Finance 金融, 2014, 5, 24-32
Published Online January 2015 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/fin
http://dx.doi.org/10.12677/fin.2015.51004

Systemic Risk in Financial Systems in Consideration of Bankruptcy Liquidation Expenses

Shaohua Li, Cuiyun Hao

Department of Mathematics, Tongji University, Shanghai
Email: lixueshu@tongji.edu.cn

Received: Dec. 15th, 2014; revised: Jan. 2nd, 2015; accepted: Jan. 10th, 2015

Abstract

Systemic risk of a financial system arises from cascading defaults due to liability linkages among institutions. The main work in the paper builds on the modeling paradigm of Eisenberg and Noe (2001), extending it by introducing bankruptcy liquidation expenses. Comparing with the classical model, we discuss the existence and uniqueness of clearing payment vector under the extended model. In classical model, the whole financial system net worth has no loss throughout the clearing process. While, in the extended model proposed by the paper, there must be certain loss once some firm is insolvent and the loss is correlated to the magnitude of cascading defaults.

Keywords

Systemic Risk, Clearing Payment Vector, Bankruptcy Liquidation Expenses

考虑破产清算费用下的金融系统的系统风险

李少华，郝翠芸

同济大学数学系，上海
Email: lixueshu@tongji.edu.cn

收稿日期：2014年12月15日；修回日期：2015年1月2日；录用日期：2015年1月10日

摘　要

一个金融系统的系统风险是由于系统中各机构间的相互债务关联而导致的层叠违约所引起的。本文通过引入破产清算费用来扩展Eisenberg and Noe (2001)提出的有关系统风险的经典模型，讨论了扩展模型下清算向量的存在性和唯一性。在经典模型的清算过程中，整个金融系统的净值没有损耗，但在扩展模型下，一旦有一家机构破产，系统的净值就会有所损耗，并且损耗的多少与层叠违约的程度相关。

关键词

系统风险，清算向量，破产清算费用

1. 引言

现代金融体系中的各金融机构由于相互间的债务关联形成了越来越复杂的金融网络结构。在债务关系错综复杂的金融系统中，某一家金融机构的价值取决于它从其债务机构处收回的债务值，而它的债务机构能偿还给它的债务值又取决于系统中其它机构的偿付能力，在这种情形下，对单家金融机构的价值进行建模分析时，不能简单地把系统中各个金融机构分开考虑。一个金融系统的系统风险就是由于系统中各机构间的相互债务关联而导致的层叠违约所引起的。系统风险一旦爆发，整个金融体系必会遭受巨大的损失，1997 年至 1998 年的亚洲金融危机和 2007 年至 2009 年的国际金融危机都很好的诠释了金融系统风险爆发的危害性。大规模的系统风险危机下，金融机构相继破产，由于复杂的债务联系，破产机构的清算会成为解决危机过程中的一个难点。

1982 年，科威特 al-Manakh 股票市场的崩盘引发了一场经济危机，主要银行处于高风险状态，众多公司破产，高达 940 亿美元的债务问题亟待解决，但由于债务关系错综复杂，仲裁机构不能一个一个地进行清算，最后，在科威特政府的要求和支持下，Elimam et al. (1996, 1997) [1] [2]建立了具体的线性规划模型，通过求解每个机构的均衡债务支付比例，在较短的时间内解决了此次的债务纠纷问题，控制住了这场危机的发展态势。Eisenberg and Noe [3] (2001)基于这个具体的实例，提出了解决系统风险清算问题的一般模型，根据有限责任和债务优先原则，他们将系统中每一家机构在清算后应支付的债务价值组成的向量定义为清算向量，并结合不动点理论讨论了清算向量的存在性与唯一性条件，最后还证明了此模型与 Elimam et al.建立的线性规划模型在一定条件下是等价的。

Eisenberg and Noe 提出的金融系统网络结构模型是最简单的，成为经典的模型，可以在其基础上做很多的扩展与延伸，通过考虑更多的实际因素从理论上优化、扩展模型，然后在扩展模型下讨论清算向量的存在性与唯一性条件。Glasserman and Young [4] (2014)利用网络结构模型分析了系统中单一金融机构的违约导致系统风险的可能性。Rogers and Veraart [5] (2013)以及 Minca and Sulem [6] (2014)用扩展模型讨论发生系统风险情形下的救助问题。Elsinger et al. (2006a, 2006b) [7] [8]运用网络结构模型评估银行系统风险，并对欧洲银行系统进行了实证分析。Upper and Worms [9] (2004)利用网络结构模型对德国银行间市场的传染风险进行了实证分析。Upper [10] (2011)运用网络结构模型模拟银行间市场风险传染。马君潞等[11] (2007)运用网络结构模型估测了中国银行间市场双边传染的风险，并分析了其系统性特征。范小云等[12] (2011)运用网络结构模型分析了中国系统重要性银行的衡量标准。

本文通过引入破产清算费用来扩展经典模型，建立了考虑破产清算费用下的金融系统风险的清算模型。在扩展模型下，系统清算向量的存在性结论可以简单地由经典模型下得出的存在性条件推导得到，

但唯一性则需要更高要求的系统正规性支撑才行。最后通过对两种模型下金融系统的净值变化进行分析发现，在经典模型下的整个清算过程中，金融系统的净值保持不变，在系统外部资产大于 0 的情形下，最终至少有一家机构不会破产，但在扩展模型的清算下，一旦有一家机构破产，系统的净值就会有所损耗，并且破产机构越多，层叠违约程度越大，系统净值的损耗就会越多。

2. 预备知识

考虑一个包含 n 家金融机构的金融系统，方便起见，我们将 n 家金融机构简称为 n 个节点，每个节点都代表了一个独立的经济体，与系统中的其他一些节点会有债务关联，整个金融系统就是由节点间的相互债务关联所组成的。

对任意的 $i,j\in N$，记 l_{ij} 为 i 对 j 的名义负债，l_{ij} 满足：$l_{ij}\ge 0, l_{ii}=0$，且一般 $l_{ij}\ne l_{ji}$。l_{ij} 可构成一个 $n\times n$ 矩阵 $L=\left(l_{ij}\right)_{n\times n}$，称其为债务矩阵。

债务矩阵的第 i 行元素之和 $\sum_{j=1}^{n} l_{ij}$ 表示的是节点 i 对整个金融系统的名义总负债，记其为 $\bar{x}_i$，在不考虑系统外部负债的情形下，$\bar{x}_i$ 就是节点 i 资产负债表上的总负债，每个节点都会有一个对系统内的名义总负债，将其用列向量的形式表示，记为 $\bar{x}$，即 $\bar{x}=\left(\bar{x}_1,\bar{x}_2,\cdots,\bar{x}_n\right)^{\mathrm{T}}$。

债务矩阵的第 i 列元素之和 $\sum_{j=1}^{n} l_{ji}$ 表示的是节点 i 从金融系统中应收的名义总债务，属于节点 i 的系统内部资产。除了持有系统内部资产，节点 i 还持有系统外部资产 e_i，$e_i\ge 0$，记 $e=\left(e_1,e_2,\cdots,e_n\right)^{\mathrm{T}}$。

节点 i 若没有破产，清算时它会全额支付债务 $\bar{x}_i$，若破产，它就不再具有全额偿债的能力，由于债权人往往不止一个，我们假设系统内部债权人获得偿债的优先级是相同的，如此，可定义下面的债务分配比例矩阵 $\Pi=\left(\pi_{ij}\right)_{n\times n}$：

$$\pi_{ij}=\begin{cases}\dfrac{l_{ij}}{\bar{x}_i}, & \bar{x}_i>0\\ 0, & \bar{x}_i=0\end{cases}$$

π_{ij} 满足：$\pi_{ij}\ge 0, \pi_{ii}=0, \sum_{j=1}^{n}\pi_{ij}=1$。

对任意的 $i\in N$，节点 i 的总资产为 $e_i+\sum_{j=1}^{n}\pi_{ji}\bar{x}_j$，总负债为 $\bar{x}_i$。

Eisenberg and Noe 建立的模型虽然比较经典，但考虑的金融系统体系和清算机制相对简化，忽略了一些实际因素。机构破产后需要进行清算，而清算过程中会产生破产费用，因此系统中破产机构能用来偿债的资产将会在原来的基础上有所减少，针对这一实际问题，我们对经典模型进行扩展。

3. 考虑破产清算费用下的扩展模型

为了考虑破产清算费用，我们引入破产调动因子 $\varphi_i\left(0<\varphi_i<1\right)$，它的金融意义为，若节点 i 破产，那么它能用来支付债务的资产要在原来资产的基础上乘以 φ_i。简便起见，我们假设系统各节点的破产调动因子相同，均为 φ。因为此处的破产调动因子仅仅考虑的是破产清算费用的影响，所以一般 φ 是比较接近于 1 的。扩展之后的金融系统可表示为一个四元素组 $\left(\Pi,\bar{x},e,\varphi\right)$。

定义 1： 向量 $x^*\in\left[\mathbf{0},\bar{x}\right]$ 称为金融系统 $\left(\Pi,\bar{x},e,\varphi\right)$ 的一个清算向量，若 x^* 满足：1) 有限责任，即 $\forall i\in N$，$x_i^*\le e_i+\sum_{j=1}^{n}\pi_{ji}x_j^*$；2) 债务优先，即 $\forall i\in N$，$x_i^*=\bar{x}_i$ 或 $x_i^*=\varphi\cdot\left(e_i+\sum_{j=1}^{n}\pi_{ji}x_j^*\right)$。

由上述定义可得，$\forall i\in N$

$$\begin{cases}\text{若 } e_i+\sum_{j=1}^{n}\pi_{ji}x_j^*\ge\bar{x}_i,\text{则 } x_i^*=\bar{x}_i;\\ \text{若 } e_i+\sum_{j=1}^{n}\pi_{ji}x_j^*<\bar{x}_i,\text{则 } x_i^*=\varphi\cdot\left(e_i+\sum_{j=1}^{n}\pi_{ji}x_j^*\right)\end{cases}\tag{3.1}$$

对任意 $x\in\left[\mathbf{0},\bar{x}\right]$，我们将其称为金融系统的一个结算向量。

记 $D(x)\triangleq\{$以x为结算向量下的违约节点$\}$，

$$\Lambda(x)=\left(\lambda_{ij}(x)\right)_{n\times n}:$$

$$\lambda_{ij}(x)=\begin{cases}1, & i=j\text{ 且 }i\in D(x)\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

$$M(x)=\varphi\Lambda(x)+\left(\mathrm{E}-\Lambda(x)\right)$$

因此可将(3.1)式写成向量的形式

$$x^*=\min\left\{\overline{x},M\left(x^*\right)\left(e+\Pi^{\mathrm{T}}x^*\right)\right\}$$

定义 $[\mathbf{0},\overline{x}]$ 上的映射 H：

$$\mathrm{H}(x;e,\overline{x},\varphi)=\min\left\{\overline{x},M(x)\left(\Pi^{\mathrm{T}}x+e\right)\right\}$$

金融系统 $(\Pi,\overline{x},e,\varphi)$ 下的清算向量 x^* 为映射 $\mathrm{H}(x)$ 的不动点。

引理 1： 映射 $\mathrm{H}(x)$ 具有下面的性质：

1) $\mathrm{H}(x)$ 有界：$\forall x\in[\mathbf{0},\overline{x}]$，$\mathbf{0}\le\mathrm{H}(x)\le\overline{x}$；

2) $\mathrm{H}(x)$ 单调递增：$\forall x',x''\in[\mathbf{0},\overline{x}]$，若 $x'\le x''$，则 $\mathrm{H}(x')\le\mathrm{H}(x'')$。

证明： 有界性是显然的，下面证明单调递增性。

$\forall x',x''\in[\mathbf{0},\overline{x}]$，若 $x'\le x''$，根据 $M(x)$ 的定义，$M(x')\le M(x'')$，又因为 $e\ge\mathbf{0},\Pi\ge\mathbf{0}$，所以 $\Pi^{\mathrm{T}}x'+e\le\Pi^{\mathrm{T}}x''+e$，从而有

$$M(x')\left(\Pi^{\mathrm{T}}x'+e\right)\le M(x'')\left(\Pi^{\mathrm{T}}x''+e\right)$$

因此

$$\min\left\{\overline{x},M(x')\left(\Pi^{\mathrm{T}}x'+e\right)\right\}\le\min\left\{\overline{x},M(x'')\left(\Pi^{\mathrm{T}}x''+e\right)\right\}$$

即 $\mathrm{H}(x')\le\mathrm{H}(x'')$。

经典模型中的映射除了具有有界性和单调递增性，还具有凹性和非扩张性，但映射 $\mathrm{H}(x)$ 不再具有凹性和非扩张性，下面举反例进行说明。

例 1： $\Pi=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix},\overline{x}=\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix},e=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$

1) 不具有非扩张性

取 $x'=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix},x''=\overline{x}=\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}$，则 $M(x')=\begin{pmatrix}1&0\\0&\varphi\end{pmatrix},M(x'')=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$，带入计算可得

$$\mathrm{H}(x')=\begin{pmatrix}2\\\varphi\end{pmatrix},\ \mathrm{H}(x'')=\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}$$

从而有

$$\left\|\mathrm{H}(x')-\mathrm{H}(x'')\right\|=2-\varphi>\left\|x'-x''\right\|=1$$

与非扩张映射的定义矛盾。

2) 不具有凹性

取 $x'=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix},x''=\overline{x}=\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix},\lambda=\frac{1}{2}$，则有 $x^{\lambda}=\frac{1}{2}x'+\left(1-\frac{1}{2}\right)x''=\begin{pmatrix}1.5\\1.5\end{pmatrix}$，且

$$M(x')=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & \varphi\end{pmatrix},\ M(x^{\lambda})=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & \varphi\end{pmatrix},\ M(x'')=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

将其带入计算可得

$$\mathrm{H}(x')=\begin{pmatrix}2\\ \varphi\end{pmatrix},\ \mathrm{H}(x^{\lambda})=\begin{pmatrix}2\\ 1.5\varphi\end{pmatrix},\ \mathrm{H}(x'')=\begin{pmatrix}2\\ 2\end{pmatrix}$$

从而有

$$\begin{pmatrix}2\\ 1.5\varphi\end{pmatrix}=\mathrm{H}(x^{\lambda})\le\frac{1}{2}\mathrm{H}(x')+\left(1-\frac{1}{2}\right)\mathrm{H}(x'')=\begin{pmatrix}2\\ 1+0.5\varphi\end{pmatrix}$$

与凹性定义矛盾。

4. 扩展模型下清算向量的存在性与唯一性

4.1. 存在性

定理 1: 金融系统$(\prod,\bar{x},e,\varphi)$存在一个最大清算向量$x^g$和一个最小清算向量$x^l$，且对任意清算向量$x^*$，均有$x^*\in\left[x^l,x^g\right]$。

证明: 引进迭代序列$\{x^n\}$，$x^{n+1}=\mathrm{H}(x^n)$，$x^0=\bar{x}$或$\mathbf{0}$，以$x^0=\bar{x}$为例，由于$\mathrm{H}(x)\le\mathrm{H}(\bar{x})$，因此$x^1\le x^0$，由$\mathrm{H}(x)$单调递增，可得

$$x^0\ge x^1\ge x^2\ge\cdots\ge x^n\ge\cdots$$

由$\mathbf{0}$为此序列的下界，因此存在x^g使得$x^n\to x^g\ (n\to+\infty)$，由于$\mathrm{H}(x)$连续，对等式$x^{n+1}=\mathrm{H}(x^n)$两边同时取极限可得，$x^g=\mathrm{H}(x^g)$。

取$x^0=\mathbf{0}$同理可得，$x^l=\mathrm{H}(x^l)$。对任意清算向量x^*，$x^*=\mathrm{H}(x^*)$，因为$\mathbf{0}\le x^*\le\bar{x}$，同时带入映射$\mathrm{H}(x)$进行迭代并取极限可得，$x^l\le x^*\le x^g$。

由上述定理可知，清算向量并不一定唯一，最终该选取哪一个清算向量进行清算是需要进一步考虑的问题。下面的结论告诉我们，在一定条件下，对任意的清算向量，系统中每个节点的最终净值相等。

引理 2: 对任意清算向量x^*，$M(x^*)(\Pi^{\mathrm{T}}x^*+e)-x^*=\left[M(x^*)(\Pi^{\mathrm{T}}x^*+e)-\bar{x}\right]^+$。

证明: 对任意$i\in N$，

1) 当$x_i^*=\bar{x}_i$时，

$$\left[M(x^*)(\Pi^{\mathrm{T}}x^*+e)-x^*\right]_i=\left[(\Pi^{\mathrm{T}}x^*+e)-\bar{x}\right]_i\ge 0$$

从而有

$$\left[M(x^*)(\Pi^{\mathrm{T}}x^*+e)-x^*\right]_i=\left[M(x^*)(\Pi^{\mathrm{T}}x^*+e)-\bar{x}\right]_i^+$$

2) 当$x_i^*<\bar{x}_i$时，$x_i^*=\varphi\cdot(\Pi^{\mathrm{T}}x^*+e)_i$，于是

$$\left[M(x^*)(\Pi^{\mathrm{T}}x^*+e)-x^*\right]_i=\varphi\cdot(\Pi^{\mathrm{T}}x^*+e)-x_i^*=0$$

另一方面，

$$\left[M(x^*)(\Pi^{\mathrm{T}}x^*+e)-\bar{x}\right]_i=x_i^*-\bar{x}_i<0$$

从而有

$$\left[M(x^*)(\Pi^{\mathrm{T}}x^*+e)-x^*\right]_i=\left[M(x^*)(\Pi^{\mathrm{T}}x^*+e)-\bar{x}\right]_i^+=0$$

由 i 的任意性可得结论。

对任意 $x\in[\mathbf{0},\bar{x}]$，令 $v_i(x;\Pi,e,\varphi)$ 表示以 x 为结算向量下的节点 i 的净值。

定理 2：若 $M(x^g)=M(x^l)$，则对任意清算向量 x^*，$v(x^*;\Pi,e,\varphi)=\left[M(x^*)(\Pi^{\mathrm{T}}x^*+e)-\bar{x}\right]^+$ 的值不变。

证明：$v(x)=\left[M(x)(\Pi^{\mathrm{T}}x+e)-\bar{x}\right]^+$ 关于 x 单调递增，所以 $v(x^l)\le v(x^g)$，下面证明 $v(x^g)=v(x^l)$，如若不然，则必然存在 $i_0\in N$，使得 $v_{i_0}(x^l)<v_{i_0}(x^g)$，从而

$$\sum_{i=1}^{n}\left[v_i(x^g)-v_i(x^l)\right]>0$$

另一方面，由引理 2 有

$$v(x)=M(x)(\Pi^{\mathrm{T}}x+e)-x$$

因此

$$\begin{aligned}
v(x^g)-v(x^l)&=M(x^g)(\Pi^{\mathrm{T}}x^g+e)-x^g-\left[M(x^l)(\Pi^{\mathrm{T}}x^l+e)-x^l\right]\\
&=M(x^g)\Pi^{\mathrm{T}}(x^g-x^l)-(x^g-x^l)\\
&\le\Pi^{\mathrm{T}}(x^g-x^l)-(x^g-x^l)\\
&=(\Pi^{\mathrm{T}}-\mathrm{E})(x^g-x^l)
\end{aligned}$$

不等式两边同时乘以向量 $\mathbf{1}=(1,1,\cdots,1)$ 可得

$$\sum_{i=1}^{n}\left[v_i(x^g)-v_i(x^l)\right]\le 0$$

矛盾，所以假设不成立，即有 $v(x^g)=v(x^l)$，又因为 $x^l\le x^*\le x^g$，所以 $v(x^l)\le v(x^*)\le v(x^g)$，从而有 $v(x^l)=v(x^*)=v(x^g)$，即对任意 x^*，$v(x^*)$ 的值不变。

4.2. 唯一性

定义 2：金融系统 $(\prod,\bar{x},e,\varphi)$ 称为正规的金融系统，若它满足下面两个条件：

1) 对任意的 $i,j\in N$，存在 $i_1,i_2,\cdots,i_{m-1}\in N$，满足 $\pi_{k,k+1}>0,k=0,1,\cdots,m-1$，其中 $i_0=i,i_m=j$；

2) $\sum_{i=1}^{n}e_i>\dfrac{1-\varphi}{\varphi}\sum_{i=1}^{n}\bar{x}_i$

这里所定义的正规性与[3]中的不一样，此处的正规性要求更高。

定理 3：金融系统 $(\prod,\bar{x},e,\varphi)$ 是正规的，且 $M(x^g)=M(x^l)$，则该系统的清算向量唯一。

证明：由于 $x^*\in\left[x^l,x^g\right]$，因此证明清算向量唯一只需证明 $x^l=x^g$。

若 $x^l\ne x^g$，则至少存在 $i_0\in N$，使得 $x_{i_0}^l<x_{i_0}^g$，下面证明若是如此，必会对所有 $i\in N$，均有 $x_i^l<x_i^g$。

如若不然，则存在 $j\in N$，使得 $x_j^l=x_j^g$，由正规性定义可知，存在 $i_1,i_2,\cdots,i_{m-1}\in N$，满足 $\pi_{k,k+1}>0,k=0,1,\cdots,m-1$，其中 $i_0=i_0,i_m=j$，由定理 2 知

$$M(x^g)(\Pi^{\mathrm{T}}x^g+e)-x^g=M(x^l)(\Pi^{\mathrm{T}}x^l+e)-x^l,$$

从而

$$x^g-x^l=M(x^g)(\Pi^{\mathrm{T}}x^g+e)-M(x^l)(\Pi^{\mathrm{T}}x^l+e)\ge M(x^l)\Pi^{\mathrm{T}}(x^g-x^l),$$

将第 i_1 个分量展开得

$$x_{i_1}^g - x_{i_1}^l \ge \varphi \sum_{k=1}^n \pi_{ki_1}\left(x_k^g - x_k^l\right) = \varphi \pi_{i_0 i_1}\left(x_{i_0}^g - x_{i_0}^l\right) + \varphi \sum_{k \ne i_0} \pi_{ki_1}\left(x_k^g - x_k^l\right),$$

因为 $\pi_{i_0 i_1} > 0$，$x_{i_0}^g - x_{i_0}^l > 0$，所以 $x_{i_1}^g - x_{i_1}^l > 0$，即 $x_{i_1}^g > x_{i_1}^l$，以此类推可得 $x_j^g > x_j^l$，矛盾，所以在存在 $i_0 \in N$ 使得 $x_{i_0}^l < x_{i_0}^g$ 时，必会对所有 $i \in N$，均有 $x_i^l < x_i^g$，即 $x^l < x^g$，又因为 $x^g \le \overline{x}$，所以 $x^l < \overline{x}$，从而有

$$\varphi\left(\Pi^{\mathrm{T}} x^l + e\right) - x^l = \mathbf{0}$$

整理变形得

$$\varphi e = \left(\mathrm{E} - \varphi \Pi^{\mathrm{T}}\right) x^l$$

等式两边同时乘以向量 $\mathbf{1} = (1,1,\cdots,1)$ 可得

$$\sum_{i=1}^n e_i = \frac{1-\varphi}{\varphi} \sum_{i=1}^n x_i^l$$

由系统正规性可得矛盾，因此 $x^l = x^g$，清算向量唯一。

5. 系统净值的变化

清算之初，金融系统的净值为

$$\sum_{i=1}^n v_i\left(\overline{x}\right) = \mathbf{1} \cdot \left(\Pi^{\mathrm{T}} \overline{x} + e - \overline{x}\right) = \sum_{i=1}^n e_i$$

在 Eisenberg and Noe 的模型下，清算之后系统的净值为

$$\sum_{i=1}^n v_i\left(x^*\right) = \mathbf{1} \cdot \left(\Pi^{\mathrm{T}} x^* + e - x^*\right) = \sum_{i=1}^n e_i$$

可以发现，经典模型下，金融系统的净值在整个清算过程中没有任何损耗。如果 $\sum_{i=1}^n e_i > 0$，那么在这个模型下，最终不可能所有的银行都破产，总会有一家银行生存。

在本文的扩展模型下，清算之后系统的净值为

$$\sum_{i=1}^n v_i\left(x^*\right) = \mathbf{1} \cdot \left[M\left(x^*\right)\left(\Pi^{\mathrm{T}} x^* + e - x^*\right)\right]$$

$$0 \le \sum_{i=1}^n v_i\left(x^*\right) \le \sum_{i=1}^n e_i$$

一旦有一家银行破产，就会有 $\sum_{i=1}^n v_i\left(x^*\right) < \sum_{i=1}^n e_i$，即系统净值会有所损耗，破产银行越多，层叠违约程度越大，系统净值的损耗就会越多。

下面举一个简单的例子说明两种模型下的违约传染与系统净值变化问题。

例 2：一个由五个节点组成的金融系统，每个节点的资产负债表如表 1 所示。

节点间的债务关系矩阵为

$$L = \left(l_{ij}\right)_{n \times n} = \begin{pmatrix} 0 & 30 & 30 & 20 & 20 \\ 16 & 0 & 24 & 40 & 20 \\ 18 & 2 & 0 & 15 & 15 \\ 15 & 45 & 36 & 0 & 54 \\ 20 & 10 & 20 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

由已知条件，我们可以整理得到

$$e = \begin{pmatrix} 56 & 8 & 10 & 80 & 6 \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}, \quad \overline{x} = \begin{pmatrix} 100 & 100 & 50 & 150 & 50 \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$$

以及债务分配比例矩阵

Table 1. Balance sheets
表 1. 资产负债表

项目	节点 1	节点 2	节点 3	节点 4	节点 5
系统外部资产	56	8	10	80	6
系统内部资产	69	87	110	75	109
总资产	125	95	120	155	115
系统外部负债	0	0	0	0	0
系统内部负债	100	100	50	150	50
总负债	100	100	50	150	50

$$\Pi=\left(\pi_{ij}\right)_{n\times n}=\begin{pmatrix} 0 & 3/10 & 3/10 & 1/5 & 1/5 \\ 4/25 & 0 & 6/25 & 2/5 & 1/5 \\ 9/25 & 1/25 & 0 & 3/10 & 3/10 \\ 1/10 & 3/10 & 6/25 & 0 & 9/25 \\ 2/5 & 1/5 & 2/5 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

通过观察资产负债表可知，节点 2 资不抵债，需要进行清算，在不考虑破产清算费用的情形下，我们将数据带入经典模型进行编程计算，可得清算向量

$$x^{*}=\begin{pmatrix}100 & 95 & 50 & 150 & 50\end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$$

从中可以知道，在不考虑破产清算费用下，节点 2 的违约并没有造成系统的层叠违约，最终只有节点 2 破产，整个系统的净值没有损耗。

在考虑破产清算费用的情形下，我们将数据带入本文提出的扩展模型进行编程计算，取 $\varphi=0.9$，可得清算向量

$$x^{*,\varphi}=\begin{pmatrix}100 & 80.7986 & 50 & 132.5875 & 50\end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$$

结果告诉我们，考虑了破产清算费用，节点 2 的违约会引起节点 4 的违约，清算之初的系统净值为 160，清算后的系统净值变为

$$\sum_{i=1}^{n}v_i\left(x^{*,\varphi}\right)=\mathbf{1}\cdot\left[M\left(x^{*,\varphi}\right)\left(\Pi^{\mathrm{T}}x^{*,\varphi}+e-x^{*,\varphi}\right)\right]=136.2904$$

整个系统的净值损耗了 23.7096。

6. 结论与展望

本文通过考虑破产清算费用，扩展了 Eisenberg and Noe 所提出的金融系统的系统风险模型。在扩展模型下，系统清算向量的存在性结论可以简单地由经典模型下得出的存在性条件推导得到，但唯一性则需要更高要求的系统正规性支撑才行。通过对两种模型下金融系统的净值变化问题的讨论，我们发现，在经典模型下的整个清算过程中，金融系统的净值保持不变，在系统外部资产大于 0 的情形下，最终至少有一家机构不会破产，但在扩展模型的清算下，系统的净值会有所损耗，并且损耗的多少与层叠违约的程度相关，所以本文所提出的扩展模型与经典模型相比较更具有金融实际意义。

经典模型和本文的扩展模型属于静态模型，算法是瞬时完成的，破产机构在整个清算过程中是不被剔除掉的，这个比较适合用来解决大规模系统风险的问题，并且良好的诠释了复杂债务关联下层叠违约所导致的系统风险的形成过程，具有节省时间、节省成本的优点。在模型的实际应用下，通过求出清算

向量$\left(x^{*}\right)$，我们可以从中知道破产的机构$\left(D\left(x^{*}\right)\right)$，系统风险造成的损失，以及破产机构的违约损失率$\left(1-x_{i}^{*}/\bar{x}_{i}\right)$。

本文的模型有两个前提假设，一个是金融系统的每个节点都没有系统外部负债，另一个是每个节点的破产调动因子φ_{i}都是相同的，可根据实际情况对这两点假设进行调整，还可以考虑偿债的优先级和各种结算方式等实际情况，从理论上优化模型，使其更符合实际要求。

基金项目

基于云计算的国家金融数据分析与信息服务关键技术与应用(2012BAH17B03)。

参考文献 (References)

[1] Elimam, A., Girgis, M. and Kotob, S. (1996) The Use of Linear Programming in Disentangling the Bankruptcy of Al-Manakh Stock Market Crash. *OR PRACTICE*, **44**, 665-676.

[2] Elimam, A., Girgis, M. and Kotob, S. (1997) A Solution to Post Crash Debt Entanglements in Kuwait's Al-Manakh Stock Market. *Interfaces*, **27**, 89-106.

[3] Eisenberg, L. and Noe, T. (2001) Systemic Risk in Financial Systems. *Management Science*, **47**, 236-249.

[4] Glasserman, P. and Young, H.P. (2014) How Likely Is Contagion in Financial Networks? *Journal of Banking and Finance*, Forthcoming.

[5] Rogers, L.C.G. and Veraart, L.A.M. (2013) Failure and Rescue in an Interbank Network. *Management Science*, **59**, 882-898.

[6] Minca, A. and Sulem, A. (2014) Optimal Control of Interbank Contagion under Complete Information. *Statistics and Risk Modeling*, **31**, 2-29.

[7] Elsinger, H., Lehar, A. and Summer, M. (2006a) Risk Assessment for Banking Systems. *Management Science*, **52**, 1301-1314.

[8] Elsinger, H., Lehar, A. and Summer, M. (2006b) Systemically Important Banks: An Analysis for the European Banking System. *International Economics and Economic Policy*, **3**, 73-89.

[9] Upper, C. and Worms, A. (2004) Estimating Bilateral Exposures in the German Interbank Market: Is There a Danger of Contagion? *European Economic Review*, **48**, 827-849.

[10] Upper, C. (2011) Simulation Methods to Assess the Danger of Contagion in Interbank Markets. *Journal of Financial Stability*, **7**, 111-125.

[11] 范小云, 王道平, 刘澜飚 (2011) 规模、关联性与中国系统重要性银行的衡量. 南开大学国际金融研究中心工作论文.

[12] 马君潞, 范小云, 曹元涛 (2007) 中国银行间市场双边传染的风险估测及其系统性特征分析. *经济研究*, **1**, 68-78.