

# Level Set Method for Numerical Simulation of Droplets Impacting on Solid Interface\*

Xiaohui Qian<sup>1</sup>, Shuang Xu<sup>1</sup>, Chunwu Wang<sup>2</sup>, Ning Zhao<sup>1</sup>

<sup>1</sup>College of Aerospace Engineering, Nanjing University of Aeronautics & Astronautics, Nanjing

<sup>2</sup>College of Science, Nanjing University of Aeronautics & Astronautics, Nanjing

Email: shuangxu@nuaa.edu.cn

Received: Jun. 28th, 2011; revised: Jul. 26th, 2011; accepted: Jul. 29th, 2011.

**Abstract:** Level Set method show advantage of dealing with multiphase flows where interfaces can make large deformation and complex topological change. In this paper, we first use the Riemann ghost fluid method (RGFM) advanced by Wang et al. to define the boundary conditions and then solve the compressible Euler equations, using 5th WENO scheme to update level set function which can capture interface more accurately. Based on the current scheme we can easily simulate the multiphase flows which have density ratio of 1000 between two fluids, such as water and gas. In this work, we simulate the movement and topological changes of two droplets which are different in shape when they impact and splash on the solid interface. At the same time we compute the lost ratio of droplet to validate the accuracy of accurate algorithm. Based on the obtained numerical results, we can get the trajectory of droplets. It is helpful to accurately simulate the procedure of icing on the surface of aircraft.

**Keywords:** Level-Set Method; Multiphase Flow; RGFM; Droplet; Lost Ratio

## 水滴撞击固体界面问题的 Level Set 数值模拟\*

钱晓辉<sup>1</sup>, 徐爽<sup>1</sup>, 王春武<sup>2</sup>, 赵宁<sup>1</sup>

<sup>1</sup>南京航空航天大学航空宇航学院, 南京

<sup>2</sup>南京航空航天大学理学院数学系, 南京

Email: shuangxu@nuaa.edu.cn

收稿日期: 2011 年 6 月 28 日; 修回日期: 2011 年 7 月 26 日; 录用日期: 2011 年 7 月 29 日

**摘要:** Level Set 界面追踪方法对于大变形及复杂拓扑结构变化的多相流问题具有一定的优势。本文利用 RGFM(Riemann Ghost Fluid Method)定义界面边界条件, 然后求解可压缩欧拉方程, 用五阶 WENO 格式推进 Level Set 函数从而更准确的捕捉界面, 处理界面两边密度比为 1000 的水气多相流运动问题, 通过模拟两个不同形状的水滴与平板撞击后的形态变化及其运动过程, 并计算运动过程中的水滴损失率, 验证方法的准确性, 进而了解水滴撞击特性, 为研究飞行器部件表面结冰数值模拟提供技术积累。

**关键词:** Level-Set 方法; 多相流; RGFM; 水滴; 损失率

### 1. 引言

飞行器在降雨区域或过冷云层中飞行时, 常常会遇到危险的结冰现象, 严重影响飞行安全<sup>[1]</sup>。欧美等发达国家自 20 世纪中期就开始了数值模拟飞机结冰

问题的研究, 其中, 主要包括以下四个方面的内容: 贴体坐标网格生成; 单相气流流场计算; 拉格朗日法或欧拉法计算水滴轨迹; 基于热平衡的结冰量和结冰区计算。忽略了很多因素的影响, 如空气粘性, 结冰表面粗糙度的变化等。近年来国内也开展了对结冰数值模拟的研究, 目前主要工作都是集中在跟踪国外技

\*基金项目: 国家自然科学基金(10972106)资助项目。

术, 积累了一定的基础, 但缺乏对结冰数值模拟模型和算法的系统性的研究。目前结冰数值模拟方法都是基于以下假设<sup>[1-2]</sup>: 一, 过冷水滴足够小, 可忽略水滴运动对气流流场造成的影响; 二, 飞机部件表面足够光滑, 三, 水滴撞击到机翼表面后仍保持一定直径的球形不变, 并迅速冻结; 四, 水滴在运动中, 温度和密度等保持不变, 并采用贴体结构或非结构网格进行数值分析。针对其中第三个假设, 由于云层中含有不同形状, 不同大小的水滴, 撞击到机翼时与机翼表面发生相互作用, 必然会发生形态和运动轨迹的变化, 进而会影响飞机机翼表面冰的收集特性。所以在水滴结冰问题的模拟中, 简单的采取球形不变会直接影响数值模拟的准确性, 必须对不同形状, 不同大小的水滴与翼面相互作用及其变形、分裂迸溅等现象进行细致的模拟。研究水滴撞击是进行结冰数值模拟研究的初始步骤, 目前关于水滴撞击液体表面的研究工作已经开展<sup>[3]</sup>, 但关于水滴撞击固体表面的水滴界面变化的研究并不多, 因此运用 Level Set 方法进行水滴撞击固体表面数值模拟, 进而了解水滴撞击特性, 对提高飞行器部件表面结冰数值模拟精度具有重要意义。

Level Set 方法是一种多相流运动界面捕捉方法, 由 Osher 等人提出, 后来 Fedkiw 在 1999 年开创性的提出了虚拟流方法(GFM)<sup>[4]</sup>并利用等熵装配技术解决了一类弱间断界面问题, 能有效的抑制界面处的非物理振荡。虚拟流方法的基本思想是在界面附近定义每种流体的虚拟流体, 由于压强和法向速度穿过界面是连续的, 虚拟流体的压强和法方向速度用该网格点上真实流体的压强和法向速度, 密度是通过等熵装配技术单侧熵插值求得。引入 Level-Set 函数可以捕捉运动界面的位置, 并能够根据网格点上 Level Set 函数值的符号选择正确的状态方程进行计算。原始的 GFM 方法在解决气 - 气流动问题时效果比较好, 但是对于水 - 气流动问题, 由于界面两边流体的密度和状态方程差别比较大, GFM 不能给出正确的界面边界条件从而引入很大的数值误差, 因此, 后来又出现了很多种改进的虚拟流方法, 如刘铁钢等人的 MGFM(Modified Ghost Fluid Method)<sup>[5]</sup>, 以及由王春武等人发展的 RGFM(Riemann Ghost Fluid Method)<sup>[6-7]</sup>。这二者都是在界面处定义了 Riemann 问题, 通过求解 Riemann 问题的解重新定义界面处的真实流体和虚拟流体的值,

其中 MGFM 只是修改了界面处的虚拟流体的状态, 对于界面处的真实流体的值, 只是通过等熵装配法对密度进行了修改。而 RGFM 根据 Riemann 问题的解定义了界面处真实流体的状态, 然后外推到界面处的虚拟流体上, 从而更准确的定义了界面边界条件, 因此能很好的处理界面两边密度差很大的水气运动问题。

本文用可压缩欧拉方程作为水和气体的控制方程, 其中气体的状态方程为理想状态方程, 水的状态方程采用 Tait 方程, 采用 RGFM 方法定义界面边界条件, 用五阶 WENO 方法来推进 level set 函数, 从而更准确的捕捉界面。数值试验中下方平板采用固壁反射边界条件处理, 并计算模拟过程中的水滴体积损失率, 验证数值试验的准确性。

## 2. 控制方程

### 2.1. 二维可压缩流体力学方程组:

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F(U)}{\partial x} + \frac{\partial G(U)}{\partial y} = 0 \quad (1)$$

其中:

$$U = [\rho, \rho u, \rho v, E]^T$$

$$F(U) = [\rho u, \rho u^2 + p, \rho uv, (E + p)u]^T$$

$$G(U) = [\rho v, \rho uv, \rho v^2 + p, (E + p)v]^T$$

$\rho$  为密度,  $u$  和  $v$  分别为  $x$  和  $y$  方向的速度,  $p$  为压力,  $E$  为单位总能, 可取  $E = \rho e + \rho(u^2 + v^2)/2$ , 这里  $e$  为单位质量的内能。

### 2.2. 状态方程:

可压缩气体和水的状态方程可以表示为统一形式:

$$p = (\gamma - 1)\rho e - \gamma B \quad (2)$$

这里  $\gamma$  和  $B$  为常数。

对于理想气体:

$$\gamma = 1.4, B = 0;$$

对于水(Tait 方程):

$$\gamma = 7.15, B = 3309.$$

### 2.3. Level-Set 方程:

为了跟踪流体的界面移动, 建立如下 Level-Set 方程:

$$\phi_t + u\phi_x + v\phi_y = 0 \quad (3)$$

Level-Set 函数是距离符号函数，它的零值代表界面所在的位置，其正值对应于一种流体，而负值对应于另一种，每一种流体都满足上面的 Euler 方程。上面方程的空间离散采用五阶 WENO 格式，时间离散采用三阶 TVD Runge-Kutta 方法。由于计算误差和流场可能出现大梯度变化，Level Set 函数等值线可能交织在一起，由于 Level Set 函数不能保持为界面的距离符号函数，因此要对 Level Set 函数进行重新初始化保证其为界面的距离符号函数。

### 3. RGFM

本文采用的虚拟流方法是 RGFM(Riemann ghost fluid method)，其方法如下：在界面处定义 Riemann 问题，并通过 Riemann 问题的解定义界面处真实流场的状态，然后将其按照法线方向外推导界面另一边的虚拟流场上。具体对于二维情况时，界面处真实流体的压力，法向速度和密度取为 Riemann 问题解的压力和速度，然后把压力，密度，法向速度和切向速度沿着法线方向外推到界面另一边的 Ghost 流体上，这样便在界面处定义了界面边界条件。由于 Riemann 问题的解能较准确地给定界面处真实的流动状态，因此这种方法引入较小误差，可以适用于更多状态方程，具有更加良好的稳健性。

由上可知，虚拟流动方法主要包括三个要点：一，定义虚拟流体，也即定义合理的界面边界条件。二，对于每一种流体各自求解 Euler 方程。三，用 Level-Set 方程捕捉界面运动。下面我们通过着重介绍第一个要点，即虚拟流体的定义，来阐述虚拟流方法的主要思想。

对于二维问题，要定义虚拟流体，我们需要给定 4 个基本变量，分别取为压力，密度，法向速度和切向速度。如图 1 所示，我们考虑流体 1，构造 Riemann 问题：任意选择流体 1 中紧邻界面的网格点，寻找流体 2 中紧邻界面且与点法向所成的角最小的点。由于点和点流体的状态已知，分别设为  $U_A = (\rho^A, u_N^A, p^A)^T$ ， $U_B = (\rho^B, u_N^B, p^B)^T$ ，其中  $u_N^A$  和  $u_N^B$  分别为 A 点和 B 点的法向速度，这样在界面法向方向定义的 Riemann 问题的初始条件就可以取为：

$$U_0 = \begin{cases} U_A \\ U_B \end{cases}$$

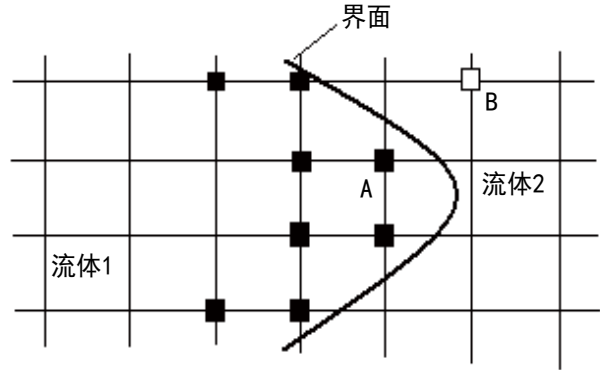


Figure 1. Define the ghost cell with RGFM in 2D

图 1. 二维 RGFM 方法虚拟流体定义

通过求解 Riemann 问题就可以得到界面处流体的流动状态： $\rho_L^I$ ， $\rho_R^I$ ， $u_N^I$ ， $p^I$ 。更新 A 点的状态，由于在界面处法向速度和压力连续，A 点的法向速度和压力分别取为  $u_N^I$  和  $p^I$ ，切向速度仍然取 A 点原来的切向速度，密度则取为  $\rho_L^I$ 。在流体 1 中紧邻界面的所有网格点的状态都得到了更新后，求解外推方程：

$$I_t \pm N \cdot \nabla I = 0 \quad (4)$$

如下定义流体 1 的虚拟流体：在流体 2 中选择带状区域，使得  $|\phi| < \chi$  ( $\chi$  为带状区域宽度，根据采用的数值格式不同，可选取不同的值，如采用三阶 ENO 格式，则可取  $\chi = 5\Delta$ ， $\Delta = \max(\Delta x, \Delta y)$ )。假设流体 1 中  $\phi < 0$ ，则在方程(4)中选择“+”，取  $I$  分别为压力、密度、法向速度和切向速度，在虚拟时间步内进行迭代，使得在带状区域内该方程的解收敛到定解，这样就使得界面处流体状态沿法线外推到 Ghost 点上，从而就定义了流体 1 的虚拟流体。

同理，可以定义流体 2 的虚拟流体，此时由于假定流体 1 中  $\phi < 0$ ，因此流体 2 中  $\phi > 0$ ，在利用方程(4)定义 Ghost 点状态时选择“-”。

上述内容详尽阐述了虚拟流方法中的第一要点，即如何定义虚拟流体。当定义完虚拟流体之后，运用数值方法即对每一种流体求解 Euler 方程，可以得到我们需要的流动状态数据，之后利用五阶 WENO 格式推进 Level-Set 方程，通过更新过的 Level Set 函数值可以重新确定全流场界面位置。

### 4. 水滴撞击试验

为提高结冰数值模拟效果，首先应进行水滴撞击数值模拟试验。试验需要建立水滴撞击特性模型，采

用 Level Set 方法研究不同尺寸的水滴撞击在机翼表面上的形变及其运动情况, 从而得出翼型表面水滴收集的特性。本文主要开展该项研究的初步工作, 即模拟水滴撞击固体表面发生形变的过程。以下是数值模拟试验背景:

1) 水滴垂直下落, 具有一定的初始速度, 在水滴撞击平板过程中考虑重力作用;

2) 水滴撞击平板时, 下方边界条件设定为固壁反射边界条件, 左右采用周期边界条件;

3) 参照文献[8], 本文先对半球水滴模型进行数值模拟试验, 而后进行整球水滴模型进行撞击模拟试验。

4) 对于每一部试验结果, 我们都计算相对于原有水滴的质量损失率, 用来评估数值试验的精确度。

需要说明的是, 在实际计算模拟过程中, 我们对 Level-Set 函数推进进行了相关处理, 对每一步 Level-Set 函数的推进, 不是利用流场当地的速度, 而是从界面处对整个流场速度进行外推更新, 之后再推后的流场速度推进 Level-Set 函数。用经过处理和未经过处理的方法都进行了水滴撞击数值试验, 试验结果表明有处理过程的 Level-Set 方法能够更准确的捕捉到界面。

#### 4.1. 半球水滴模型撞击试验结果及分析:

在  $[-0.1, 0.1] \times [0, 0.1]$  的区域上, 水滴圆心坐标为  $(0, 0)$ , 半径为 0.02, 流体的初始状态为: 水滴的密度为  $\rho_w = 1.0$ , 速度  $u_w = 0.0, v_w = -4.0$ , 压强  $p_w = 1.0$ ,  $\gamma_w = 7.15$ ; 空气的密度为  $\rho_G = 0.001$ , 速度  $u_G = 0.0, v_G = 0.0$ , 压强  $p_G = 1.0$ ,  $r_G = 1.4$ 。图 2 至 5 分别给出了不同时间  $t$  的密度云图。

由以上半球模型试验结果图可知, 试验得到了清晰的水滴撞击固壁的变化过程。以下我们选择部分数值试验结果与文献[8]的结果进行比较: 在图 6 中, 左边和中间分别为参考文献[8]的高速摄像与 VOF 方法(图中)计算水滴撞击固壁的试验结果, 右边为本次数值试验结果。通过比较, 本文数值试验结果一定程度上模拟出水滴撞击过程中的大致形态变化, 与实验结果大致吻合, 由于 Level Set 方法是不守恒的界面追踪方法, 界面的拓扑结构的复杂变化可能使 Level Set 函数不能精确的保持为距离符号函数, 因此定量上, 在数值模拟的过程中可能会造成水滴量上的流失。

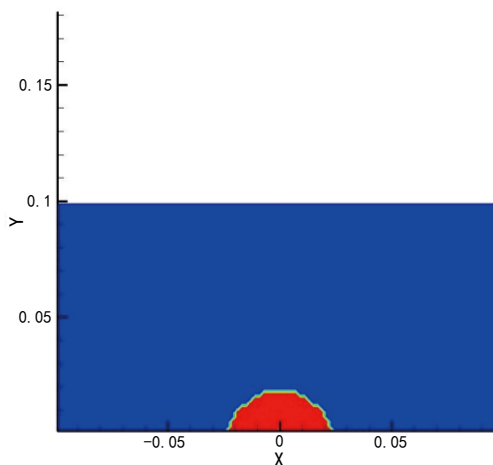


Figure 2.  $t = 0.000521$ , the lost ratio of droplet is 0.01%  
图 2.  $t = 0.000521$ , 水滴损失率 0.01%

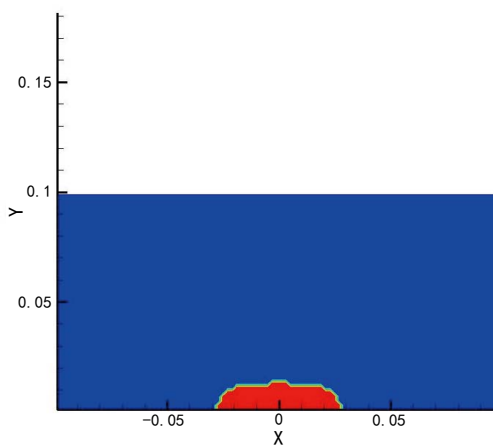


Figure 3.  $t = 0.001046$ , the lost ratio of droplet is 0.01%  
图 3.  $t = 0.001046$ , 水滴损失率 0.01%

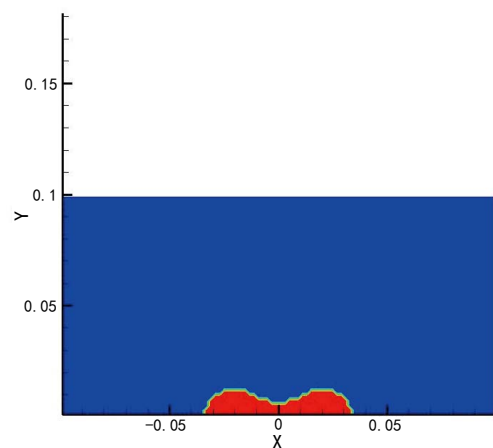


Figure 4.  $t = 0.003157$ , the lost ratio of droplet is 0.01%  
图 4.  $t = 0.003157$ , 水滴损失率 0.01%

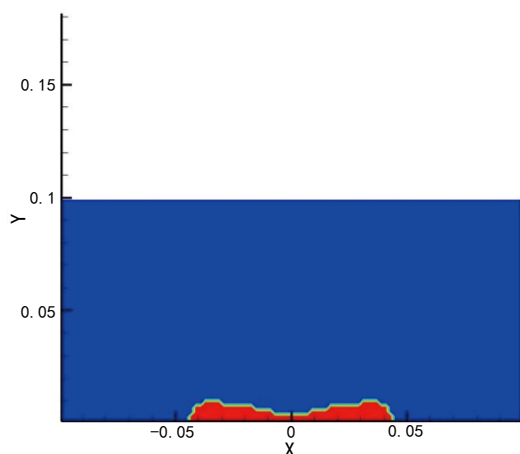


Figure 5.  $t = 0.008465$ , the lost ratio of droplet is 1.3%  
图 5.  $t = 0.008465$ , 水滴损失率 1.3%

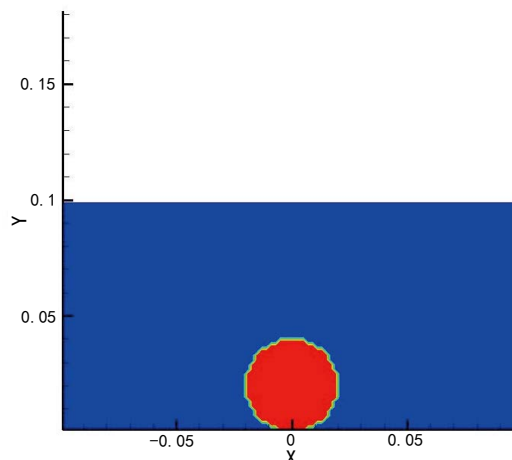


Figure 7.  $t = 0.000$ , the lost ratio of droplet is 0.0%  
图 7.  $t = 0.000$ , 水滴损失率 0.0%

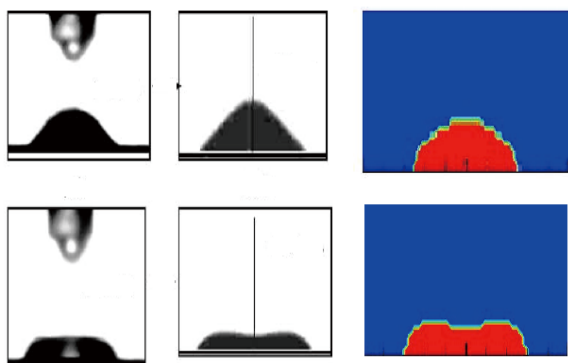


Figure 6. The contrast of splashing half droplet results  
图 6. 半球水滴撞击试验结果对比图

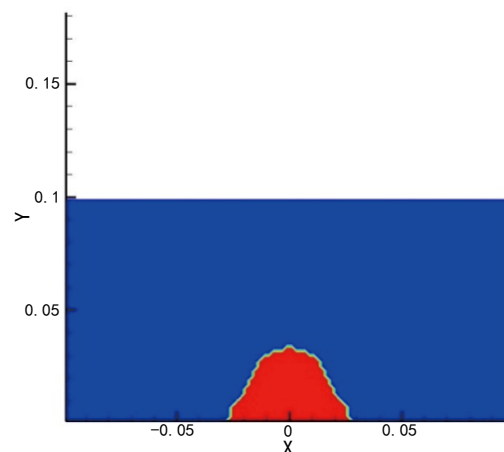


Figure 8.  $t = 0.001421$ , the lost ratio of droplet is 1.9%  
图 8.  $t = 0.001421$ , 水滴损失率 1.9%

#### 4.2. 整球水滴模型撞击试验结果及分析

在  $[-0.1, 0.1] \times [0, 0.1]$  的区域上, 水滴圆心坐标为  $(0, 0.02)$ , 半径为  $0.02$ , 流体的初始状态为: 水滴的密度为  $\rho_w = 1.0$ , 速度  $u_w = 0.0, v_w = -4.0$ , 压强  $p_w = 1.0$ ,  $\gamma_w = 7.15$ ; 空气的密度为  $\rho_G = 0.001$ , 速度  $u_G = 0.0, v_G = 0.0$ , 压强  $p_G = 1.0$ ,  $r_G = 1.4$ 。图 7 至 13 分别给出了不同时间  $t$  的密度云图。

在以上数值试验中, 通过对比发现, 半球模拟过程中能较好的模拟出水滴界面变化, 并且在模拟过程中水滴的损失率很小。在整球水滴的模拟过程中, 模拟水滴完全摊开过程中水滴的损失率比较大, 通过分析可能是由于界面的拓扑结果变化比较大, Level Set 函数不能保持为距离符号函数引起的水滴损失率变大。

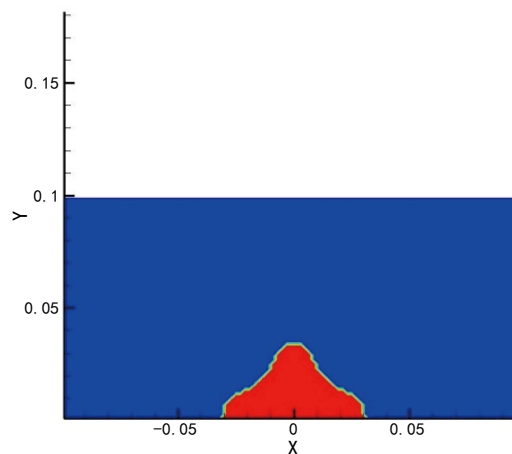


Figure 9.  $t = 0.001941$ , the lost ratio of droplet is 3.8%  
图 9.  $t = 0.001941$ , 水滴损失率 3.8%

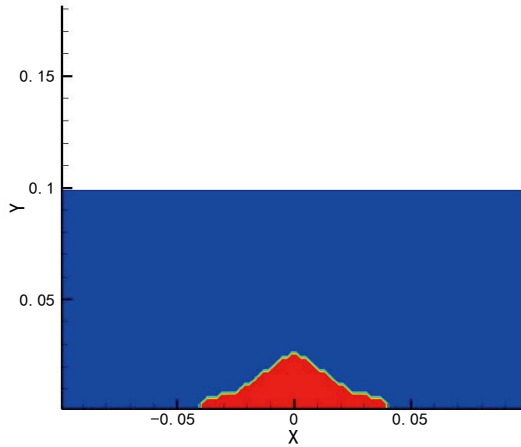


Figure 10.  $t = 0.002944$ , the lost ratio of droplet is 14.6%  
图 10.  $t = 0.002944$ , 水滴损失率 14.6%

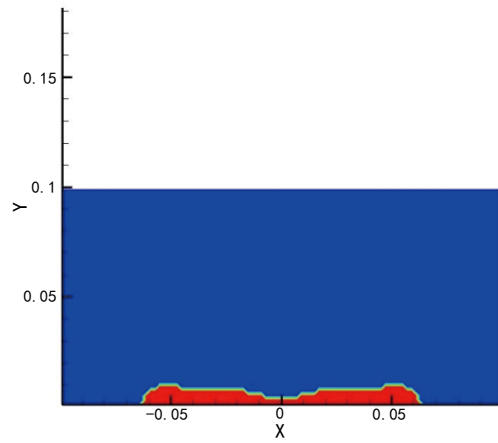


Figure 13.  $t = 0.015075$ , the lost ratio of droplet is 26.0%  
图 13.  $t = 0.015075$ , 水滴损失率 26.0%

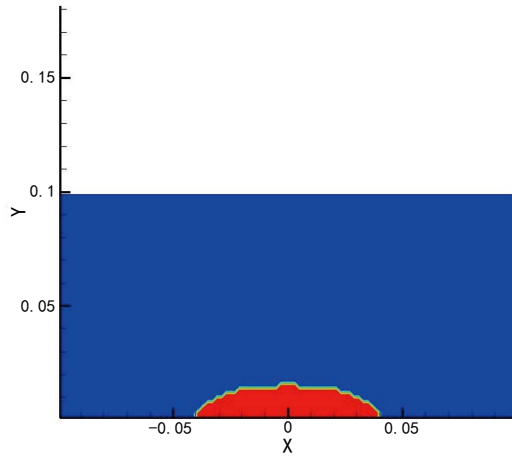


Figure 11.  $t = 0.008230$ , the lost ratio of droplet is 24.2%  
图 11.  $t = 0.008230$ , 水滴损失率 24.2%

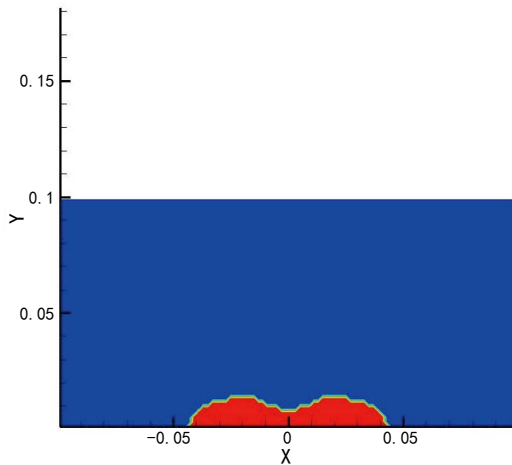


Figure 12.  $t = 0.006656$ , the lost ratio of droplet is 24.1%  
图 12.  $t = 0.006656$ , 水滴损失率 24.1%

## 5. 结束语

本文利用基于 Riemann 问题的 RGM 界面捕捉方法, 开展了水滴撞击问题的数值模拟试验, 通过对水滴数值试验的条件设定, 建立半球水滴模型、整球水滴模型, 对水滴撞击形变过程进行了数值模拟, 并计算了模拟过程中水滴质量的损失率, 数值试验的结果可以为提高飞行器部件表面结冰数值模拟精度进行研究积累。

## 参考文献 (References)

- [1] 朱春玲, 李宇钦, 张泉. 基于旋转多圆柱的冰风洞水滴参数分析方法[J]. 航空动力学报, 2007, 22(2): 180-186.
- [2] S. C. Crorso, Nielsen. Three-dimensional unstructured mesh procedure for iced wing flowfield and droplet trajectory calculations, 1994, AIAA-94-0486.
- [3] R. J. Shaw. Research. NASA's aircraft icing analysis program. National Aeronautics and Space Administration, 1986: No. NASA-TM-88791.
- [4] R. P. Fedkiw, Merriman B. A non-oscillatory Eulerian approach to interfaces in Multimaterial flows (the Ghost Method). Journal of Computational Physics, 1999, 152(2): 457-492.
- [5] T. G. Liu, B. C. Khoo, and K. S. Yeo. Ghost fluid method for strong shock impacting on material interface. Journal of Computational Physics, 2003, 190(2): 651-681
- [6] C. W. Wang, T. G. Liu and B. C. Khoo. A real ghost fluid method for the simulation of multimedium compressible flow. 2006 Society for Industrial and Applied Mathematics, 28(1): 278-302.
- [7] 王春武, 赵宁. 基于求解 Riemann 问题的界面处理方法[J]. 计算物理, 2005, 22(4): 306-310.
- [8] P. R. Gunjal, V. V. Ranade, and R. V. Chaudhari. Experimental and computational study of liquid drop over flat and spherical surfaces. Catalysis Today, 2003, 79-80: 267-273.