

# Eckhaus-Kundu方程的孤波解、周期波解及它们间的演化关系

张 雪\*, 郭玉立

上海理工大学理学院, 上海

收稿日期: 2022年11月26日; 录用日期: 2022年12月20日; 发布日期: 2022年12月27日

## 摘要

该文结合定性分析方法和基于首次积分的分析法, 探讨了Eckhaus-Kundu方程的孤波解、周期波解, 以及上述二种解关于Hamilton系统能量的演化。本文求出了所研方程全部的钟状和扭状孤波解, 并提出了新孤波解以及三类周期波解。通过本文的论述, 发现了所研方程为什么能产生孤波解和周期波解, 实质上是该方程解的振幅对应的Hamilton系统的能量变化起着关键的作用。

## 关键词

Eckhaus-Kundu方程, 孤立波解, 周期波解, Hamilton能量, 基于首次积分的分析法

# Solitary and Periodic Wave Solutions of the Eckhaus-Kundu Equation and Their Evolutionary Relations

Xue Zhang\*, Yuli Guo

College of Science, University of Shanghai for Science and Technology, Shanghai

Received: Nov. 26<sup>th</sup>, 2022; accepted: Dec. 20<sup>th</sup>, 2022; published: Dec. 27<sup>th</sup>, 2022

## Abstract

In the paper, the solitary and periodic wave solutions of the Eckhaus-Kundu equation and their evolutionary relation with Hamilton energy are studied via combining qualitative analysis with analytical method on the basis of first integral. All bell-shaped and kink-shaped solitary wave so-

\*通讯作者。

solutions of the equation are obtained, and the new solitary wave solutions and three kinds of periodic wave solutions are given. The discussion reveals that the energy of Hamilton system, which takes different values, is the crucial factor for the emergence of solitary and periodic wave solutions to the studied equation, and the Hamilton system is corresponded by the amplitudes of these solutions.

## Keywords

**Eckhaus-Kundu Equation, Solitary Wave Solution, Periodic Wave Solution, Hamilton Energy, Analytical Method Based on First Integral**

Copyright © 2022 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

## 1. 引言

Eckhaus-Kundu 方程

$$iu_t + u_{xx} - 2\sigma|u|^2 u + \delta^2 |u|^4 u + 2i\delta \left( |u|^2 \right)_x u = 0, \quad x \in R, \quad (1.1)$$

是由 A. Kundu, F. Calogero 和 W. Eckhaus 先后从不同的角度提出的[1] [2]。方程(1.1)中  $u$  是变量  $x$  和  $t$  的复函数,  $\sigma, \delta$  均为实常数, 第 4 项表示 non-Kerr 非线性效应, 最后一项表示 Raman 效应, 其反映了波的自频移。方程(1.1)可用来描述超短飞秒脉冲在光纤中的传播, 并且在非线性光学和非线性弱色散物质波中有着广泛的应用[3] [4] [5]。文献[6]研究了方程(1.1)的 Lax 对, 文献[7] [8]研究了方程(1.1)的孤子解, 文献[9] [10]研究了方程(1.1)的怪波解和高阶怪波解。最近的文献[11]研究了方程(1.1)的可积离散化, Tian 等人在双线性形式的基础上, 给出了 Eckhaus-Kundu 方程的  $x$ -离散、 $t$ -离散和一个完全离散的形式, 并且通过 Hirota 双线性方法成功地构造了所导出的离散方程的单孤子解和双孤子解。文献[12]利用 Lie 对称分析方法得到了方程(1.1)的双曲函数型孤子解; 文献[13]用  $\bar{\partial}$ -dressing 方法构造了方程(1.1)的 2-孤子解和 N-孤子解。

本文我们将运用平面动力系统理论与基于首次积分的分析方法, 进一步研究 Eckhaus-Kundu 方程(1.1)孤波解和周期波解的求解, 并研究这两种解间的演化关系。首先, 我们将对方程(1.1)的有界解做全面的定性分析, 给出方程(1.1)在不同参数条件下的全局相图, 进而导出方程(1.1)的孤波解、周期波解存在的条件、个数及大致性态方面的结果。接着, 我们将利用待定假设法求出全局相图中同宿轨和异宿轨所对应的方程(1.1)的钟状和扭状孤波解; 进一步运用基于首次积分的分析方法和椭圆函数的知识求出方程(1.1)的三类周期波解。文中通过讨论所研方程周期波解和孤波解关于其振幅对应的 Hamilton 能量  $h$  的演化关系, 给出了“所研方程为什么能产生孤波解和周期波解, 实质上是由其解的振幅对应的 Hamilton 系统的能量变化起着关键作用”这一有意义的结论。

## 2. Eckhaus-Kundu 方程有界行波解的定性分析

### 2.1. 方程(1.1)行波解对应的动力系统及其奇点分析

设方程(1.1)存在有界行波解有如下形式

$$u(x,t) = e^{-i\omega t} e^{i\psi(x-vt)} a(x-vt) = e^{-i\omega t} \hat{a}(\xi), \quad (2.1)$$

其中

$$\hat{a}(\xi) = \hat{a}(x-vt) = e^{i\psi(x-vt)} a(x-vt), \quad \xi = x-vt. \quad (2.2)$$

将(2.1)代入方程(1.1)，化简可得

$$-i\omega \hat{a}(\xi) - v \hat{a}'(\xi) = i \hat{a}''(\xi) + ig(a^2) \hat{a}(\xi) - 2\delta \left[ a^2 \hat{a}'(\xi) + a^2(\xi) (-i\psi'(\xi) \hat{a}(\xi) + a'(\xi) e^{i\psi(\xi)}) \right], \quad (2.3)$$

其中  $g(a^2) = -2\sigma a^2 + \delta^2 a^4$ ，由于

$$a^2(\xi) (-i\psi'(\xi) \hat{a}(\xi) + a'(\xi) e^{i\psi(\xi)}) = (a^2(\xi) \hat{a}(\xi))_x - 2a^2(\xi) \hat{a}_x(\xi), \quad (2.4)$$

$$\hat{a}_x = i\psi'(\xi) \hat{a}(\xi) + a'(\xi) e^{i\psi(\xi)}, \quad (2.5)$$

$$\hat{a}_{xx} = i\psi''(\xi) e^{i\psi(\xi)} a - (\psi')^2 e^{i\psi(\xi)} a + 2i\psi' e^{i\psi(\xi)} a' + e^{i\psi(\xi)} a'', \quad (2.6)$$

将(2.2)和(2.4)~(2.6)代入到(2.3)，整理可得

$$a'' + a \left( g(a^2) - (\psi')^2 + \omega + v\psi' \right) + i \left( \psi'' a + 2\psi' a' + 4\delta a^2 a' - v a' \right) = 0. \quad (2.7)$$

由(2.7)式的实部和虚部都等于 0，可得

$$a'' + a \left( g(a^2) - (\psi')^2 + \omega + v\psi' \right) = 0, \quad (2.8)$$

$$\psi'' a + 2\psi' a' + 4\delta a^2 a' - v a' = 0. \quad (2.9)$$

据(2.9)式可推知，若取

$$\psi'(\xi) = \frac{v}{2} - \delta a^2(\xi), \quad (2.10)$$

则(2.9)式恒为 0，且(2.8)式可化为

$$a''(\xi) - n \left( a^3(\xi) + q a(\xi) \right) = 0, \quad (2.11)$$

其中

$$n = 2\sigma, q = -\frac{4w+v^2}{8\sigma}. \quad (2.12)$$

由以上推导可知，在取  $\psi(\xi)$  满足(2.10)条件下，为求方程(1.1)型如(2.1)的行波解，可化为求解方程(2.11)；反之，若(2.1)的振幅  $a(\xi)$  是(2.11)的解，并取  $\psi(\xi)$  满足(2.10)，则由(2.1)给出的  $u(x,t)$  必是方程(1.1)的解。因此，为求方程(1.1)型如(2.1)的有界行波解，我们可以从方程(2.11)出发。为方便起见，本文在以下讨论中始终假定  $\psi(\xi)$  满足关系式(2.10)。另外，本文会在假设  $q < 0$  条件下得出相应结论，因为我们重点研究周期波解和孤波解之间的演化。

现在我们运用平面动力系统理论对方程(2.11)做定性分析。

令  $x = a(\xi)$  和  $y = a'(\xi)$ ，则(2.11)可转变为如下动力系统

$$\begin{cases} x' = y, \\ y' = n \cdot f(x), \end{cases} \quad (2.13)$$

其中函数

$$f(x) = x^3 + qx. \quad (2.14)$$

易知, 在  $q < 0$  假设下方程  $f(x) = x^3 + qx = 0$  有三个实根  $x_i (i=1,2,3)$ :  $x_1 = -\sqrt{-q}$ ,  $x_2 = 0$ ,  $x_3 = \sqrt{-q}$ ,  $x_1 < x_2 < x_3$ , 故系统(2.13)有三个有限远奇点  $P_i(x_i, 0) (i=1,2,3)$ , 记奇点  $P_i(x_i, 0)$  对应的 Jacobi 矩阵为

$$J(x_i, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ nf'(x_i) & 0 \end{pmatrix}, \quad i=1,2,3, \quad (2.15)$$

则 Jacobi 矩阵(2.15)的行列式为

$$\det(J(x_i, 0)) = -nf'(x_i) = -n(3x_i^2 + q). \quad (2.16)$$

系统(2.13)为 Hamilton 系统, 其首次积分为

$$H(x, y) = \frac{1}{2}y^2 - \frac{n}{4}(x^4 + 2qx^2) = h \quad (h \in \mathfrak{R}), \quad (2.17)$$

其中  $h$  为 Hamilton 能量, (2.17)式也是系统(2.13)的 Hamilton 能量函数。

根据(2.16)式可得

$$\det(J(x_1, 0)) = \det(J(x_3, 0)) = -nf'(x_1) = 2nq, \quad \det(J(x_2, 0)) = -nf'(x_2) = -nq.$$

故据动力系统的奇点判别方法易得: 当  $n > 0$  时, 奇点  $P_1$  和  $P_3$  是鞍点,  $P_2$  是中心点; 当  $n < 0$  时, 奇点  $P_1$  和  $P_3$  是中心点,  $P_2$  是鞍点。

关于系统(2.13)的无穷远奇点, 我们得知系统(2.13)只是在  $y$  轴有两个无穷远奇点  $A_1$  和  $A_2$ ,  $A_1$  在  $y$  轴正半轴上,  $A_2$  在  $y$  轴负半轴上。当  $n < 0$  时,  $A_i (i=1,2)$  附近分别有一个双曲型区域; 当  $n > 0$  时,  $A_i (i=1,2)$  附近分别有一个椭圆型区域, 并且, Poincaré 圆盘的圆周是轨线。

## 2.2. 系统(2.13)的全局相图及分析结论

根据以上的奇点分析, 在参数  $n$  的不同条件下, 能得出系统(2.13)的 2 个全局相图, 如下所示。

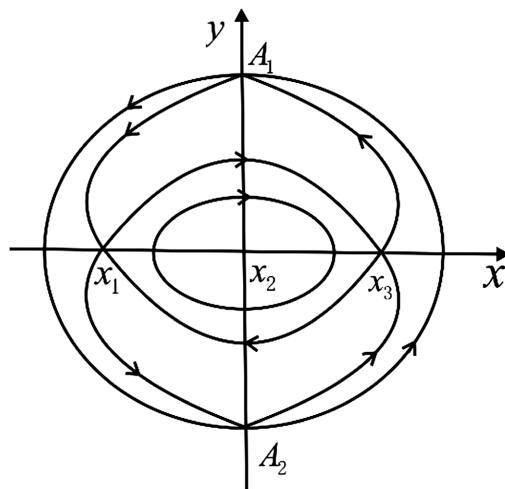
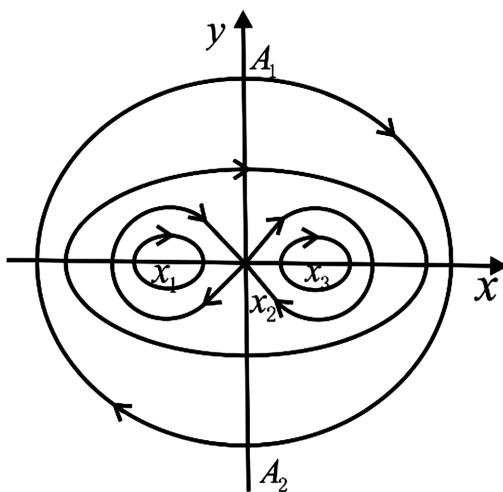


Figure 1.  $n > 0$

图 1.  $n > 0$

**Figure 2.**  $n < 0$ **图 2.**  $n < 0$ 

从上述全局相图可以看出系统(2.13)的轨线情况，可得如下命题。

**命题 2.1** 设  $q < 0$ 。

- 1) 在  $n > 0$  条件下，系统(2.13)有两个异宿轨  $L(P_1, P_3)$  和  $L(P_3, P_1)$ ，以及异宿轨包围着的一族闭轨(见图 1)；
- 2) 在  $n < 0$  条件下，系统(2.13)有两个同宿轨  $L_{\pm}(P_2, P_2)$ ，以及同宿轨包围着的两族闭轨和包围同宿轨的一族闭轨(见图 2)。

因为系统(2.13)的同宿轨对应于相应方程(2.11)的钟状解，鞍-鞍异宿轨对应于方程(2.11)的扭状解，闭轨线对应于方程(2.11)的周期解，而方程(2.11)的钟状解、扭状解和周期解又对应于方程(1.1)型如(2.1)的钟状孤波解、扭状孤波解和周期波解，所以从命题 2.1 可以有如下定理

**定理 2.1** 设  $q < 0$ 。

- 1) 在  $n > 0$  条件下，方程(1.1)有(2.1)形式的两个扭状孤波解和一族周期波解(对应图 1 中异宿轨  $L(P_1, P_3)$  和  $L(P_3, P_1)$  和含于异宿轨的一族闭轨)。
- 2) 在  $n < 0$  条件下，方程(1.1)有(2.1)形式的两个钟状孤波解、以及叁族周期波解(对应图 2 中同宿轨  $L_{\pm}(P_2, P_2)$  和同宿轨内外的叁族闭轨)。

### 3. Eckhaus-Kundu 方程孤立波解的求解

本节及后面的第四节我们将根据系统(2.13)的全局相图，分别求出方程(2.11)在各种参数条件下的钟状解、扭状解和周期解，进而得到方程(1.1)型如(2.1)的钟状孤波解、扭状孤波解和周期波解。

现在我们需要考虑方程(2.11)式有界解的求解，根据文献[14] [15]，我们利用假设待定法求解。

我们假设方程(2.11)有如下形式的解

$$a(\xi) = \frac{A \operatorname{sech}^2(\alpha(\xi - \xi_0))}{4 + B \operatorname{sech}^2(\alpha(\xi - \xi_0))} + D, \quad (3.1)$$

$$a(\xi) = A \cdot \tanh(\alpha(\xi - \xi_0)) + D, \quad (3.2)$$

并且  $A, B, D, \alpha$  是待定系数，将其代入方程(2.11)，可得命题

**命题 3.1** 设  $q < 0$ ，

1) 在  $n > 0$  条件下, 方程(2.11)有如下扭状解

$$a_{S1}^{\pm}(\xi) = \pm\sqrt{-q} \tanh\left(\sqrt{-\frac{nq}{2}}(\xi - \xi_0)\right), \quad (3.3)$$

2) 在  $n < 0$  条件下, 方程(2.11)有如下钟状解

$$a_{S2}^{\pm}(\xi) = \pm\sqrt{-2q} \operatorname{sech}\left(\sqrt{nq}(\xi - \xi_0)\right), \quad (3.4)$$

由此, 我们可得如下定理

**定理 3.1** 设  $q < 0$ , 则

1) 在  $n > 0$  条件下, 方程(1.1)有如下扭状孤波解

$$u_{S1}^{\pm}(\xi) = e^{-iwt} e^{i\psi_{S1}(\xi)} a_{S1}^{\pm}(\xi), \quad (3.5)$$

其中  $a_{S1}^{\pm}(\xi)$  由(3.3)式给出,  $\psi_{S1}(\xi)$  满足  $\psi'_{S1}(\xi) = \frac{v}{2} - \delta a_{S1}^2(\xi)$ 。

2) 在  $n < 0$  条件下, 方程(1.1)有如下钟状孤波解

$$u_{S2}^{\pm}(\xi) = e^{-iwt} e^{i\psi_{S2}(\xi)} a_{S2}^{\pm}(\xi), \quad (3.6)$$

其中  $a_{S2}^{\pm}(\xi)$  由(3.4)式给出,  $\psi_{S2}(\xi)$  满足  $\psi'_{S2}(\xi) = \frac{v}{2} - \delta a_{S2}^2(\xi)$ 。

我们指出: 在图 1 中,  $a_{S1}^+(\xi)$  对应于异宿轨  $L(P_1, P_3)$ ,  $a_{S1}^-(\xi)$  对应于异宿轨  $L(P_3, P_1)$ ; 在图 2 中,  $a_{S2}^+(\xi)$  对应于  $y$  轴右侧的同宿轨,  $a_{S2}^-(\xi)$  对应于  $y$  轴左侧的同宿轨。

现在, 把我们所求的孤波解与最近发表的文献[12]中给出的孤波解作如下对比:

1) 我们据  $\psi'_{S1}(\xi) = \frac{v}{2} - \delta a_{S1}^2(\xi)$  求出  $\psi_{S1}(\xi)$ , 并把  $a_{S1}^{\pm}(\xi)$  (3.3)式代入扭状孤波解  $u_{S1}^{\pm}(\xi)$  (3.5)式中, 可化简为

$$u_{S1}^{\pm}(\xi) = \sqrt{-q} \tanh\left(\sqrt{-\frac{nq}{2}}\xi\right) \exp\left[i\left(-wt + \frac{v}{2}\xi + q\delta\xi + \delta\sqrt{-\frac{2q}{n}} \tanh\left(\sqrt{-\frac{nq}{2}}\xi\right)\right)\right], \quad (3.7)$$

文献[12]中所研方程(1.1)的双曲函数解(25)式与本文所求出的扭状孤波解  $u_{S1}^{\pm}(\xi)$  (3.5)式有如下关系:

$$\lambda \leftrightarrow v, \mu \leftrightarrow -\omega, x - \lambda t \leftrightarrow \xi. \quad (3.8)$$

由于文献[12]中对于双曲函数解(25)式, 参数  $n$  为任意常数, 此时可令  $n = 0$ ,  $\mu = \frac{\lambda^2}{4} - 2$ ,  $\sigma = 1$ ,

将  $\mu, \sigma, n$  代入(3.7)式, 可得

$$u_{S1}^{\pm}(\xi) = \tanh \xi \cdot \exp\left[i\left(\mu t + \frac{\lambda}{2}\xi + \delta\xi + \delta \tanh \xi\right)\right], \quad (3.9)$$

上式与文献[12]中所研方程(1.1)的双曲函数解(25)式一致。

2) 我们据  $\psi'_{S2}(\xi) = \frac{v}{2} - \delta a_{S2}^2(\xi)$  求出  $\psi_{S2}(\xi)$ , 并把  $a_{S2}^{\pm}(\xi)$  (3.4)式代入钟状孤波解  $u_{S2}^{\pm}(\xi)$  (3.6)式中, 可化简为

$$u_{S2}^{\pm}(\xi) = \sqrt{-2q} \operatorname{sech}\left(\sqrt{nq}\xi\right) \exp\left[i\left(-wt + \frac{v}{2}\xi + 2\delta\sqrt{\frac{q}{n}} \tanh\left(\sqrt{nq}\xi\right)\right)\right], \quad (3.10)$$

文献[12]中双曲函数解(27)式与本文所求出的钟状孤波解  $u_{S2}^{\pm}(\xi)$  (3.6)式也有如上关系式(3.8), 此时

可令  $n=0$ ,  $\mu=\frac{\lambda^2}{4}+1$ ,  $\sigma=-1$ , 将  $\mu, \sigma, n$  代入(3.10)式, 可得

$$u_{s2}^+(\xi)=\operatorname{sech}\xi\cdot\exp\left[i\left(\mu t+\frac{\lambda}{2}\xi-\delta\tanh\xi\right)\right], \quad (3.11)$$

上式与文献[12]中所研方程(1.1)的双曲函数解(27)是一致的。

通过以上对比表明, 本文求出的  $u_{s1}^+(\xi)$  和  $u_{s2}^+(\xi)$  与最近发表的文献[12]中给出的解一致, 但上述文献中并没有给出  $u_{s1}^-(\xi)$  和  $u_{s2}^-(\xi)$ , 故  $u_{s1}^-(\xi)$  和  $u_{s2}^-(\xi)$  是本文提供的两个新解, 其中  $u_{s1}^-(\xi)$  是扭状孤波解,  $u_{s2}^-(\xi)$  是钟状孤波解。

#### 4. Eckhaus-Kundu 方程周期波解的求解

因为方程(2.11)的有界解对应于动力系统(2.13)全局相图中的有界轨线, 而系统(2.13)全局相图中轨线的一般表达式是(2.17)式。所以, 我们通过(2.17)式求解(2.11)式的一些有界解。

通过首次积分(2.17)式, 我们得出

$$y^2=\frac{n}{2}\left(x^4+2qx^2+\frac{4h}{n}\right), \quad (4.1)$$

其中  $h=H(x, y)$  表示系统(2.13)在  $(x, y)$  点处的 Hamilton 能量。

因为  $y=x'$ , 利用分离变量法, 就可将求方程(2.11)有界解的问题变成对下列式子的求解

$$\int \frac{dx}{\sqrt{\pm F_h(x)}}=\pm\sqrt{\frac{|n|}{2}}(\xi-\xi_0), \quad (4.2a)$$

其中

$$F_h(x)=x^4+2qx^2+\frac{4h}{n}, \quad (4.2b)$$

并且当  $n>0$  时, (4.2a)式根号内取  $F_h(x)$ , 当  $n<0$  时, (4.2a)式根号内取  $-F_h(x)$ 。容易理解, 在给定的参数条件下, 对于给定的 Hamilton 能量  $h_0$  值, 相图中轨线  $C_{h_0}$  与取定  $h=h_0$  后确定的(4.2)式的解是一一对应的。可以验证, 定理 3.1 中方程(1.1)的扭状孤波解  $u_{s1}^\pm(\xi)$  的振幅  $a_{s1}^\pm(\xi)$ , 可在(4.2)式中取 Hamilton 能量  $h=H(P_1)=H(x_1, 0)$  积分求出; 钟状孤波解  $u_{s2}^\pm(\xi)$  的振幅  $a_{s2}^\pm(\xi)$ , 可在(4.2)式中取 Hamilton 能量  $h=H(P_2)=H(0, 0)$  积分求出。

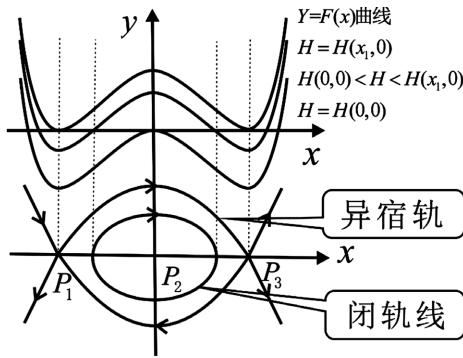
#### 4.1. 图 1 中闭轨线对应的周期波解

在  $n>0$  时, 系统(2.13)有一族位于对称异宿轨  $L(P_1, P_3)$  和  $L(P_3, P_1)$  内围绕中心  $P_2$  的闭轨(见图 1), 易知在异宿轨上点的 Hamilton 能量为  $H(x_1, 0)=H(-\sqrt{-q}, 0)=\frac{nq^2}{4}$ , 由于在同一闭轨线上的点有相同的 Hamilton 能量, 故可设图 1 闭轨线上点的 Hamilton 能量为

$$H(x, y)=H(\eta_1, 0)=-\frac{n}{4}(\eta_1^2+q)^2+\frac{nq^2}{4}=h_1, \quad (4.3)$$

$(\eta_1, 0)$  是其闭轨和  $x$  轴的交点  $(|\eta_1|<\sqrt{-q})$ , 所以  $h_1$  满足  $0<h_1<\frac{nq^2}{4}$ 。

对应的  $Y=F_{h_1}(x)$  的函数曲线和闭轨如图 3 所示



**Figure 3.** When  $n > 0$ , corresponding diagram of  $Y = F_{h_1}(x)$  curve family and bounded orbits

**图 3.** 当  $n > 0$  时,  $Y = F_{h_1}(x)$  曲线族与有界轨线的对应示意图

在(4.2)式中取  $h = h_1$ , 此时有

$$F_{h_1}(x) = x^4 + 2qx^2 + \frac{4h_1}{n} = (x^2 - A_1^2)(x^2 - B_1^2), \quad (4.4)$$

其中  $A_1^2 = \sqrt{q^2 - \frac{4h_1}{n}} - q$ ,  $B_1^2 = -\sqrt{q^2 - \frac{4h_1}{n}} - q$ 。将(4.4)式代入(4.2)式, 作变换  $t = \frac{x}{A_1} = \frac{a(\xi)}{A_1}$ , 则(4.2)式可转化为

$$\pm \sqrt{\frac{n}{2}} (\xi - \xi_0) = \int \frac{dx}{\sqrt{(x^2 - A_1^2)(x^2 - B_1^2)}} = \int \frac{dt}{B_1 \sqrt{(1-t^2) \cdot \left(1 - \left(\frac{A_1}{B_1}\right)^2 t^2\right)}}. \quad (4.5)$$

在(4.5)式中令  $k = k_1 = \frac{|A_1|}{|B_1|}$ , 经计算可得  $A_1^2 = \frac{-2qk_1^2}{1+k_1^2}$ ,  $B_1^2 = \frac{-2q}{1+k_1^2}$ 。再根据 Jacobi 椭圆函数积分的知识[16] [17]求解上式积分, 可得

$$t = \pm sn\left(\sqrt{\frac{-nq}{1+k_1^2}} (\xi - \xi_0), k_1\right), \quad (4.6)$$

又因为  $a(\xi) = A_1 \cdot t$ , 即得方程(2.11)的下列周期解

$$a_{p1}^\pm(\xi) = \pm \sqrt{\frac{-2qk_1^2}{1+k_1^2}} sn\left(\sqrt{\frac{-nq}{1+k_1^2}} (\xi - \xi_0), k_1\right), \quad (4.7)$$

其中模数  $k_1^2 = \frac{nq - \sqrt{n^2q^2 - 4nh_1}}{nq + \sqrt{n^2q^2 - 4nh_1}}$ 。

综上所述, 我们可以得到如下定理

**定理 4.1** 设  $q < 0$ , 当  $n > 0$  时, 方程(1.1)存在周期波解如下所示

$$u_{p1}^\pm(\xi) = e^{-iwt} e^{i\psi_{p1}(\xi)} a_{p1}^\pm(\xi), \quad (4.8)$$

其中  $a_{p1}^\pm(\xi)$  由(4.7)式给出,  $\psi_{p1}(\xi)$  满足  $\psi'_{p1}(\xi) = \frac{\nu}{2} - \delta a_{p1}^2(\xi)$ 。

## 4.2. 图 2 中同宿轨包围的闭轨对应的周期波解

当  $n < 0$  时, 系统(2.13)在对称同宿轨  $L_\pm(P_2, P_3)$  所围区域内分别存在围绕中心  $P_1$  和  $P_3$  的两族闭轨线

(见图 2), 易知同宿轨上点的 Hamilton 能量为  $H(x_2, 0) = H(0, 0) = 0$ , 闭轨线对应的 Hamilton 能量满足  $H(x_1, 0) < h_2 < H(0, 0)$ , 由于在同一闭轨线上的点有相同的 Hamilton 能量, 故设图 2 中围绕中心  $P_1$  和  $P_3$  闭轨线上点的 Hamilton 能量为

$$H(x, y) = H(\eta_2, 0) = -\frac{n}{4}(\eta_2^2 + q)^2 + \frac{nq^2}{4} = h_2, \quad (4.9)$$

$(\eta_2, 0)$  是闭轨和  $x$  轴的交点 ( $|\eta_2| < \sqrt{-q}$ ),  $h_2$  满足  $\frac{nq^2}{4} < h_2 < 0$ .

对应的  $-F_{h_2}(x)$  函数曲线和闭轨如图 4 所示(注: 由于此时  $n < 0$ , (4.2a)式中应取  $-F_h(x)$ ).

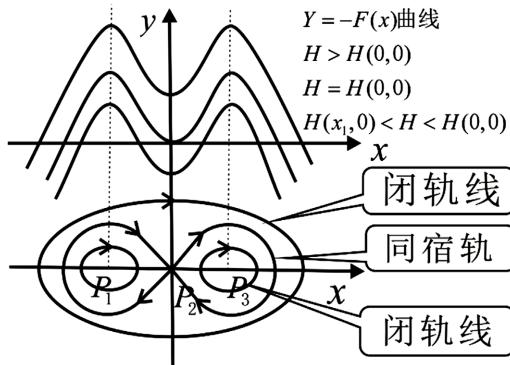


Figure 4. When  $n < 0$ , corresponding diagram of  $Y = -F_{h_2}(x)$  curve family and bounded orbits

图 4. 当  $n < 0$  时,  $Y = -F_{h_2}(x)$  曲线族与有界轨线的对应示意图

在(4.2)式中取  $h = h_2$ , 此时有

$$-F_{h_2}(x) = q^2 - \frac{4h_2}{n} - (x^2 + q)^2 = -(x^2 - A_2^2)(x^2 - B_2^2), \quad (4.10)$$

其中  $A_2^2 = \sqrt{q^2 - \frac{4h_2}{n}} - q$ ,  $B_2^2 = -\sqrt{q^2 - \frac{4h_2}{n}} - q$ . 将(4.10)式代入(4.2)式, 并作变换  $t = \frac{x}{A_2} = \frac{a(\xi)}{A_2}$ , 则(4.2)式可转化为

$$\pm \sqrt{-\frac{n}{2}}(\xi - \xi_0) = \int \frac{dx}{\sqrt{-(x^2 - A_2^2)(x^2 - B_2^2)}} = \int \frac{dt}{A_2 \sqrt{(1-t^2) \cdot \left(t^2 - \left(\frac{B_2}{A_2}\right)^2\right)}}, \quad (4.11)$$

在(4.11)式中令  $k' = k'_2 = \frac{|B_2|}{|A_2|}$ , 经计算可得  $A_2^2 = \frac{-2q}{2-k_2^2}$ ,  $B_2^2 = \frac{-2q(1-k_2^2)}{2-k_2^2}$ . 再根据 Jacobi 椭圆函数积分的知识[16][17]求解上式积分, 可得

$$t = \pm dn\left(\sqrt{\frac{nq}{2-k_2^2}}(\xi - \xi_0), k_2\right). \quad (4.12)$$

又因为  $a(\xi) = A_2 \cdot t$ , 将(4.12)式代入即可得

$$a_{p2}^\pm(\xi) = \pm \sqrt{\frac{-2q}{2-k_2^2}} \cdot dn\left(\sqrt{\frac{nq}{2-k_2^2}}(\xi - \xi_0), k_2\right), \quad (4.13)$$

其中模数  $k_2^2 = 2 + \frac{2q}{A_2^2} = \frac{2\sqrt{4h_2 - nq^2}}{\sqrt{4h_2 - nq^2} - \sqrt{-nq}}$ 。

综上所述, 我们得到如下定理

**定理 4.2** 设  $q < 0$ , 当  $n < 0$  时, 方程(1.1)有周期波解

$$u_{p2}^\pm(\xi) = e^{-iwt} e^{i\psi_{p2}(\xi)} a_{p2}^\pm(\xi), \quad (4.14)$$

其中  $a_{p2}^\pm(\xi)$  由(4.13)式给出,  $\psi_{p2}(\xi)$  满足  $\psi'_{p2}(\xi) = \frac{v}{2} - \delta a_{p2}^2(\xi)$ 。

### 4.3. 图 2 中包围同宿轨的闭轨对应的周期波解

在  $n < 0$  条件下, 系统(2.13)存在一族包含奇点  $P_i (i=1,2,3)$  和一对同宿轨  $L_\pm(P_2, P_2)$  的闭轨线。设这类闭轨线上 Hamilton 能量为

$$H(x, y) = H(\eta_3, 0) = h_3,$$

$(\eta_3, 0)$  是闭轨和  $x$  轴的交点,  $h_3$  满足  $h_3 > H(0, 0)$ 。

对应的  $-F_{h_3}(x)$  函数曲线和闭轨如图 4 所示, 这类闭轨线的特点是曲线  $-F_{h_3}(x)$  与  $x$  轴有两个不同的交点, 且是关于  $y$  轴对称的, 曲线  $-F_{h_3}(x)$  可表示为

$$-F_{h_3}(x) = -\left( x^4 + 2qx^2 + \frac{4h_3}{n} \right) = (x^2 - \lambda_1)(\lambda_2 - x^2) \quad (4.15)$$

其中  $\lambda_1 = -q - \sqrt{q^2 - \frac{4h_3}{n}}$ ,  $\lambda_2 = -q + \sqrt{q^2 - \frac{4h_3}{n}}$ ,  $0 < \lambda_1 < \lambda_2$ ,  $\lambda_1, \lambda_2$  为  $Y = -F_{h_3}(x)$  与  $x$  轴交点横坐标的平方值, 所以函数  $-F_{h_3}(x)$  可表示为

$$-F_{h_3}(x) = \left( -q + \sqrt{q^2 - \frac{4h_3}{n}} - x^2 \right) \left( q + \sqrt{q^2 - \frac{4h_3}{n}} + x^2 \right). \quad (4.16)$$

将(4.16)式代入(4.2)式用类似于前两段的方法化简, 并根据椭圆函数知识[16] [17]求积分, 可得包围同宿轨的周期轨线所对应的方程(2.11)的有界周期解

$$a_{p3}^\pm(\xi) = \pm \sqrt{\frac{-2qk_3^2}{2k_3^2 - 1}} \cdot cn\left(\sqrt{\frac{nq}{2k_3^2 - 1}}(\xi - \xi_0), k_3\right), \quad (4.17)$$

其中模数  $k_3^2 = \frac{\sqrt{4h_3 - nq^2} - \sqrt{-nq}}{2\sqrt{4h_3 - nq^2}}$ 。于是我们有如下定理

**定理 4.3** 设  $q < 0$ , 当  $n < 0$  时, 方程(1.1)有周期波解

$$u_{p3}^\pm(\xi) = e^{-iwt} e^{i\psi_{p3}(\xi)} a_{p3}^\pm(\xi), \quad (4.18)$$

其中  $a_{p3}^\pm(\xi)$  由(4.17)式给出,  $\psi_{p3}(\xi)$  满足  $\psi'_{p3}(\xi) = \frac{v}{2} - \delta a_{p3}^2(\xi)$ 。

## 5. 方程(1.1)的周期波解和孤波解与 Hamilton 能量的关系

### 5.1. Hamilton 能量的取值与方程(1.1)周期波解和孤波解的关系

我们仅以  $n > 0$  情形为例进行分析, 对  $n < 0$  情形可做类似分析。

由于方程(1.1)的扭状孤波解对应于系统(2.13)的异宿轨，周期波解对应于系统(2.13)的闭轨线，根据图3所示，在 $n > 0$ 条件下，我们可以得到方程(1.1)存在孤波解和周期波解与 Hamilton 能量  $h$  的关系：

- 1) 当能量  $h < H(0,0)$  时，系统(2.13)不存在有界轨线，此时方程(1.1)没有有界行波解；
- 2) 当能量  $H(0,0) < h < H(x_1,0)$  时，系统(2.13)有异宿轨包围的且围绕中心点  $P_2$  的闭轨，此时方程(1.1)有周期波解  $u_{p1}^\pm(\xi)$ ；
- 3) 当能量  $h = H(x_1,0) = H(x_3,0)$  时，系统(2.13)有 2 个异宿轨  $L(P_1, P_3)$  和  $L(P_3, P_1)$ ，此时方程(1.1)有 2 个扭状孤波解  $u_{S1}^\pm(\xi)$ ；
- 4) 当能量  $h > H(x_1,0) = H(x_3,0)$  时，系统(2.13)无有界轨线，此时方程(1.1)没有有界行波解。

上述分析表明：方程(1.1)为什么能产生孤波解和周期波解，其根本原因是由于这类解的振幅  $a(\xi)$  对应的 Hamilton 系统的能量  $h$  取值变化起着关键的作用。

## 5.2. 方程(1.1)的周期波解和孤波解随 Hamilton 能量取极限的关系

### 1) $n > 0$ 情形

当  $n > 0$  时，方程(1.1)有周期波解  $u_{p1}^\pm(\xi)$ （由(4.8)式给定），其振幅  $a_{p1}^\pm(\xi)$ （由(4.7)式给定），对应的 Hamilton 能量  $0 < h_1 < \frac{nq^2}{4}$ ；方程(1.1)还有孤波解  $u_{S1}^\pm(\xi)$ （由(3.5)式给定），其振幅  $a_{S1}^\pm(\xi)$ （由(3.3)式给定）， $u_{S1}^\pm(\xi)$  对应的 Hamilton 能量是  $h = H(x_1,0)$ 。

$$\text{当 } h_1 \rightarrow H(x_1,0) = \frac{nq^2}{4} \text{ 时，相应的 } \lim_{h_1 \rightarrow H(x_1,0)} k_1^2 = \frac{nq - \sqrt{n^2 q^2 - 4nh_1}}{nq + \sqrt{n^2 q^2 - 4nh_1}} = 1, \text{ 于是有}$$

$$\begin{aligned} \lim_{h_1 \rightarrow H(x_1,0)} a_{p1}^\pm(\xi) &= \lim_{k_1^2 \rightarrow 1} \pm \sqrt{\frac{-2qk_1^2}{1+k_1^2}} \operatorname{sn}\left(\sqrt{\frac{-nq}{1+k_1^2}}(\xi - \xi_0), k_1\right) \\ &= \pm \sqrt{-q} \tanh\left(\sqrt{-\frac{nq}{2}}(\xi - \xi_0)\right) \\ &= a_{S1}^\pm(\xi), \end{aligned}$$

由此，即可得

$$\lim_{h_1 \rightarrow H(x_1,0)} u_{p1}^\pm(\xi) = u_{S1}^\pm(\xi) \quad (5.1)$$

这表明当  $n > 0$ ，Hamilton 能量  $h_1 \rightarrow H(x_1,0) = \frac{nq^2}{4}$  时，方程(1.1)的周期波解  $u_{p1}^\pm(\xi)$  可以扩张演化为扭状孤波解  $u_{S1}^\pm(\xi)$ 。

### 2) $n < 0$ 情形

当  $n < 0$  时，方程(1.1)有周期波解  $u_{p2}^\pm(\xi)$ （由(4.14)式给定），其振幅  $a_{p2}^\pm(\xi)$ （由(4.13)式给定），对应的 Hamilton 能量  $\frac{nq^2}{4} < h_2 < 0$ ；方程(1.2)此时有孤波解  $u_{S2}^\pm(\xi)$ （由(3.6)式给定），其振幅  $a_{S2}^\pm(\xi)$ （由(3.4)式给定）， $u_{S2}^\pm(\xi)$  对应的 Hamilton 能量是  $h = H(0,0) = 0$ 。当  $h_2 \rightarrow H^-(0,0) = 0^-$  时，相应的

$$\lim_{h_2 \rightarrow H^-(0,0)} k_2^2 = \frac{2\sqrt{4h_2 - nq^2}}{\sqrt{4h_2 - nq^2} - \sqrt{-nq}} = 1 \text{ (注意到 } q < 0\text{)}, \text{ 于是有}$$

$$\begin{aligned}
\lim_{h_2 \rightarrow H^-(0,0)} a_{p2}^\pm(\xi) &= \lim_{k_2^2 \rightarrow 1} \pm \sqrt{\frac{-2q}{2-k_2^2}} \cdot dn\left(\sqrt{\frac{nq}{2-k_2^2}}(\xi - \xi_0), k_2\right) \\
&= \pm \sqrt{-2q} \operatorname{sech}\left(\sqrt{nq}(\xi - \xi_0)\right) \\
&= a_{s2}^\pm(\xi),
\end{aligned}$$

由此, 即可得

$$\lim_{h_2 \rightarrow H^-(0,0)} u_{p2}^\pm(\xi) = u_{s2}^\pm(\xi). \quad (5.2)$$

这表明, 在  $n < 0$  条件时下, Hamilton 能量  $h_2 \rightarrow H^-(0,0) = 0^-$  时, 方程(1.1)的周期波解  $u_{p2}^\pm(\xi)$  可以扩张演化为钟状孤波解  $u_{s2}^\pm(\xi)$ 。

同理, 对于方程(1.1)包围同宿轨和奇点的闭轨对应的周期波解  $u_{p3}^\pm(\xi)$  (由(4.18)式给定)在 Hamilton 能量  $h_3 \rightarrow H^+(0,0) = 0^+$  时, 有

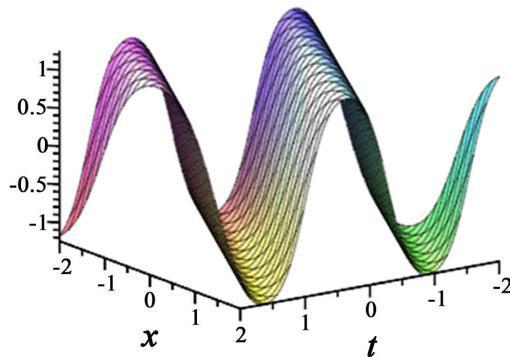
$$\begin{aligned}
\lim_{h_3 \rightarrow H^+(0,0)} a_{p3}^\pm(\xi) &= \lim_{k_3^2 \rightarrow 1} \pm \sqrt{\frac{-2qk_3^2}{2k_3^2 - 1}} \cdot cn\left(\sqrt{\frac{nq}{2k_3^2 - 1}}(\xi - \xi_0), k_3\right) \\
&= \pm \sqrt{-2q} \operatorname{sech}\left(\sqrt{nq}(\xi - \xi_0)\right) \\
&= a_{s2}^\pm(\xi), \\
\lim_{h_3 \rightarrow H^+(0,0)} u_{p3}^\pm(\xi) &= u_{s2}^\pm(\xi).
\end{aligned} \quad (5.3)$$

故当  $n < 0$ , Hamilton 能量  $h_3 \rightarrow H^+(0,0) = 0^+$  时, 方程(1.1)的周期波解  $u_{p3}^\pm(\xi)$  可以收缩演化为钟状孤波解  $u_{s2}^\pm(\xi)$ 。

### 5.3. 方程(1.1)的周期波解随 Hamilton 能量向孤波解演化的示意图

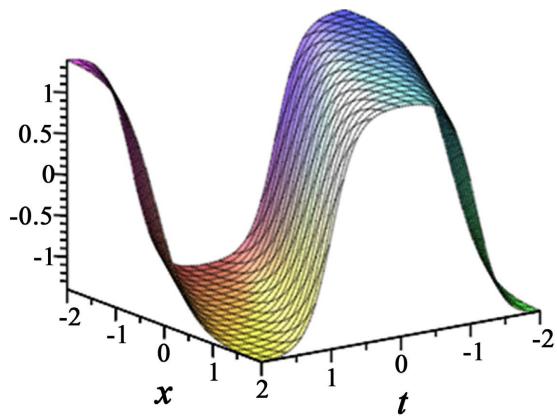
此小节我们描绘出当 Hamilton 能量变化时, 周期波解  $u_{p1}^+(\xi)$  的振幅  $a_{p1}^+(\xi)$  向孤波解  $u_{s1}^+(\xi)$  的振幅  $a_{s1}^+(\xi)$  演化,  $u_{p2}^+(\xi)$  的振幅  $a_{p2}^+(\xi)$  向孤波解  $u_{s2}^+(\xi)$  的振幅  $a_{s2}^+(\xi)$  演化的三维示意图, 这样就可以更加清楚明白这两种解之间的演化过程。

1) 当  $h_1 \rightarrow H(x_1, 0)$  时,  $u_{p1}^+(\xi)$  的振幅趋于  $u_{s1}^+(\xi)$  的振幅的示意图, 选取  $\sigma = 1$ ,  $\nu = 2$ ,  $\omega = 3$ , 此时  $n = 2$ ,  $q = -2$ ,  $\frac{nq^2}{4} = 2$ 。当振幅所对应 Hamilton 能量  $h \rightarrow 2^-$  时, 方程(1.1)的周期波解的振幅  $a_{p1}^+(\xi)$  演化为孤波解的振幅  $a_{s1}^+(\xi)$  的三维图形如图 5~8 所示:



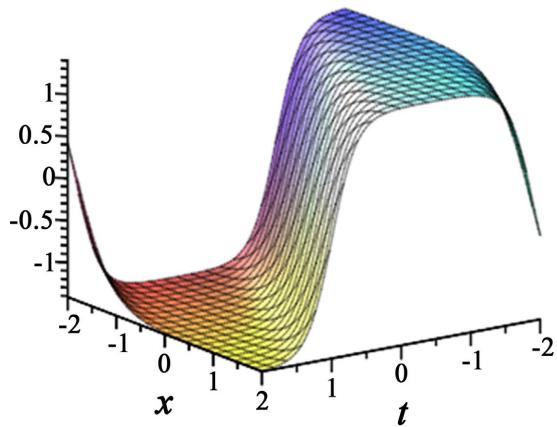
**Figure 5.** When  $h = 1.99$ , the diagram of  $a_{p1}^+(\xi)$

**图 5.** 当  $h = 1.99$  时,  $a_{p1}^+(\xi)$  的图像



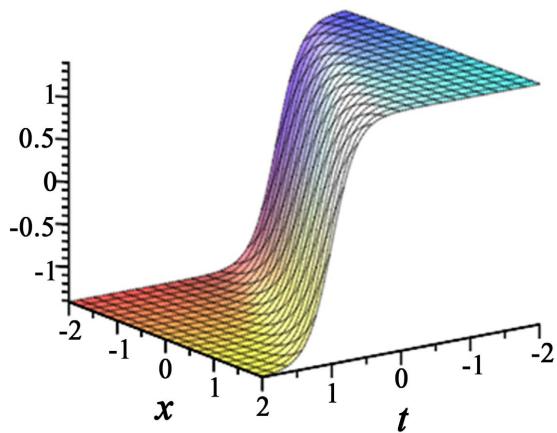
**Figure 6.** When  $h=1.9999$ , the diagram of  $a_{pl}^+(\xi)$

图 6. 当  $h=1.9999$  时,  $a_{pl}^+(\xi)$  的图像



**Figure 7.** When  $h=1.999999$ , the diagram of  $a_{pl}^+(\xi)$

图 7. 当  $h=1.999999$  时  $a_{pl}^+(\xi)$  的图像

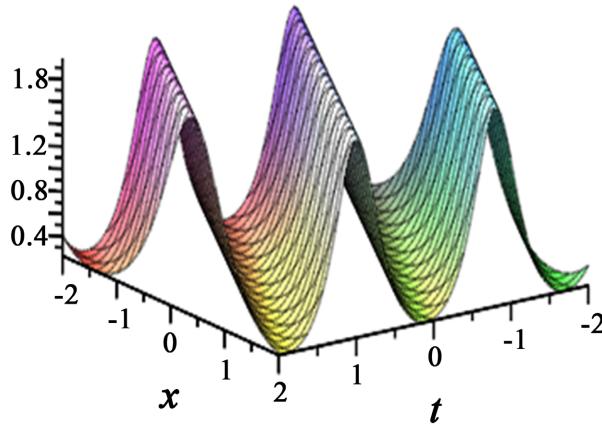


**Figure 8.** When  $h=2$ , the diagram of  $a_{sl}^+(\xi)$

图 8. 当  $h=2$  时,  $a_{sl}^+(\xi)$  的图像

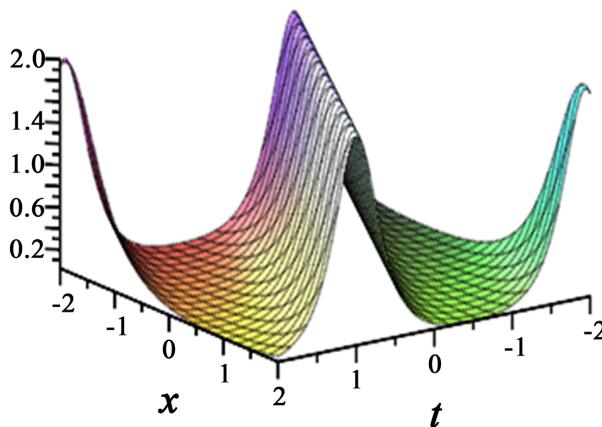
2) 当  $h_2 \rightarrow H(0,0)$  时,  $u_{p2}^+(\xi)$  的振幅趋于  $u_{s2}^+(\xi)$  的振幅的示意图, 选取  $\sigma=-1$ ,  $v=2$ ,  $\omega=-5$ ,

此时  $n = -2$ ,  $q = -2$ 。当振幅所对应 Hamilton 能量  $h \rightarrow 0$  时, 方程(1.1)的周期波解的振幅  $a_{p2}^+(\xi)$  演化为孤波解的振幅  $a_{s2}^+(\xi)$  的三维图形如图 9~12 所示:



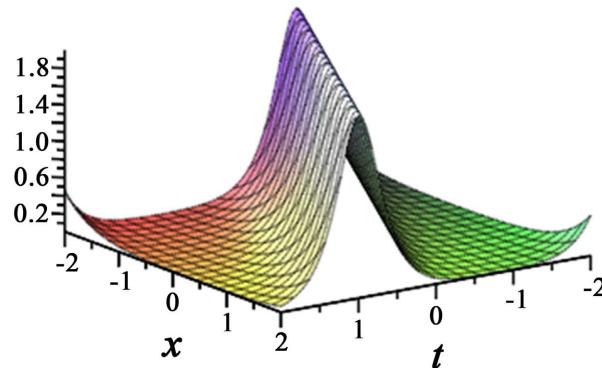
**Figure 9.** When  $h = -0.01$ , the diagram of  $a_{p2}^+(\xi)$

图 9. 当  $h = -0.01$  时,  $a_{p2}^+(\xi)$  的图像



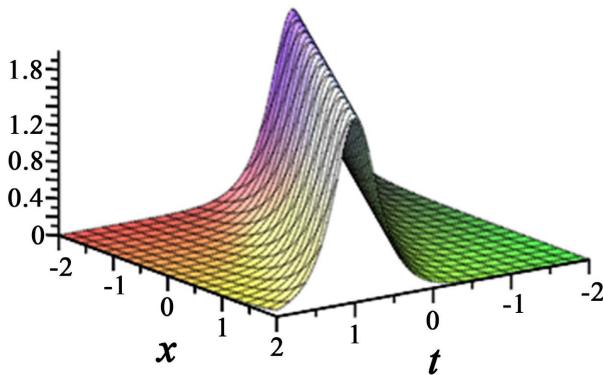
**Figure 10.** When  $h = -0.0001$ , the diagram of  $a_{p2}^+(\xi)$

图 10. 当  $h = -0.0001$  时,  $a_{p2}^+(\xi)$  的图像



**Figure 11.** When  $H = -0.000001$ , the diagram of  $a_{p2}^+(\xi)$

图 11. 当  $H = -0.000001$  时,  $a_{p2}^+(\xi)$  的图像

**Figure 12.** When  $H = 0$ , the diagram of  $a_{s2}^+(\xi)$ **图 12.** 当  $H = 0$  时,  $a_{s2}^+(\xi)$  的图像

## 6. 结论

本文我们运用平面动力系统理论、假设待定法和基于首次积分的分析方法,求出了 Eckhaus-Kundu 方程(1.1)型如(2.1)全部的钟状和扭状孤波解,以及三类周期波解。文中进一步讨论了孤波解和周期波解关于其振幅对应的 Hamilton 能量之间的演化,发现了 Eckhaus-Kundu 方程(1.1)为什么能产生型如(2.1)的孤波解和周期波解,其根本原因是由于行波解  $u$  的振幅  $a(\xi)$  对应的 Hamilton 系统的能量  $h$  取值变化起着关键的作用。了解这一点对于掌控或调制所研方程描述的实际模型是有意义的。

## 参考文献

- [1] Kundu, A. (1984) Lanau-Lifshitz and Higher-Order Nonlinear Systems Gauge Generated from Nonlinear Schrödinger Type Equations. *Journal of Mathematical Physics*, **25**, 3433-3438. <https://doi.org/10.1063/1.526113>
- [2] Calogero, F. and Eckhaus, W. (1988) Nonlinear Evolution Equations, Rescalings, Model PDES and Their Integrability: I. *Inverse Problems*, **3**, 229-262. <https://doi.org/10.1088/0266-5611/3/2/008>
- [3] Clarkson, P.A. and Tuszyński, J.A. (1990) Exact Solutions of the Multidimensional Derivative Nonlinear Schrödinger Equation for Many-Body Systems of Criticality. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, **23**, 4269-4288. <https://doi.org/10.1088/0305-4470/23/19/013>
- [4] Johnson, R.S. (1977) On the Modulation of Water Waves in the Neighbourhood of  $kh \approx 1.363$ . *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical and Physical Sciences*, **357**, 131-141. <https://doi.org/10.1098/rspa.1977.0159>
- [5] Kodama, Y. (1985) Optical Solitons in a Monomode fiber. *Journal of Statistical Physics*, **39**, 597-614. <https://doi.org/10.1007/BF01008354>
- [6] Clarkson, P.A. and Cosgrove, C.M. (1987) Painlevé Analysis of the Non-Linear Schrödinger Family of Equations. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, **20**, 2003-2024. <https://doi.org/10.1088/0305-4470/20/8/020>
- [7] Mendoza, J., Muriel, C. and Ramírez, J. (2020) New Optical Solitons of Kundu-Eckhaus Equation via  $\lambda$ -Symmetry. *Chaos, Solitons & Fractals*, **136**, Article ID: 109786. <https://doi.org/10.1016/j.chaos.2020.109786>
- [8] Wang, P., Tian, B., Sun, K. and Qi, F.H. (2015) Bright and Dark Soliton Solutions and Bäcklund Transformation for the Eckhaus-Kundu Equation with the Cubic-Quintic Nonlinearity. *Applied Mathematics and Computation*, **251**, 233-242. <https://doi.org/10.1016/j.amc.2014.11.014>
- [9] Xie, X.Y., Tian, B., Sun, W.R. and Sun, Y. (2015) Rogue-Wave Solutions for the Kundu-Eckhaus Equation with Variable Coefficients in an Optical Fiber. *Nonlinear Dynamics*, **81**, 1349-1354. <https://doi.org/10.1007/s11071-015-2073-6>
- [10] Zha, Q.L. (2013) On  $N$ th-Order Rogue Wave Solution to the Generalized Nonlinear Schrödinger Equation. *Physics Letters A*, **377**, 855-859. <https://doi.org/10.1016/j.physleta.2013.01.044>
- [11] Tian, S.F., Tu, J.M., Zhang, T.T. and Chen, Y.R. (2021) Integrable Discretizations and Soliton Solutions of an Eckhaus-Kundu Equation. *Applied Mathematics Letters*, **122**, Article ID: 107507. <https://doi.org/10.1016/j.aml.2021.107507>

- 
- [12] Cimpoiasu, R. and Constantinescu, R. (2021) Invariant Solutions of the Eckhaus-Kundu Model with Nonlinear Dispersion and Non-Kerr Nonlinearities. *Waves in Random and Complex Media*, **32**, 331-341.  
<https://doi.org/10.1080/17455030.2019.1587210>
  - [13] Luo, J. and Fan, E. (2021) A  $\partial$ -Dressing Approach to the Kundu-Eckhaus Equation. *Journal of Geometry and Physics*, **167**, Article ID: 104291. <https://doi.org/10.1016/j.geomphys.2021.104291>
  - [14] Zhang, W.G., Chang, Q.S. and Fan, E.G. (2003) Methods of Judging Shape of Solitary Wave and Solution Formulae for Some Evolution Equations with Nonlinear Terms of High Order. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **287**, 1-18. [https://doi.org/10.1016/S0022-247X\(02\)00336-0](https://doi.org/10.1016/S0022-247X(02)00336-0)
  - [15] Zhang, W.G., Chang, Q.S. and Jiang, B.G. (2002) Explicit Exact Solitary-Wave Solutions for Compound KdV-Type and Compound KdV-Burgers-Type Equations with Nonlinear Terms of Any Order. *Chaos, Solitons & Fractals*, **13**, 311-319. [https://doi.org/10.1016/S0960-0779\(00\)00272-1](https://doi.org/10.1016/S0960-0779(00)00272-1)
  - [16] Byrd, P.F. and Friedman, M.D. (1971) Handbook of Elliptic Integrals for Engineers and Scientists. In: Chenciner, A. and Varadhan, S.R.S., Eds., *Grundlehren der mathematischen Wissenschaften*, Vol. 67, Springer-Verlag, New York. <https://doi.org/10.1007/978-3-642-65138-0>
  - [17] Lawden, D.F. (1989) Elliptic Functions and Applications. In: Bloch, A., Epstein, C.L., Goriely, A. and Greengard, L., Eds., *Applied Mathematical Sciences*, Vol. 80, Springer-Verlag, New York. <https://doi.org/10.1007/978-1-4757-3980-0>