Pure Mathematics 理论数学, 2023, 13(9), 2648-2657
Published Online September 2023 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2023.139271

Hans汉斯

探究几类与定积分等式相关的证明问题

贾瑞玲，文生兰，孙铭娟

信息工程大学，河南 郑州

收稿日期：2023年8月6日；录用日期：2023年9月8日；发布日期：2023年9月15日

摘 要

定积分等式是微积分理论的重要组成部分，与微分等式相辅相成。在数学研究中，定积分等式被广泛应用于证明各种数学定理、推导各种数学关系，对于理解数学原理、解决实际问题以及推动科学发展都起着重要的作用。由于其解题理论涉及到微分与积分，且证明方法繁多，这给许多学生带来了学习困难。很多学者对这方面也进行了相关研究并取得了一定的成果。在前人研究的基础上，本文深入剖析与定积分等式相关的三个主要方面，并挖掘解决这些问题的一般方法与思路，同时也对相关问题进行了推广；旨在帮助学生更深入地理解积分理论。

关键词

积分等式，积分中值定理，零点问题，积分变限函数，坏点

Exploring Several Proof Problems Related to Definite Integral Equation

Ruiling Jia, Shenglan Wen, Mingjuan Sun

Information Engineering University, Zhengzhou Henan

Received: Aug. 6th, 2023; accepted: Sep. 8th, 2023; published: Sep. 15th, 2023

Abstract

Definite integral equation is an important part of calculus theory, which complements differential equation. In mathematical research, definite integral equation is widely used to prove various mathematical theorems and deduce various mathematical relations, which play an important role in understanding mathematical principles, solving practical problems and promoting scientific development. Due to the fact that its problem-solving theory involves differential and integral, and there are many proof methods, it brings learning difficulties to many students. Many scholars have also done relevant research in this field and achieved certain results. On the basis of previous research, this paper deeply analyzes three main aspects related to definite integral equation, digs

文章引用: 贾瑞玲, 文生兰, 孙铭娟. 探究几类与定积分等式相关的证明问题[J]. 理论数学, 2023, 13(9): 2648-2657.
DOI: 10.12677/pm.2023.139271

out the general methods and ideas to solve these problems, and popularizes the related problems at the same time. It aims to help students understand the integral theory more deeply.

Keywords

Integral Equation, Integral Mean Value Theorem, Zero Point Problem, Integral Variable Limit Function, Bad Point

1. 引言

积分等式在微积分中扮演着重要的角色，它将微分和积分联系在一起，是解决各种数学问题的关键。首先，积分等式是微积分的基础。微积分的核心思想是研究变化率和累积量的关系，而积分等式正是将这两个概念联系起来的桥梁。其次，积分等式的应用广泛。例如在物理学中积分等式可以用来求解与时间相关的物理量：速度、加速度等；在经济学中，积分等式可以用来计算与产量相关的经济指标，如总收益、总成本等。此外求解积分等式需要运用数学推理和逻辑思维，这有助于培养学生的抽象思维能力。同时，积分等式的应用需要将数学知识与实际问题相结合，这有助于培养学生解决问题的能力。故无论是在学术研究还是实际应用中，掌握积分等式都是至关重要的。

本文主要介绍几类积分等式证明的相关问题，事实上这些内容很早就引起了学者的关注。早在 1995 年，李振宇和章邦基[1]就研究了一元函数和多元函数的积分等式问题。赵亚林[2]主要讨论了重积分与定积分之间的转换、两类曲线积分与定积分之间的等式关系。李庆娟[3]和李源[4]等以解题方法为切入点，分别以例题解析的形式阐述了证明定积分等式的若干种方法与技巧；此外李庆娟[5]立足教学实际，还给出了四个重要结论的证明及应用实例。郑华盛[6]利用多项式插值理论，结合数值求积公式代数精度的概念，给出了一类含中介值定积分等式证明的编制和构造方法。而游雪肖和赵大方[7]则从积分限和积分次序入手，给出了一个积分等式的推广与应用。

虽然诸多学者从不同角度和方面对定积分等式进行了研究和探索，但其实这类题目类型多变，证明方法多：利用函数的单调性、连续函数的零点定理、罗尔定理、分部积分法、换元法、积分中值定理、微分中值定理、泰勒公式、洛必达法则、放缩技巧、挖洞法、重积分证明法。在其解题过程中，需要学生纵观全局，灵活运用微分和积分的相关知识。若对已知条件稍作变动，相应的解题方法也要随之改变，即牵一发而动全身。对于这个阶段的学生而言，他们储备的知识不够系统性、全面性，且没有把碎片化的知识内化成自身能力和素质的一部分。所以在面对这些题目时，常常毫无头绪，一筹莫展。但如果我们能从不同的角度和维度去剖析这些问题的结构特征，总能得到一些启示或规律。

本文以结构分析的视角带领学生进入分析问题的世界，用形式统一的方法揭示数学理论中隐藏的思想和方法。在例题的设计上，突出分析和总结的全过程，体现对能力培养的设计思想；希望学生从模仿开始，循序渐进地学会发现并分析问题、解决并提炼问题、领悟并升华数学思想。

安排如下：第二部分阐述本文所用到的基本理论。第三部分是核心，深入解析与定积分等式相关的三部分内容：连续函数的零点问题(介值问题)或导函数的零点问题、某些特殊结构的定积分向重积分的转化问题、定积分的极限问题；并挖掘了解决这类问题的一般方法与思路，还对相关问题进行了推广。第四部分对全文内容进行总结和概括。

2. 准备知识

定理 1 (积分中值定理)

设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，$g(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积，则存在 $\xi\in[a,b]$，使得

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x = f(\xi)\int_a^b g(x)\mathrm{d}x 。$$

根据定积分的性质和连续函数的性质，可得如下推广形式的积分中值定理。

定理 2 (推广形式的积分中值定理)

设 $f(x)$ 在 (a,b) 上连续且可积，则存在 $\xi\in(a,b)$，使得

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = f(\xi)(b-a) 。$$

分析 按照由简单到复杂、由特殊到一般的思路证明。关键是证明如下结论：

设 $f(x)$ 在 (a,b) 上连续且 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=0$，则存在 $\xi\in(a,b)$，使得 $f(\xi)=0$ 。

证明 情形 1 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=0$ 时，

1) 若 $f(x)$ 在 (a,b) 上不变号，不妨设 $f(x)\ge 0$，$x\in(a,b)$。取 $[x_1,x_2]\subset(a,b)$，则

$$0=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \ge \int_{x_1}^{x_2} f(x)\mathrm{d}x ,$$

对 $f(x)$ 在 $[x_1,x_2]$ 上使用积分中值定理，即存在 $\xi\in[x_1,x_2]\subset(a,b)$，使得

$$0\ge\int_{x_1}^{x_2} f(x)\mathrm{d}x = f(\xi)(x_2-x_1)\ge 0 。$$

因 $x_2-x_1>0$，故必有 $f(\xi)=0$ 。

2) 若 $f(x)$ 在 (a,b) 上变号，则至少存在两个不同的点 $x_3,x_4\in(a,b)$ 且 $x_3<x_4$，使得

$$f(x_3)f(x_4)<0 。$$

对 $f(x)$ 在 $[x_3,x_4]$ 上使用连续函数的介值定理，存在 $\xi\in[x_3,x_4]\subset(a,b)$，使得 $f(\xi)=0$ 。

情形 2 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\ne 0$ 时，构造函数 $h(x)=f(x)-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$，则 $h(x)$ 在 (a,b) 上连续且满足

$$\int_a^b h(x)\mathrm{d}x=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\int_a^b \mathrm{d}x=0 ,$$

利用情形 1 的结论，则存在 $\xi\in(a,b)$，使得 $h(\xi)=0$；即 $f(\xi)=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$，即

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = f(\xi)(b-a) 。$$

定理 3 (积分第二中值定理)

设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积，$g(x)$ 在 $[a,b]$ 上单调，则存在 $\xi\in[a,b]$，使得

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x = g(a)\int_a^{\xi} f(x)\mathrm{d}x + g(b)\int_{\xi}^b f(x)\mathrm{d}x 。$$

注 定理 1 和定理 3 不再详述，可参考[8] [9]。

3. 经典解析

3.1. 连续函数的零点问题(介值问题)或导函数的零点问题

这针对类问题，常见的证明方法有三种：第一：利用函数的单调性；第二：连续函数的零点定理(介

值定理)；第三：罗尔定理(可看成导函数的零点问题)。

例 1 设 $f(x),g(x)\in C[a,b]$，证明：存在 $\xi\in(a,b)$，使得

$$f(\xi)\int_{\xi}^{b}g(x)\mathrm{d}x=g(\xi)\int_{a}^{\xi}f(x)\mathrm{d}x。$$

结构分析 记 $h(x)=f(x)\int_{x}^{b}g(t)\mathrm{d}t-g(x)\int_{a}^{x}f(t)\mathrm{d}t$，形式上这是一个函数 $h(x)$ 的零点问题。根据已知条件，无法确定 $h(x)$ 的可导性，所以第一种方法不可行。若使用第二种方法，不易确定点 x_1,x_2，使得 $h(x_1)h(x_2)\le 0$ 成立。那么能否使用罗尔定理证明呢？若可以，则要构造一个函数 $H(x)$，满足 $H'(x)=h(x)$ 且 $H(x)$ 有两个等值点。

观察 $h(x)=f(x)\int_{x}^{b}g(t)\mathrm{d}t-g(x)\int_{a}^{x}f(t)\mathrm{d}t$ 的结构特点，注意到

$$f(x)=\left(\int_{a}^{x}f(t)\mathrm{d}t\right)',\quad -g(x)=\left(\int_{x}^{b}g(t)\mathrm{d}t\right)',$$

即 $h(x)=\left(\int_{a}^{x}f(t)\mathrm{d}t\right)'\int_{x}^{b}g(t)\mathrm{d}t+\left(\int_{x}^{b}g(t)\mathrm{d}t\right)'\int_{a}^{x}f(t)\mathrm{d}t$，结合两个乘积函数的求导法则，可构造函数 $H(x)=\int_{a}^{x}f(t)\mathrm{d}t\int_{x}^{b}g(t)\mathrm{d}t$ 满足上述要求。

证明 记 $H(x)=\int_{a}^{x}f(t)\mathrm{d}t\int_{x}^{b}g(t)\mathrm{d}t$，因 $f(x),g(x)\in C[a,b]$，故 $H(x)\in C^1[a,b]$ 且 $H'(x)=h(x)$。又 $H(a)=H(b)=0$，由罗尔定理，存在 $\xi\in(a,b)$，使得 $H'(\xi)=0$，即

$$f(\xi)\int_{\xi}^{b}g(x)\mathrm{d}x=g(\xi)\int_{a}^{\xi}f(x)\mathrm{d}x。$$

例 2 设 $f(x)\in C[0,\pi]$，$\int_{0}^{\pi}f(x)\mathrm{d}x=\int_{0}^{\pi}f(x)\cos x\mathrm{d}x=0$，证明：存在 $\xi_i\in(0,\pi)$，$i=1,2$，使得 $f(\xi_1)=f(\xi_2)=0$。

结构分析 思路 1 形式上这是一个函数 $f(x)$ 的零点问题，根据题目条件无法确定 $f(x)$ 的可导性，且不易找到 $f(x)$ 的三个等值点。那么能否应用罗尔定理证明呢？若可以，需将其视为导函数的零点问题呢。即要构造一个函数 $F(x)$，使得 $F'(x)=f(x)$ 且 $F(x)$ 有等值点。如何构造这样的函数呢？

利用变限积分理论，可构造函数 $F(x)=\int_{0}^{x}f(t)\mathrm{d}t$，则 $F'(x)=f(x)$。故我们可将 $f(x)$ 的零点问题视为 $F(x)$ 的导函数的零点问题。

为此需要证明 $F(x)$ 至少有三个等值的点，由第一个定量条件 $\int_{0}^{\pi}f(x)\mathrm{d}x=0$ 很容易找到 $F(x)$ 的两个零点(两个等值点)：$x_1=0$，$x_2=\pi$。因此还必须找到其第三个零点，这必然借助于第二个定量条件 $\int_{0}^{\pi}f(x)\cos x\mathrm{d}x=0$ 来完成。因而必须建立 $F(x)$ 和第二个定量条件的关系，即整个证明的核心是通过第二个定量条件确定 $F(x)$ 的零点。

要从第二个定量条件中产生 $F(x)$，即将其导函数还原到原函数，涉及到函数和导函数的转换，故考虑用分部积分：

$$0=\int_{0}^{\pi}f(x)\cos x\mathrm{d}x=\int_{0}^{\pi}\cos x\mathrm{d}F(x)=F(x)\cos x\Big|_{0}^{\pi}+\int_{0}^{\pi}F(x)\sin x\mathrm{d}x,$$

即 $\int_{0}^{\pi}F(x)\sin x\mathrm{d}x=0$。对其使用推广形式的积分中值定理，则存在 $\eta\in(0,\pi)$，使得

$$F(\eta)\sin\eta\cdot\pi=0。$$

注意到当 $\eta\in(0,\pi)$ 时，$\sin\eta>0$。故必有 $F(\eta)=0$。

思路 2 反证法 假设原结论不成立，即 $f(x)$ 在 $(0,\pi)$ 只有一个零点或没有零点。

对 $\int_0^\pi f(x)\mathrm{d}x=0$ 使用推广形式的积分中值定理，则存在 $\xi_1\in(0,\pi)$，使得 $f(\xi_1)=0$。即排除 $f(x)$ 在 $(0,\pi)$ 内没有零点的情形。

证明 方法 1 使用罗尔定理证明。

令 $F(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$，则 $F(x)\in C^1[0,\pi]$ 且 $F(0)=F(\pi)=0$。再结合思路 1 中的分析可知，存在 $\eta\in(0,\pi)$ 时使得 $F(\eta)=0$。对 $F(x)$ 在 $[0,\eta]$，$[\eta,\pi]$ 上分别使用罗尔定理，则存在 $\xi_1\in(0,\eta)$，$\xi_2\in(\eta,\pi)$，使得 $F'(\xi_1)=0$，$F'(\xi_2)=0$。结合 $F'(x)=f(x)$，即 $f(\xi_1)=0$，$f(\xi_2)=0$。

方法 2 反证法 根据思路 2 的分析可知，必存在 $\xi_1\in(0,\pi)$，使得 $f(\xi_1)=0$。则

$$\int_0^\pi f(x)(\cos x-\cos\xi_1)\mathrm{d}x=\int_0^\pi f(x)\cos x\mathrm{d}x-\cos\xi_1\int_0^\pi f(x)\mathrm{d}x=0。$$

下面判断 $f(x)(\cos x-\cos\xi_1)$ 在 $(0,\pi)$ 内的符号。

若 $f(x)$ 在 $(0,\pi)$ 内有唯一的零点 ξ_1，因 $f(x)\in C[0,\pi]$ 且 $\int_0^\pi f(x)\mathrm{d}x=0$，则 $f(x)$ 在 $(0,\xi_1)$ 和 (ξ_1,π) 上异号。注意到当 $x\in(0,\xi_1)$ 时，$\cos x-\cos\xi_1>0$；当 $x\in(\xi_1,\pi)$ 时，$\cos x-\cos\xi_1<0$。则 $f(x)(\cos x-\cos\xi_1)$ 在 $(0,\pi)$ 内的不变号，因而必有

$$\int_0^\pi f(x)(\cos x-\cos\xi_1)\mathrm{d}x>0 \text{ 或 } \int_0^\pi f(x)(\cos x-\cos\xi_1)\mathrm{d}x<0。$$

这与 $\int_0^\pi f(x)(\cos x-\cos\xi_1)\mathrm{d}x=0$ 矛盾，故至少存在两个不同的点 $\xi_1,\xi_2\in(0,\pi)$，使得

$$f(\xi_1)=0,\quad f(\xi_2)=0。$$

科学抽象 总结上述两种证明方法的思路步骤：

1) 对于方法 1，首先利用变限积分理论，构造变限函数 $F(x)$，得到 $F(x)$ 有两个等值的点。其次对第二个定量条件 $\int_0^\pi f(x)\cos x\mathrm{d}x=0$ 分部积分得到 $\int_0^\pi F(x)\sin x\mathrm{d}x=0$，对其使用推广形式的积分中值定理，得到 $F(x)$ 的第三个等值点，最后使用罗尔定理证明即可。

2) 对于方法 2，使用反证法。首先对第一个定量条件 $\int_0^\pi f(x)\mathrm{d}x=0$ 使用推广形式的积分中值定理得到 $f(x)$ 在 $(0,\pi)$ 内必存在零点。其次结合 $f(x)$ 的性质和第二个定量条件，排除 $f(x)$ 在 $(0,\pi)$ 内只有一个零点的情况。

据此可给出上述题型的一般形式：

设 $f(x)\in C[a,b]$，$g'(x)\in C[a,b]$ 且 $g'(x)$ 在 (a,b) 内没有零点，若

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x=0，$$

证明：存在 $\xi_i\in(a,b)$，$i=1,2$，使得 $f(\xi_1)=f(\xi_2)=0$。

注 请读者试着自主完成证明。

3.2. 某些特殊结构的定积分向重积分的转化问题

例 3 (2016 年第七届全国大学生数学(非数学专业)竞赛决赛第三题)设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，证明：$2\int_a^b f(x)\left(\int_x^b f(t)\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}x=\left(\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right)^2$。

结构分析 思路 1 注意到关系式 $\left(\int_x^b f(t)\mathrm{d}t\right)'=-f(x)$，利用导数与原函数之间的关系，想到牛顿－

莱布尼茨公式。

思路 2 二重积分的计算是将其化为两个定积分计算，利用逆向思维，两个定积分的乘积也可转化为二重积分，故这里利用二重积分的相关理论证明。

证明 方法 1 牛顿－莱布尼茨公式

因 $f(x)\in C[a,b]$，故 $f(x)\in R[a,b]$，令 $F(x)=\int_x^b f(t)\mathrm{d}t$，则 $F'(x)=-f(x)$ 且 $F(b)=0$。此时

$$2\int_a^b f(x)\left(\int_x^b f(t)\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}x=2\int_a^b f(x)F(x)\mathrm{d}x=-2\int_a^b F(x)F'(x)\mathrm{d}x$$

$$=-F^2(x)\Big|_a^b=F^2(a)-F^2(b)=\left(\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right)^2$$

方法 2 记 $D=[a,b]\times[a,b]=D_1+D_2$，其中

$$D_1=\{(x,y)|a\le x\le b,x\le y\le b\},\quad D_2=\{(x,y)|a\le x\le b,a\le y\le x\},$$

则 $2\int_a^b f(x)\left(\int_x^b f(t)\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}x=2\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\int_x^b f(y)\mathrm{d}y=2\iint_{D_1} f(x)f(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，因 D_1,D_2 关于 $y=x$ 对称，则 x 和 y 互换得

$$2\iint_{D_1} f(x)f(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=2\iint_{D_2} f(x)f(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

即 $2\int_a^b f(x)\left(\int_x^b f(t)\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}x=\iint_D f(x)f(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\int_a^b f(y)\mathrm{d}y=\left(\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right)^2$。

3.3. 定积分的极限问题

3.3.1. 积分号下的极限问题，即 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)\mathrm{d}x$ 的计算或证明

思路 1 若函数列 $\{f_n(x)\}$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛且 $f_n(x)\in C[a,b]$，则由函数项级数的连续性定理知，求极限与求积分可以交换顺序，即 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)\mathrm{d}x=\int_a^b\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)\mathrm{d}x$，此时问题迎刃而解。

思路 2 无法确定或不易确定极限与积分换序的条件，不能将极限转移到积分号下进行，即 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)\mathrm{d}x\ne\int_a^b\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)\mathrm{d}x$，此时常借助积分中值定理、放缩方法、挖洞法等。这里着重介绍该类型的积分极限问题。

例 4 证明下列极限。

1) $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n x\mathrm{d}x=0$；2) $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos x)^{\frac{1}{n}}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}$。

结构分析 下面给出详细的分析思路。

1) 当 $0<x\le\frac{\pi}{2}$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty}\cos^n x=0$；当 $x=0$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty}\cos^n x=1$。即 $x=0$ 这一点破坏了函数 $\cos^n x$ 的性质(将 $x=0$ 视为“坏点”)。借鉴格林公式的挖洞法，这里也使用挖洞法(参考[8]中 P_{78} 例 11)，对任意充分小的 $\varepsilon>0$，将 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n x\mathrm{d}x$ 分成两部分：$\int_0^{\varepsilon}\cos^n x\mathrm{d}x$，$\int_{\varepsilon}^{\frac{\pi}{2}}\cos^n x\mathrm{d}x$。

对于 $\int_0^{\varepsilon}\cos^n x\mathrm{d}x$，被积函数有界，当 $\varepsilon\to 0$ 时，积分区间趋于 0。

对于 $\int_{\varepsilon}^{\frac{\pi}{2}}\cos^n x\mathrm{d}x$，积分区间有界，当 $x\in\left(\varepsilon,\frac{\pi}{2}\right)$ 时，$0\le\cos^n x\le\cos^n\varepsilon\to 0(n\to\infty)$。

2) 当 $0\le x<\frac{\pi}{2}$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty}(\cos x)^{\frac{1}{n}}=1$；当 $x=\frac{\pi}{2}$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty}(\cos x)^{\frac{1}{n}}=0$。即 $x=\frac{\pi}{2}$ 这一点破坏了函数 $(\cos x)^{\frac{1}{n}}$

的性质(将 $x=\frac{\pi}{2}$ 视为“坏点”)。类比 1)的处理方法，对任意充分小的 $\varepsilon>0$，将 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos x)^{\frac{1}{n}}\mathrm{d}x$ 分成两部分：$\int_0^{\frac{\pi}{2}-\varepsilon}(\cos x)^{\frac{1}{n}}\mathrm{d}x$，$\int_{\frac{\pi}{2}-\varepsilon}^{\frac{\pi}{2}}(\cos x)^{\frac{1}{n}}\mathrm{d}x$，则

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos x)^{\frac{1}{n}}\mathrm{d}x\ge\int_0^{\frac{\pi}{2}-\varepsilon}(\cos x)^{\frac{1}{n}}\mathrm{d}x。$$

对于 $\int_0^{\frac{\pi}{2}-\varepsilon}(\cos x)^{\frac{1}{n}}\mathrm{d}x$，被积函数有界，当 $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}-\varepsilon\right)$ 时，

$$(\cos x)^{\frac{1}{n}}\ge\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}-\varepsilon\right)\right)^{\frac{1}{n}}\to1(n\to\infty)。$$

证明 1) 易知 $0\le\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n x\mathrm{d}x$；另外，对 $\forall\varepsilon>0$，有 $\lim\limits_{n\to\infty}\cos^n\varepsilon=0$，即 $\exists N>0$，当 $n>N$ 时，有 $0<\cos^n\varepsilon<\varepsilon$，因而成立

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n x\mathrm{d}x=\int_0^{\varepsilon}\cos^n x\mathrm{d}x+\int_{\varepsilon}^{\frac{\pi}{2}}\cos^n x\mathrm{d}x\le\varepsilon+\left(\frac{\pi}{2}-\varepsilon\right)\cos^n\varepsilon<3\varepsilon。$$

故 $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n x\mathrm{d}x=0$。

2) 易知 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos x)^{\frac{1}{n}}\mathrm{d}x\le\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}$；另外，对 $\forall\varepsilon>0$，有

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos x)^{\frac{1}{n}}\mathrm{d}x\ge\int_0^{\frac{\pi}{2}-\varepsilon}(\cos x)^{\frac{1}{n}}\mathrm{d}x\ge\left(\frac{\pi}{2}-\varepsilon\right)\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}-\varepsilon\right)\right)^{\frac{1}{n}}$$

又 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{\pi}{2}-\varepsilon\right)\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}-\varepsilon\right)\right)^{\frac{1}{n}}=\frac{\pi}{2}-\varepsilon$，故对上述 $\varepsilon>0$，$\exists N>0$，当 $n>N$ 时，有

$$0<\frac{\pi}{2}-\varepsilon-\left(\frac{\pi}{2}-\varepsilon\right)\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}-\varepsilon\right)\right)^{\frac{1}{n}}<\varepsilon，$$

即 $\left(\frac{\pi}{2}-\varepsilon\right)\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}-\varepsilon\right)\right)^{\frac{1}{n}}>\frac{\pi}{2}-2\varepsilon$。从而当 $n>N$ 时，有 $\frac{\pi}{2}-2\varepsilon<\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos x)^{\frac{1}{n}}\mathrm{d}x\le\frac{\pi}{2}$，故

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos x)^{\frac{1}{n}}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}。$$

科学抽象 总结例 4 的解题思路：首先分析出被积函数在所给积分区间 $[a,b]$ 上的坏点 x_0，取任意充分小的 $\varepsilon>0$，挖去以 x_0 为圆心、ε 为半径的小区间：$(x_0-\varepsilon,x_0+\varepsilon)$、$(x_0,x_0+\varepsilon)$ 或 $(x_0-\varepsilon,x_0)$，根据 x_0 在 $[a,b]$ 中的位置，挖掉的小区间的形式略有不同。在剩下的没有坏点的区间上，被积函数具有较好的性质，可以很好地处理。在包含坏点的小区间里，用其它条件处理。这就是挖洞法的处理思想。

例 5 证明

1) $\lim\limits_{n\to+\infty}n\int_0^1 x^n f(x)\mathrm{d}x=f(1)$，其中 $f(x)\in C[0,1]$；

2) $\lim\limits_{t\to0^+}\int_0^1\frac{t}{t^2+x^2}f(x)\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}f(0)$，其中 $f(x)\in C[0,1]$。

分析 1) 因

$$\lim_{n\to+\infty} n\int_0^1 x^n f(1)\mathrm{d}x = f(1)\lim_{n\to+\infty} n\int_0^1 x^n\mathrm{d}x = f(1)\lim_{n\to+\infty}\frac{n}{n+1} = f(1),$$

故要证 $\lim_{n\to+\infty} n\int_0^1 x^n f(x)\mathrm{d}x = f(1)$，即证 $\lim_{n\to+\infty} n\int_0^1 x^n\left(f(x)-f(1)\right)\mathrm{d}x = 0$。

因 $f(x)\in C[0,1]$，故对 $\forall\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，当 $1-\delta<x\le 1$ 时，有

$$\left|f(x)-f(1)\right|<\varepsilon。$$

故将 $n\int_0^1 x^n\left(f(x)-f(1)\right)\mathrm{d}x$ 分成两部分：

$$I_1 = n\int_0^{1-\delta} x^n\left(f(x)-f(1)\right)\mathrm{d}x,\quad I_2 = n\int_{1-\delta}^1 x^n\left(f(x)-f(1)\right)\mathrm{d}x。$$

对于 I_1，利用 $f(x)-f(1)$ 的有界性，则可证明 $\lim_{n\to+\infty} I_1 = 0$。

对于 I_2，当 $1-\delta<x\le 1$ 时，有 $\left|f(x)-f(1)\right|<\varepsilon$，可证明 $\lim_{n\to+\infty} I_2 = 0$。

2) 因

$$\lim_{t\to0^+}\int_0^1\frac{t}{t^2+x^2}f(0)\mathrm{d}x = f(0)\lim_{t\to0^+}\arctan\frac{x}{t}\Big|_0^1 = f(0)\lim_{t\to0^+}\arctan\frac{1}{t} = \frac{\pi}{2}f(0),$$

故要证 $\lim_{t\to0^+}\int_0^1\frac{t}{t^2+x^2}f(x)\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}f(0)$，即证 $\lim_{t\to0^+}\int_0^1\frac{t}{t^2+x^2}\left(f(x)-f(0)\right)\mathrm{d}x = 0$。接下来的分析与 1)类似。

证明 例 5 的处理思想与例 4 类似，重点是挖掘“坏点”附近的性质，这里不再详述。

注 关于例 5 的补充说明：

1) 当 $f(x)\in C^1[0,1]$时，可用分部积分法证明(1)。设 $\left|f'(x)\right|\le M$，则

$$n\int_0^1 x^n f(x)\mathrm{d}x = \frac{n}{n+1}f(1)-\frac{n}{n+1}\int_0^1 x^{n+1}f'(x)\mathrm{d}x。$$

又

$$\frac{n}{n+1}\left|\int_0^1 x^{n+1}f'(x)\mathrm{d}x\right|\le\frac{Mn}{n+1}\int_0^1 x^{n+1}\mathrm{d}x = \frac{Mn}{(n+1)(n+2)}\to0\left(n\to\infty\right),$$

故 $\lim_{n\to+\infty} n\int_0^1 x^n f(x)\mathrm{d}x = f(1)$。

2) 将 2)的证明思想抽取出来，可以得到更简洁的证明方法。

易知

$$\int_0^1\frac{t}{t^2+x^2}f(x)\mathrm{d}x = \int_0^{\sqrt{t}}\frac{t}{t^2+x^2}f(x)\mathrm{d}x + \int_{\sqrt{t}}^1\frac{t}{t^2+x^2}f(x)\mathrm{d}x,$$

对于 $\int_0^{\sqrt{t}}\frac{t}{t^2+x^2}f(x)\mathrm{d}x$，由积分中值定理，存在 $\xi\in\left[0,\sqrt{t}\right]$，使得

$$\int_0^{\sqrt{t}}\frac{t}{t^2+x^2}f(x)\mathrm{d}x = f(\xi)\int_0^{\sqrt{t}}\frac{t}{t^2+x^2}\mathrm{d}x = f(\xi)\arctan\frac{1}{\sqrt{t}}\to\frac{\pi}{2}f(0)\left(t\to0^+\right)。$$

对于 $\int_{\sqrt{t}}^1\frac{t}{t^2+x^2}f(x)\mathrm{d}x$ 作估计，设 $\left|f(x)\right|\le M$，则

$$\left|\int_{\sqrt{t}}^1\frac{t}{t^2+x^2}f(x)\mathrm{d}x\right|\le M\left|\int_{\sqrt{t}}^1\frac{t}{t^2+x^2}\mathrm{d}x\right| = M\left(\arctan\frac{1}{t}-\arctan\frac{1}{\sqrt{t}}\right)\to0\left(t\to0^+\right)。$$

其实上述过程中 $\sqrt{t}$ 的可以用 $t^{\alpha}\left(0<\alpha<1\right)$ 代替。

3.3.2. 与变限积分有关的极限问题

这类问题常借助微分中值定理、积分中值定理、洛必达法则、放缩、积分的性质等计算或证明极限。

例 6 证明下列极限。

1) $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_n^{n+p}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x=0$；2) $\lim\limits_{x\to+\infty}\int_x^{x+1}\sin t^2\mathrm{d}t=0$；

证明 1) **方法 1** 从结构看，$\frac{1}{x}$ 在积分区间内都有极限且极限为 0，因此解决问题的关键是能否将其分离出来。从积分号下分离出因子的常用工具是积分中值定理，我们试着用中值定理进行处理，可以计算出结论。

利用积分第二中值定理，存在 $\xi\in\left[n,n+p\right]$，使得

$$\int_n^{n+p}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x=\frac{1}{n}\int_n^{\xi}\sin x\mathrm{d}x=\frac{1}{n}\left(\cos n-\cos\xi\right),$$

故 $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_n^{n+p}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x=0$。

方法 2 直接估计法，由于

$$\left|\int_n^{n+p}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x\right|\le\int_n^{n+p}\frac{1}{x}\mathrm{d}x=\ln\left(1+\frac{p}{n}\right)\to0\left(n\to\infty\right),$$

故 $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_n^{n+p}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x=0$。

2) 从结构看，与 1)积分结构类似，因此，处理的方法是如何将被积函数转化为 1)中的结构。

令 $u=t^2$，则 $\int_x^{x+1}\sin t^2\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\int_{x^2}^{(x+1)^2}\frac{\sin u}{\sqrt{u}}\mathrm{d}u$；由积分第二中值定理，存在 $\xi\in\left[x^2,\left(x+1\right)^2\right]$，使得

$$\frac{1}{2}\int_{x^2}^{(x+1)^2}\frac{\sin u}{\sqrt{u}}\mathrm{d}u=\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{x^2}}\int_{x^2}^{\xi}\sin u\mathrm{d}u=\frac{\cos x^2-\cos\xi}{2x}\to0\left(x\to+\infty\right),$$

故 $\lim\limits_{x\to+\infty}\int_x^{x+1}\sin t^2\mathrm{d}t=0$。

综上，证明定积分等式的难度和复杂性各不相同，取决于具体的函数和问题，对于简单的定积分等式，可以利用已知的积分公式、变量代换、分部积分、对称性、周期性、积分中值定理等技巧，将复杂的积分化简为简单的形式，从而证明积分等式。对于较复杂的积分等式或者特殊函数，需要结合问题的特点具体问题具体分析。在实际操作中可能会遇到复杂的情况。因此在解决积分等式问题时，一定要纵观全局，统筹分析，灵活应用微积分的知识。

4. 结束语

本文从结构分析的视角出发，对常见的三类定积分等式问题进行了详细的探究和解析，并对解题思路进行了高度概括、科学抽象，进而得到解题方法的一般规律。这些规律往往是在分析与解题过程中发现的，这就要求学习者要善于发现和总结，在学习过程中把知识内化成自己的能力，不断优化、迭代自身的整体认知体系和知识体系。

事实上，定积分理论博大精深，结构体系完善；而且内容中蕴含着丰富的数学思想和数学方法。这些数学方法和思想在培养学生的思维观和方法论等方面具有不可代替的重要作用。但定积分等式在数学中所具有的重要作用和意义不仅仅局限于此。其不仅有实际应用意义，也是深入理解微积分理论和解决各类问题的基础。

基金项目

强军新工科一般课题：强联[2022]2 号。

参考文献

[1] 李振宇, 章邦基. 关于积分等式命题的证明[J]. 工科数学, 1995(3): 276-280.
[2] 赵亚林. 积分等式证明的几种途径[J]. 青海大学学报(自然科学版), 2001(6): 60-61.
[3] 李庆娟. 定积分等式证明的方法之教学研究[J]. 数学学习与研究, 2021(13): 4-5.
[4] 李源, 黄辉, 郝小枝. 证明定积分等式的几种方法[J]. 高等函授学报(自然科学版), 2010(3): 23-25.
[5] 李庆娟. 几个重要定积分等式的推广及应用[J]. 理科爱好者, 2022(4): 9-12.
[6] 郑华盛. 一类含中介值定积分等式证明题的构造[J]. 数学的实践与认识, 2014, 44(19): 281-285.
[7] 游雪肖, 赵大方. 一个积分等式的推广与应用[J]. 高等数学研究, 2014, 17(1): 59-61.
[8] 崔国忠, 石金娥, 郭从洲. 数学分析(第二册) [M]. 北京: 科学出版社, 2018.
[9] 陈纪修, 於崇华, 金路. 数学分析(上册) [M]. 第二版. 北京: 高等教育出版社, 2004.