Pure Mathematics 理论数学, 2023, 13(9), 2516-2519
Published Online September 2023 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2023.139257

Hans汉斯

Eisenstein判别法的一个新的推广

王　冰[1]，朱　林[2*]

[1]上海立信会计金融学院统计与数学学院，上海
[2]上海理工大学理学院，上海

收稿日期：2023年7月28日；录用日期：2023年8月30日；发布日期：2023年9月8日

摘　要

本文给出了Eisenstein判别法的一个新的推广，得到了整系数多项式的不可约因式的次数估计。作为应用，若偶数次整系数多项式的系数满足某些整除关系，则该多项式在有理数域上不可约当且仅当它没有有理根。

关键词

整系数多项式，不可约多项式，有理根，不可约判别法

A New Generalization of the Eisenstein Irreducibility Criterion

Bing Wang[1], Lin Zhu[2*]

[1]School of Statistics and Mathematics, Shanghai Lixin University of Accounting and Finance, Shanghai
[2]College of Science, University of Shanghai for Science and Technology, Shanghai

Received: Jul. 28th, 2023; accepted: Aug. 30th, 2023; published: Sep. 8th, 2023

Abstract

In this paper, a new generalization of the Eisenstein irreducibility criterion is given and an estimate of the degree of an irreducible factor of a polynomial with integer coefficients is obtained. As an application, if the coefficients of a polynomial with integer coefficients of even degree satisfy some divisibility conditions, then the polynomial is irreducible over the rational number field if and only if the polynomial does not have rational roots.

*通讯作者。

文章引用: 王冰, 朱林. Eisenstein 判别法的一个新的推广[J]. 理论数学, 2023, 13(9): 2516-2519.
DOI: 10.12677/pm.2023.139257

Keywords

Integer Coefficient Polynomial, Irreducible Polynomial, Rational Root, Irreducibility Criterion

1. 引言

Eisenstein 不可约判别法是一种用于判断多项式是否可约的方法。这个方法以 19 世纪德国数学家 Eisenstein 命名。Eisenstein 不可约判别法的基本含义是，如果一个多项式的系数都是整数，且存在一个素数 p，使得这些系数中除了最高次项系数外，其余各项系数都是 p 的倍数，而常数项不是 p^2 的倍数，那么这个多项式在有理数域上就是不可约的。Eisenstein 不可约判别法在代数学中有着广泛的应用。在高等代数中，Eisenstein 判别法是整系数多项式的不可约性判定中最重要的判别法之一(参见[1] [2] [3]等)，在抽象代数中，Eisenstein 判别法也有在更一般的唯一分解整环上的表述形式(参见[2])。有许多 Eisenstein 判别法的推广及应用(参见例如[1] [2] [4] [5]等)。本文中用 $\mathbb{Q}$ 代表有理数域，用 $\mathbb{Q}[x]$ 表示有理系数一元多项式环。Eisenstein 判别法的陈述如下：

定理 1 **[1]** [2] [3]给定 n 次整系数多项式

$$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1\mathrm{x}+a_0,\ n\geq 1.$$

若存在素数 p，使得 $p\,|\,a_i\,(i=0,1,\cdots,n-1)$，但 $p\nmid a_n$，$p^2\nmid a_0$，则 $f(x)$ 在 $\mathbb{Q}[x]$ 中不可约。

Eisenstein 判别法有如下熟知的推广形式，这一结论给出了多项式的不可约因式的次数估计(参见[1])。

定理 2 [1]给定 n 次整系数多项式

$$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1\mathrm{x}+a_0,n\geq 1.$$

若存在素数 p 及正整数 k，使得 $p\,|\,a_i\,(i=0,1,\cdots,k-1)$，但 $p\nmid a_k$，$p^2\nmid a_0$，则 $f(x)$ 在 $\mathbb{Q}[x]$ 中有次数不小于 k 的不可约因式。

注 1 当 $k=n$ 时，定理 2 可以立即推出 Eisenstein 判别法。因此，定理 2 可以视为 Eisenstein 判别法的推广。

当素数 p 的平方可以整除整系数多项式的常数项时，对奇数次多项式有进一步的判别法(参见[1])。

定理 3 [1]给定 $2n+1$ 次整系数多项式

$$f(x)=a_{2n+1}x^{2n+1}+a_{2n}x^{2n}+\cdots+a_1x+a_0,\ n\geq 1.$$

若存在素数 p，使得 $p\,|\,a_i\,(i=n+1,\cdots,2n)$，$p^2\,|\,a_i\,(i=0,1,\cdots,n)$，但 $p\nmid a_{2n+1}$，$p^3\nmid a_0$，则 $f(x)$ 在 $\mathbb{Q}[x]$ 中不可约。

注 2 文献[5]中的定理 2 给出了 p^2 整除多项式常数项时的另一个不可约判别法：给定 n 次整系数多项式 $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$，若存在素数 p，使得 $p\nmid a_n$，$p\,|\,a_i\,(i=n-1,\cdots,n-k)$，其中 $k<\frac{n}{2}$，$p^2\,|\,a_i\,(i=n-k-1,\cdots,0)$，但 $p^3\nmid a_0$，则 $f(x)$ 在 $\mathbb{Q}[x]$ 中不可约。我们指出，当 n 为奇数时，容易看出该结论与定理 3 等价；但当 n 为偶数时，文献[5]中定理 2 的结论并不正确，$f(x)=x^4-p^2$ 就是一个反例。

本文按照定理 2 的思路，将定理 3 加以推广，并给出文献[5]中定理 2 的正确形式。

2. 主要定理

下面我们对素数 p 的平方可以整除常数项的整系数多项式，给出其不可约因式的次数估计。

定理 4 给定 n 次整系数多项式

$$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0,\ n\ge 1.$$

若存在素数 p 及正整数 k，使得 $p\mid a_i\left(i=k+1,\cdots,2k\right)$，$p^2\mid a_i\left(i=0,1,\cdots,k\right)$，但 $p\nmid a_{2k+1}$，$p^3\nmid a_0$，其中 $2k+1\le n$，则 $f(x)$ 在 $\mathbb{Q}[x]$ 中有次数不小于 $2k+1$ 的不可约因式。

证 若 $f(x)$ 不可约，则结论显然成立。若 $f(x)$ 可约，设 $f(x)$ 在 $\mathbb{Q}[x]$ 中的不可约因式分解形如 $f(x)=g_1(x)g_2(x)\cdots g_q(x)$。

情形 1 若存在(不妨设为) $g_1(x)$，使得 p^2 能整除 $g_1(x)$ 的常数项，则根据条件 p 不能整除 $\prod_{i=2}^{q}g_i(x)$ 的常数项。设

$$g_1(x)=b_lx^l+\cdots b_1x+b_0,\ \prod_{i=2}^{q}g_i(x)=c_mx^m+\cdots c_1x+c_0,$$

则 $p^2\mid b_0$，$p\nmid c_0$。由 $p\nmid a_{2k+1}$ 知，存在正整数 $r\le l$，使得对任意的 $0\le i\le r-1$，有 $p\mid b_i$，但 $p\nmid b_r$。由 $a_r=b_rc_0+\left(b_{r-1}c_1+\cdots b_1c_{r-1}+b_0c_r\right)$ 知，$p\nmid a_r$。同理，可以证明对任意的 $0\le i\le r-1$，有 $p\mid a_i$。根据假定条件和正整数 k 的唯一性知 $r=2k+1$，故存在不可约因式 $g_1(x)$，它的次数 $l\ge r=2k+1$。特别地，这个次数不小于 $2k+1$ 的不可约因式的常数项是 p^2 的倍数，其他不可约因式的常数项都不能被 p 整除。

情形 2 若存在(不妨设为) $g_1(x)$，$g_2(x)$，使得 p 恰好整除 $g_1(x)$ 和 $g_2(x)$ 的常数项，且 p 不能整除 $\prod_{i=3}^{q}g_i(x)$ 的常数项。设

$$g_1(x)=d_lx^l+\cdots d_1x+d_0,\ g_2(x)=e_mx^m+\cdots e_1x+e_0,$$

则 $p\mid d_0$，$p\mid e_0$。由 $p\nmid a_{2k+1}$ 知，存在正整数 $s\le l$ 和 $t\le m$，使得对任意的 $0\le i\le s-1$，有 $p\mid d_i$，但 $p\nmid d_s$；对任意的 $0\le j\le t-1$，有 $p\mid e_j$，但 $p\nmid e_t$。不妨设 $s\le t$。令

$$h(x)=\prod_{i=2}^{q}g_i(x)=e'_{m'}x^{m'}+\cdots e'_1x+e'_0.$$

分析 $h(x)$ 的各项系数，易知对任意的 $0\le j\le t-1$，有 $p\mid e'_j$，但 $p\nmid e'_t$。同样地，进一步分析 $f(x)=g_1(x)h(x)$ 的各项系数可知 $p\nmid a_{s+t}$，但对任意的 $0\le i\le s+t-1$，有 $p\mid a_i$。根据假定条件知 $s+t=2k+1$，从而 $s\le k<t$。又因为 $a_s=d_se'_0+\left(d_{s-1}e'_1+\cdots d_0e'_s\right)$，则 $p^2\nmid a_s$，此与假定条件矛盾。故情形 2 不可能出现。

综上所述，$f(x)$ 在 $\mathbb{Q}[x]$ 中有次数不小于 $2k+1$ 的不可约因式，证毕。

3. 应用

在定理 4 中，当 $n=2k+1$ 时即得定理 3。因此，定理 4 可以视为定理 3 的推广。对于偶数次多项式，我们有如下的不可约判别法，它可以视为文献[5]的定理 2 的修正。

定理 5 给定 $2m$ 次整系数多项式

$$f(x)=a_{2m}x^{2m}+a_{2m-1}x^{2m-1}+\cdots+a_1x+a_0,\ m\ge 2.$$

若存在素数 p，使得 $p\mid a_i\left(i=m,\cdots,2m-2\right)$，$p^2\mid a_i\left(i=0,1,\cdots,m-1\right)$，但 $p\nmid a_{2m-1}$，$p^3\nmid a_0$，则 $f(x)$

的有理根至多只有一个。当 $f(x)$ 有有理根时，它必形如 $\frac{a}{b}$ 的形式，其中 a，b 是互素的整数且 $p \nmid a$；当 $f(x)$ 没有有理根时，$f(x)$ 在 $\mathbb{Q}[x]$ 中不可约。

证 在定理 4 中，取 $n=2m$，$k=m-1$。由定理 4 知，$f(x)$ 有次数不小于 $2m-1$ 的不可约因式。故 $f(x)$ 至多有一个一次因式，即 $f(x)$ 至多只有一个有理根。当 $f(x)$ 有有理根时，根据定理 4 证明中的情形 1，$f(x)$ 的一次因式的常数项不能被 p 整除，即 $f(x)$ 的有理根必形如 $\frac{a}{b}$，其中 a，b 是互素的整数，且 $p \nmid a$。当 $f(x)$ 没有有理根时，即 $f(x)$ 没有一次因式，而 $f(x)$ 有次数不小于 $2m-1$ 的不可约因式，因此 $f(x)$ 在 $\mathbb{Q}[x]$ 中不可约，证毕。

注 3 若一个偶数次多项式 $f(x)$ 的各项系数满足定理 5 中的整除关系，则 $f(x)$ 的有理根有严格的限制，这可以使验证多项式有无有理根的过程更简单。

注 4 若一个偶数次多项式 $f(x)$ 的各项系数满足定理 5 中的整除关系，则 $f(x)$ 在 $\mathbb{Q}[x]$ 中不可约当且仅当 $f(x)$ 没有有理根。

例 1 设 $f(x)=x^4+x^3-2x^2-4$，因为 $f(x)$ 的首项系数是 1，所以 $f(x)$ 的有理根只能是整数，且 $f(x)$ 的整数根只可能为 ±1，±2 或 ±4 (参见[1] [3])。经检验，±1 不是 $f(x)$ 的根。由定理 5 知，±2 和 ±4 都不是 $f(x)$ 的根，从而 $f(x)$ 在 $\mathbb{Q}[x]$ 中不可约。

4. 结论

当素数 p 的平方整除整系数多项式的常数项时，本文给出了多项式的不可约因式的次数的估计，并对偶数次多项式给出了一个新的不可约判别法。这一判别法可以视为 Eisenstein 判别法的变种。当偶数次多项式的系数满足特定的整除关系时，该多项式在有理数域上不可约等价于它没有有理根，而且对多项式的有理根有更进一步地严格的限制，这使得验证多项式有无有理根更加简单。

传统的 Eisenstein 判别法处理的是素数 p 的平方不整除多项式常数项的情形，本文中给出的判别法处理的是素数 p 的立方不整除多项式常数项的情形，但是如果按照本文中的证明方法考虑更高次的整除条件是极其繁琐的。在这方面，有更一般的 Dumas 判别法(参见[6])可以处理任意次方的整除情形，但 Dumas 判别法并不涉及有理根的讨论，因此本文给出的判别法具有一定的意义和价值。

基金项目

感谢国家自然科学基金(批准号 11901390)，上海高校青年教师培养资助计划(“互联网+”背景下课程思政融入《高等数学》的路径研究)，“高地大”创新本科人才培养类项目——上海市级一流专业建设点项目(数学与应用数学)的支持。

参考文献

[1] 张贤科, 许甫华. 高等代数学[M]. 第 2 版. 北京: 清华大学出版社, 2004.

[2] 张贤科. 抽象代数[M]. 北京: 清华大学出版社, 2022.

[3] 谢启鸿, 姚慕生, 吴泉水. 高等代数学[M]. 第 4 版. 上海: 复旦大学出版社, 2022.

[4] 谭玉明. 唯一分解整环上多项式不可约的一个判别法[J]. 大学数学, 2004, 20(1): 89-91.

[5] 罗永超. Eisenstein 判别法一种新的推广及应用[J]. 数学的实践与认识, 2015, 45(19): 285-292.

[6] Prasolov, V.V. (2001) Polynomials. In Cohen, H., Ed., *Algorithms and Computation in Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin.