,可以看出其在文中一定的影响力。在正文中涉及的数学史,其字数仅限于体现关键内容的句子,和标注一样,这些内容过于零散,相对于特色专栏这样较为详细和全面内容而言,前者信息量少,删去后无较大影响,因此,研究将这样零散的数学史内容划分为“点缀式”[8],相对地,将后者例如特色专栏这样详细而全面的称为“集中式”(一般为几大段落,字数为几百字以上),统计结果见表6。

Table 6. Mathematical history of space statistical table

表 6. 数学史篇幅统计表

	必修一	必修二	选择性必修一	选择性必修二	选择性必修三	合计(个)	百分比(%)
点缀式	8	8	3	11	6	35	59.32
集中式	7	8	3	4	2	24	40.68

从表6中数据可以发现,点缀式和集中式在数量上相差不大,点缀式略大于集中式,没有出现某一种很多或很少的情况,这也在某种程度上体现了平均分配的中庸思想。其实,点缀式和集中式均有各自的优点,集中式更能详细地介绍数学史的相关内容,而点缀式也可以发挥其适用广泛,覆盖面广的优点,所以,教材选择这样主要的两种篇幅方式是合理的。

2.3. 信息载体

教材的信息载体主要分为文字和图画,部分内容使用图文并茂的形式,由此,研究对教材数学史内

容的文字、图画、图文并茂三种形式进行统计, 见表 7。

Table 7. Mathematical history content information carrier statistical table

表 7. 数学史内容信息载体统计表

	必修一	必修二	选择性必修一	选择性必修二	选择性必修三	合计(个)	百分比(%)
文字	10	12	3	8	5	38	60.71
图画	0	0	0	0	0	0	0.00
图文并茂	5	4	2	7	3	21	39.29

对表 7 结果, 可联系某学者观点: 高中学生数学认知发展的水平相关, 高中学生已具备了一定的逻辑思维能力, 知识的学习对直观的依赖已较初中和小学的学生降低[8]。但研究认为此观点有待改进, 原因在于: 初中知识简单基础, 容易展示一些较为形象化的知识, 而到高中阶段, 知识越发抽象, 独立的图画不容易表达出来, 在同样大的占据面积之下, 文字比图画能更多地表达抽象的数学知识, 当然, 在特定情境下, 图画也以直观性强、传播速度快、记忆保持久等特点发挥文字所不能替代的作用。

2.4. 作用预设

不能说把数学史的内容放在教材里就算大功告成了, 关键看能不能发挥其作用。以汪晓勤在《HPM: 数学史与数学教育》书中总结的“数学史对于学生的价值”一表[9], 来评价教材中数学史内容的作用预设的效果。

研究以“康托尔与集合论”为例, 见图 3。



拓广探索

- 集合论是德国数学家康托尔于 19 世纪末创立的。当时, 康托尔在解决涉及无限量研究的数学问题时, 越过“数集”限制, 提出了一般性的“集合”概念。关于集合论, 希尔伯特赞誉其为“数学思想的惊人的产物, 在纯粹理性的范畴中人类活动的最美的表现之一”, 罗素描述其为“可能是这个时代所能夸耀的最伟大的工作”。请你查阅相关资料, 用简短的报告阐述你对这些评价的认识。



康托尔 (Georg Cantor,
1845—1918)

Figure 3. Mathematical history of set theory content illustration

图 3. 集合论数学史内容插图

从知识与技能来看, 在预备知识中, 选择“康托尔与集合论”的数学史内容是没有问题, 但内容过于简单, 没有故事, 只有一张图片 and 两句其他数学家对康托尔的赞美, 没有什么可读的地方。

从过程与方法来看, 最后设置的作业缺乏实际考察, 国内中学普遍对学生的电子通讯设备进行严格管控, 学生难有条件自行去上网查询资料, 时间空间都不允许, 活动无法实现, 题目设置自然成了摆设。

从情感态度价值观来看, 高中的集合内容就这短短三节, 希尔伯特都称赞康托尔的集合论为“数学思想的惊人的产物, 在纯粹理性的范畴中人类活动的最美的表现之一”, 而这后两节“集合间的基本关系”“集合的基本运算”都缺乏数学史内容的教育, 且因为作业活动难以实施, 学生很难体会集合论作为划时代意义的理论, 所经历的从诞生到第三次数学危机再到完善的复杂历程, 更不能感受到数学家们

为追寻真理而做出不懈努力的顽强意志和探索精神。

3. 思考与建议

3.1. 数学史内容视角应更加丰富

研究发现,除去综合专题和数学术语两个类型在书中占比较高之外,其他类型的数量都较少,不利于学生去了解更多的数学史信息,例如数学家的故事等。以“集合论”举例,教材中康托尔的介绍显然过于简单,还未被证实的数学史可以不用,但是已经考证的就可以放心大胆地使用,总的来说,教材中数学史内容还是不够,内容也还有更加丰富的空间。研究建议,在如今信息化的时代,数学史教育不能局限于传统的纸质材料,数学史主要是数学知识的变迁,这种具有动态性的特点,用视频来传播非常适宜,建议摄制相关数学史视频,以光盘的形式保存,或在智慧中小学教育平台等网络平台发布,与教材相应位置保持一致,这样有助于激发学生学习兴趣,促进学生学习。

3.2. 内容分配应更加合理

研究发现,数学史在教材中的分布是不均匀的。目前也没有确定的理论或标准来说明,数学史内容该如何分配。有学者认为,数学史的内容应该按照“历史发生原理”来严格编排,但也有专家提出反对意见,不能总是依据严谨的逻辑的数学知识来编排,否则带来的必然是抽象形式化的结构,给学生的也是晦涩难懂的学习感受[10]。研究认为,只要有知识的产生,则必有其历史。因此,教材应该保证每一章节的内容拥有适量的数学史材料,重点内容可以多一点,非重点内容可以少一点。

3.3. 作用预设应达预期效果

教材中许多数学史结尾都会提出一定的问题来要求学生探究或解答,但许多问题的提问缺乏实际考查和技巧,有的让学生去查资料,有的则说感兴趣的同学可以查阅相关书籍,在老师不介入的情况下,学生主动完成的概率几乎为零,很难起到教育效果。不得不承认的是,即使在当前素质教育为主流的背景下,应试教育的思想仍然根深蒂固,很多学生仍以分数论成败,对这些数学史内容,他们只不过认为是一个甜点罢了。所以,教材中许多数学史内容末尾的提问或要求显然是失败的,简单易行的办法就是提高要求,让学生重视它,纳入考核之中也未尝不可。

综上所述,人教A版高中数学必修教科书中数学内容的呈现方式是肯定的,细节上还有改进的空间。当然,教科书毕竟只是师生教学的参考,我们既不能忽视数学史的辅助作用,也不能本末倒置只讲数学史。真正关键在于教师如何使用教材,如何设计有关数学史的课堂教学。

基金项目

黄冈师范学院教研项目——HPM在高中数学课堂中的实施效果研究(2022CE78)。

参考文献

- [1] 陈俊卿. 坚定文化自信 推动文化发展[N]. 人民日报, 2016-10-20(007).
- [2] 中华人民共和国教育部. 普通高中数学课程标准(2017年版 2020年修订)[M]. 北京: 人民教育出版社, 2020.
- [3] 张奠宙. 我亲历的数学教育(1938-2008)[M]. 南京: 江苏教育出版社, 2009.
- [4] 李文林. 数学史概论[M]. 北京: 高等教育出版社, 2002: 1-5.
- [5] 朱展霖, 胡典顺. 基于HPM视角的三个版本教材对比研究[J]. 数学教学, 2021(2): 13-18.
- [6] 张盛熔. 新人教A版高中数学必修册教科书中数学史内容的研究[D]: [硕士学位论文]. 武汉: 华中师范大学, 2020.

- [7] 刘云, 朱维宗. 高中数学必修教科书中数学史内容的呈现方式探析[J]. 数学教育学报, 2012, 21(2): 86-89.
- [8] 余庆纯, 汪晓勤. 中国 HPM 研究内容与方法[J]. 数学教育学报, 2022, 31(4): 49-55.
- [9] 汪晓勤. HPM: 数学史与数学教育[M]. 北京: 科学出版社, 2017: 5.
- [10] 徐乃楠, 孔凡哲, 刘鹏飞. 高中数学教科书中的数学史呈现研究[J]. 数学教育学报, 2015, 24(2): 61-65.