Pure Mathematics 理论数学, 2014, 4, 247-250
Published Online November 2014 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
http://dx.doi.org/10.12677/pm.2014.46036

The Simplicity of the Finite-Dimensional Modular Lie Superalgebra $\widehat{W}(n,m)$

Lu Wang, Lihua Zhang*

School of Mathematics and System Science, Shenyang Normal University, Shenyang
Email: *nankaizlh@163.com

Received: Oct. 11th, 2014; revised: Oct. 31st, 2014; accepted: Nov. 5th, 2014

Abstract

In this paper, the finite-dimensional modular Lie superalgebra $\widehat{W}(n,m)$ is constructed, and the simplicity of $\widehat{W}(n,m)$ is proved.

Keywords

Modular Lie Superalgebra, Simplicity, Exterior Algebra, Truncated Polynomial Algebra

有限维模李超代数$\widehat{W}(n,m)$的单性

王　璐，张丽华*

沈阳师范大学数学与系统科学学院，沈阳
Email: *nankaizlh@163.com

收稿日期：2014年10月11日；修回日期：2014年10月31日；录用日期：2014年11月5日

摘　要

本文构造了一类有限维模李超代数$\widehat{W}(n,m)$，并证明了$\widehat{W}(n,m)$是单模李超代数。

*通讯作者。

关键词

模李超代数，单性，外代数，截头多项式代数

1. 引言

目前，有限维单模李超代数的分类问题还没有解决[1]-[4]，所以构造新的有限维单模李超代数具有重要的意义。

文献[5]以外代数和截头多项式代数的张量积为底代数构造了有限维模李超代数$\bar{W}(n,m)$，给出了$\bar{W}(n,m)$的Θ-型导子，决定了其导子超代数，进而得到了定义$\bar{W}(n,m)$的整数m,n是内蕴的结论。文献[6]以除幂代数、外代数和截头多项式代数的张量积为底代数构造了有限维模李超代数$\tilde{W}(n,\underline{t},q,m)$，$\bar{W}(n,t,q,m)$，确定了它们的导子代数，证明了$\bar{W}(n,t,q,m)$是有限维单模李超代数，文献[7]证明了$\tilde{W}(n,\underline{t},q,m)$是有限维单模李超代数。本文参考文献[5]和文献[6]构造了有限维模李超代数$\widehat{W}(n,m)$，并证明了$\widehat{W}(n,m)$是单模李超代数。

2. $\widehat{W}(n,m)$的构造

本文采用文献[1]及[5]的符号，用N表示正整数集，F是特征数为$p>2$的域，设$n\in\mathrm{N}$，$\wedge(n)$为域F上具有n个未定元$x_1,x_2,\cdots,x_n$的外代数。

定义$B_0:=\varnothing$，$B_k:=\{\langle i_1,i_2,\cdots,i_k\rangle|1\le i_1<i_2<\cdots<i_k\le n\},k=1,\cdots,n$，令$B(n)=\bigcup_{k=0}^{n}\mathrm{B}_k$。对$u=\langle i_1,i_2,\cdots,i_k\rangle\in B(n)$，令$|u|=k,\{u\}=\{i_1,i_2,\cdots,i_k\},x^u=x_{i_1}x_{i_2}\cdots x_{i_k}$，且约定$|\varnothing|=0,x^{\varnothing}=1$，则$\{x^u|u\in B(n)\}$构成了$\wedge(n)$的一组$F$-基底。

令$m\in\mathrm{N},r=n+m$，$T(m):=F[y_{n+1},y_{n+2},\cdots,y_r]$为满足$y_i^p=1$，$i=n+1,\cdots,r$的截头多项式代数。令$II:=\{0,1,\cdots,p-1\}$为模$p$的剩余类环，$H=II^m$，设$\lambda=(\lambda_{n+1},\cdots,\lambda_r)\in H$，定义：$y^\lambda=\prod_{i=n+1}^{r}y_i^{\lambda_i}$，于是$T(m)=\left\{\sum_{\lambda\in H}a_\lambda y^\lambda|a_\lambda\in F\right\}$，$\{y^\lambda|\lambda\in H\}$为$T(m)$的一组$F$-基底。

令$U=\wedge(n)\otimes T(m)$，$Z_2=\{\bar{0},\bar{1}\}$表示模2的剩余类环，令：$U_{\bar{1}}=\wedge(n)_{\bar{1}}\otimes T(m)$，$U_{\bar{0}}=\wedge(n)_{\bar{0}}\otimes T(m)$，于是$U$是由$\wedge(n)$的$Z_2$-阶化诱导的结合超代数。

设$A=A_{\bar{0}}\oplus A_{\bar{1}}$是超代数，若$x\in A_\theta$，其中$\theta\in Z_2$，则称$x$是次数$\theta$的$Z_2$-齐次元素，并记$d(x)=\theta$。在本文中若$d(x)$出现在某个表达式中，则约定$x$是$Z_2$-齐次元素。用$h(A)$表示超代数$A$的所有$Z_2$-齐次元素构成的集合，即$h(A)=A_{\bar{0}}\cup A_{\bar{1}}$。

若$f\in\wedge(n),g\in T(m)$，将$f\otimes g$简记为fg，于是$\{x^u y^\lambda|u\in B(n),\lambda\in H\}$是$U$的一个$F$-基底。令$U_i=\mathrm{span}_F\{x^u y^\lambda\||u|=i\},i=1,\cdots,n$，则$U=\bigoplus_{i=0}^{n}U_i$是$Z$-阶化超代数，且$U_0=T(m)$。

设$I_1=\{1,\cdots,n\},I_2=\{n+1,\cdots,\cdots r\},I=I_1\cup I_2$，对$i\in I_1$，令$D_i=\partial/\partial x_i$为$\wedge(n)$对$x_i$的偏导子，则$D_i$可扩充为$U$的导子，使得对$\lambda=(\lambda_{n+1},\cdots,\lambda_r)\in H$，$D_i(x^u y^\lambda)=\begin{cases}\dfrac{\partial x^u}{\partial x_i}y^\lambda & i\in I_1\\ \lambda_i x^u y^\lambda & i\in I_2\end{cases}$。

设$u=\langle i_1,i_2,\cdots,i_k\rangle\in B_k$，若$i\in\{u\}$，则令$u-\langle i\rangle\in B_{k-1}$，使得$\{u-\langle i\rangle\}=\{u\}\setminus\{i\}$；令$u(i)=|\{l\in\{u\}|l<i\}|$，若$i\in I_1\setminus\{u\}$，约定$u(i)=0,x^{u-\langle i\rangle}=0$，那么对任意的$i\in I_1$，有$D_i(x^u)=(-1)^{u(i)}x^{u-\langle i\rangle}$，于是，当$i\in I_1$时，$D_i\in\mathrm{Der}_{\bar{1}}U$，而当$i\in I_2$时，$D_i\in\mathrm{Der}_{\bar{0}}U$。

设 $f\in h(U), D\in h(\mathrm{Der}U)$，定义 $(fD)(g)=fD(g), \forall g\in h(U)$，则对 $i,j\in I$， $f,g\in U$ 有：

$$\left[fD_i,gD_j\right]=fD_i(g)D_j-(-1)^{d(fD_i)d(gD_j)}gD_j(f)D_i$$

令 $\widehat{W}(n,m)=\left\{\sum_{i=1}^{r}f_iD_i \,\middle|\, f_i\in U, i\in I\right\}$，那么 $\widehat{W}(n,m)$ 是 U 的导子超代数 $\mathrm{Der}U$ 的子代数，$\left\{x^u y^\lambda D_j \,\middle|\, u\in B(n), \lambda\in H, j\in I\right\}$ 为 $\widehat{W}(n,m)$ 的一组 F-基底。下面简记 $\widehat{W}(n,m)$ 为 $\widehat{W}$。

令 $\widehat{W}_i=\mathrm{span}_F\left\{x^u y^\lambda D_j \,\middle|\, |u|+\delta(j,I_2)=i+1, u\in B(n), \lambda\in H, j\in I\right\}$，其中：$\delta(j,I_2)=\begin{cases}1 & j\in I_2\\ 0 & j\notin I_2\end{cases}$，那么 $\widehat{W}=\bigoplus_{i=-1}^{n}\widehat{W}_i$ 是 Z-阶化李超代数。

3. $\widehat{W}$ 的可迁性与不可约性

引理 3.1 $\widehat{W}$ 是可迁的。

证明：任取 $0\neq X_i\in\widehat{W}_i\,(i=0,1,\cdots,n)$，那么：

$$X_i=\sum_{\lambda\in H}\sum_{j\in I_1}\sum_{u\in B_{i+1}}a_{\lambda ju}x^u y^\lambda D_j+\sum_{\lambda\in H}\sum_{l\in I_2}\sum_{v\in B_i}b_{\lambda lv}x^v y^\lambda D_l$$

因此若设：

$$E_1=\left\{(\lambda,j,u)\in H\times I_1\times B_{i+1}\,\middle|\,a_{\lambda ju}\neq 0\right\},\ E_2=\left\{(\lambda,l,v)\in H\times I_2\times B_i\,\middle|\,b_{\lambda lv}\neq 0\right\}$$

则：

$$X_i=\sum_{(\lambda,j,u)\in E_1}a_{\lambda ju}x^u y^\lambda D_j+\sum_{(\lambda,l,v)\in E_2}b_{\lambda lv}x^v y^\lambda D_l$$

如果 $\left[X_i,\widehat{W}_{-1}\right]=0$，因 $\widehat{W}_{-1}=\mathrm{span}_F\left\{y^\lambda D_k \,\middle|\, \lambda\in H, k\in I_1\right\}$，所以有：

$$\left[X_i,D_k\right]=0,\ k=1,\cdots,n$$

即：

$$\left[\sum_{(\lambda,j,u)\in E_1}a_{\lambda ju}x^u y^\lambda D_j+\sum_{(\lambda,l,v)\in E_2}b_{\lambda lv}x^v y^\lambda D_l, D_k\right]=\sum_{(\lambda,j,u)\in E_1}\left[a_{\lambda ju}x^u y^\lambda D_j,D_k\right]+\sum_{(\lambda,l,v)\in E_2}\left[b_{\lambda lv}x^v y^\lambda D_l,D_k\right]=0$$

设 $E_1^k=\left\{(\lambda,j,u)\in E_1\,\middle|\,k\in\{u\}\right\}$， $E_2^k=\left\{(\lambda,l,v)\in E_2\,\middle|\,k\in\{v\}\right\}$，则：

$$\begin{aligned}&\sum_{(\lambda,j,u)\in E_1}\left[a_{\lambda ju}x^u y^\lambda D_j,D_k\right]+\sum_{(\lambda,l,v)\in E_2}\left[b_{\lambda lv}x^v y^\lambda D_l,D_k\right]\\&=\sum_{(\lambda,j,u)\in E_1^k}-(-1)^{d\left(x^u y^\lambda D_j\right)+u(k)}a_{\lambda ju}x^{u-\langle k\rangle}y^\lambda D_j+\sum_{(\lambda,l,v)\in E_2^k}-(-1)^{d\left(x^v y^\lambda D_l\right)+v(k)}b_{\lambda lv}x^{v-\langle k\rangle}y^\lambda D_l=0.\end{aligned}$$

由 $\left\{x^u y^\lambda D_j \,\middle|\, u\in B(n), \lambda\in H, j\in I\right\}$ 为 $\widehat{W}(n,m)$ 的一组 F-基底，所以有：

$$a_{\lambda ju}=0,\ (\lambda,j,u)\in E_1^k,\ b_{\lambda lv}=0,\ (\lambda,l,v)\in E_2^k,\ k=1,\cdots,n$$

又因 $E_1=\bigcup_{k=1}^{n}E_1^k, E_2=\bigcup_{k=1}^{n}E_2^k$，所以 $a_{\lambda ju}=0$，$(\lambda,j,u)\in E_1$，$b_{\lambda lv}=0$，$(\lambda,l,v)\in E_2$，因此有 $X_i=0\,(i=0,1,\cdots,n)$，矛盾，故对 $i=0,1,\cdots,n$，有 $\left\{X\in\widehat{W}_i\,\middle|\,\left[X,\widehat{W}_{-1}\right]=0\right\}=\{0\}$，所以 $\widehat{W}$ 是可迁的。

引理 3.2：设 M 是 $\widehat{W}_0$ 模 $\widehat{W}_{-1}$ 的非零子模， $0\neq f\in U, j\in I_1$，若 $fD_j\in M$，则 $D_j\in M$。

证明：参见文献[6]引理 2.4.2 的证明。

引理 3.3：$\widehat{W}$ 是不可约的。

证明：设 M 是 $\widehat{W}_0$ 模 $\widehat{W}_{-1}$ 的非零子模，$0 \neq \sum_{\lambda\in H}\sum_{k\in I_1} c_{\lambda k} y^{\lambda} D_k \in M$，则有 $\lambda_0 \in H, k_0 \in I_1$，使得 $c_{\lambda_0 k_0} \neq 0$。因 $x_{k_0} D_{k_0} \in \widehat{W}_0$，因此有 $\left[x_{k_0} D_{k_0}, \sum_{\lambda\in H}\sum_{k\in I_1} c_{\lambda k} y^{\lambda} D_k\right] = \left(\sum_{\lambda\in H} c_{\lambda k_0} y^{\lambda}\right) D_{k_0} \in M$。由引理 3.2 知 $D_{k_0} \in M$。

任取 $k \in I_1, \lambda \in H$，因 $x_{k_0} y^{\lambda} D_k \in \widehat{W}_0$，$D_{k_0} \in M$，所以 $\left[x_{k_0} y^{\lambda} D_k, D_{k_0}\right] = y^{\lambda} D_k \in M$，而 $\widehat{W}_{-1} = \mathrm{span}_F\left\{y^{\lambda} D_k \middle| \lambda \in H, k \in I_1\right\}$，所以 $M = \widehat{W}_{-1}$，因此 $\widehat{W}$ 是不可约的。

4. $\widehat{W}$ 的单性

定理 4.1：$\widehat{W}$ 是单李超代数。

证明：设 L 是 $\widehat{W}$ 的任一非零理想，由引理 3.1、引理 3.3 及文献[1]的引理 1.1 知 $\widehat{W}_{-1} \subseteq I$，于是，$y^{\lambda} D_k \in L(\forall \lambda \in H, \forall k \in I_1)$，特别地，$D_k \in L(\forall k \in I_1)$。

(1) 设 $u_0 = \langle 1, \cdots, n\rangle$，那么对任意 $u = \langle i_1, \cdots, i_t\rangle \in B_t$ 且 $u \neq u_0$，存在 $v = \langle j_1, \cdots, j_l\rangle \in B_l$，使得 $\{u\}\cup\{v\} = I_1$，$\{u\}\cap\{v\} = \varnothing$。而对任意的 $\lambda \in H$, $j \in I$，因为：

$x^{u} y^{\lambda} D_j = \varepsilon\left(\prod_{i=1}^{l} \mathrm{ad} D_{j_i}\right)\left(x^{u_0} y^{\lambda} D_j\right)$ ($\varepsilon = 1$ 或–1)，而 $D_{j_i} \in L(i = 1, \cdots, l)$，$L$ 为 $\widehat{W}$ 的理想，所以 $x^{u} y^{\lambda} D_j \in L$。

(2) 对任意的 $(0, \cdots, 0) \neq \lambda = (\lambda_{n+1}, \cdots, \lambda_r) \in H$, $j \in I$，则有某个 $\lambda_{n+i} \neq 0$ (其中 $i \in \{1, \cdots, m\}$)，因为 $x^{u_0} y^{\lambda} D_j = -\frac{1}{\lambda_{n+i}}\left[x^{u_0} y^{\lambda} D_j, D_{n+i}\right]$，又由(1)知 $D_{n+i} \in L$，而 L 为 $\widehat{W}$ 的理想，所以 $x^{u_0} y^{\lambda} D_j \in L$。

(3)对任意的 $j \in I_1$，设 $\varsigma = (1, 0, \cdots, 0) \in H, \eta = (p-1, 0, \cdots, 0) \in H$，因为 $x^{u_0} D_j = \varepsilon_1\left[x^{u_0} y^{\varsigma} D_j, y^{\eta} D_{n+1}\right]$ ($\varepsilon_1 = 1$ 或–1)，又由(1)知 $y^{\eta} D_{n+1} \in L$，而 L 为 $\widehat{W}$ 的理想，所以 $x^{u_0} D_j \in L(\forall j \in I_1)$。

(4) 对任意的 $n + j \in I_2 (j = 1, \cdots, m)$，取 $n + i \in I_2, i \neq j$，设 $\varsigma' = (\varsigma_{n+1}, \cdots, \varsigma_r) \in H$，其中 $\varsigma_{n+j} = 1$，$\varsigma_{n+1} = \cdots = \varsigma_{n+j-1} = \varsigma_{n+j+1} = \cdots = \varsigma_r = 0$，$\eta' = (\eta_{n+1}, \cdots, \eta_r) \in H$，其中 $\eta_{n+j} = p - 1$，$\eta_{n+1} = \cdots = \eta_{n+j-1} = \eta_{n+j+1} = \cdots = \eta_r = 0$。

因为 $x^{u_0} D_{n+j} = \left[x^{u_0} y^{\eta'} D_{n+j}, y^{\varsigma'} D_{n+i}\right]$，由(1)知 $y^{\varsigma'} D_{n+i} \in L$，而 L 为 $\widehat{W}$ 的理想，所以 $x^{u_0} D_j \in L(\forall j \in I_2)$。

由(1)~(4)知 $\left\{x^{u} y^{\lambda} D_j \middle| u \in B(n), \lambda \in H, j \in I\right\} \subseteq L$，因此 $L = \widehat{W}$，所以 $\widehat{W}$ 是单模李超代数。

5. 结论

本文以外代数与截头多项式代数的张量积为底代数构造了有限维模李超代数 $\widehat{W}$，并证明它是单模李超代数，进一步要确定 $\widehat{W}$ 的导子超代数，讨论它的限制性及表示。

参考文献 (References)

[1] 张永正，刘文德 (2004) 模李超代数. 科学出版社，北京.

[2] 徐晓宁 (2010) 有限维模李超代数 $\Omega, \Gamma, \mathfrak{D}$. 博士论文，东北师范大学，长春.

[3] 远继霞 (2011) Cartan 型李超代数. 博士论文，哈尔滨工业大学，哈尔滨.

[4] 任丽 (2012) Cartan 型李超代数. 博士论文，东北师范大学，长春.

[5] 沙吾提·阿吾提，张永正 (2008) 模李超代数 $\overline{W}(n,m)$. *东北师范大学学报(自然科学版)*, **4**, 7-11.

[6] 董艳琴 (2011) 广义 Cartan 型模李超代数. 博士论文，东北师范大学，长春.

[7] 董艳琴，苏耘，孟凡洪 (2013) 模李超代数 $\tilde{W}$ 的单性与限制性. *东北师范大学学报(自然科学版)*, **4**, 31-35.