Management Science and Engineering 管理科学与工程, 2015, 4, 23-29
Published Online June 2015 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/mse
http://dx.doi.org/10.12677/mse.2015.42004

Study on Newsvendor Model with Lost Sale Penalty Cost under Criterion of Profit-CVaR

Pengfei Liu[1,2*], Siyun He[1]

[1]School of Transportation, Changsha University of Science & Technology, Changsha Hunan
[2]Key Laboratory of Highway Engineering Ministry of Education, Changsha University of Science & Technology, Changsha Hunan
Email: *pengfei71@163.com, 376493006@qq.com

Received: Jun. 5th, 2015; accepted: Jun. 20th, 2015; published: Jun. 25th, 2015

Abstract

In this paper, in a profit-CVaR framework, we study the impact of lost sale penalty cost and expected profit weight on a risk aversion newsvendor's optimal ordering quantity. A combination of the expected profit and CVaR is proposed, which reflects the desire of the risk-averse newsvendor to maximize the profit on the one hand and minimize the downside risk of the profit on the other hand. By using the combination as an objective function, the ordering strategies of the newsvendor are studied. We show that when there is lost sale penalty cost, the optimal ordering quantity depends on degree of risk aversion, expected profit weight and value of shortage cost. And then we illustrate our findings by examples.

Keywords

Newsvendor Model, Risk Aversion, Profit-CVaR, Lost Sale Penalty Cost

利润-CVaR准则下考虑缺货成本的报童模型研究

刘鹏飞[1,2*]，贺思云[1]

[1]长沙理工大学交通运输工程学院，湖南 长沙
[2]长沙理工大学公路工程省部共建教育部重点实验室，湖南 长沙

*通讯作者。

Email: *pengfei71@163.com, 376493006@qq.com

收稿日期：2015年6月5日；录用日期：2015年6月20日；发布日期：2015年6月25日

摘　要

本文研究了在利润-CVaR准则下，缺货惩罚成本和期望利润权重对厌恶风险的报童的最优订货量的影响。提出了一种组合的期望收益和风险，既反映报童追求高利润的愿望，又反映其对潜在风险的控制。采用该组合为目标函数，对报童的订货策略进行了研究。研究表明，考虑缺货惩罚时，最优订货量依赖于风险厌恶程度、期望利润值权重以及单位缺货惩罚成本，并通过数值算例进行验证。

关键词

报童模型，风险厌恶，利润-CVaR，缺货惩罚成本

1. 引言

传统报童模型关注的是确定最佳的订货数量从而使报童的期望收益最大。现实中需求的不确定性导致风险的存在，决策者对待风险态度的差异将影响其订货决策。国内外学者对基于风险理论的报童问题一直关注。Wang 等[1]运用效用函数讨论单周期损失厌恶的缺货惩罚报童问题，发现：若考虑缺货费用，风险厌恶报童的订购量比风险中性的大，且随批发价格的增加而增加，零售价格的减少而增加，但未讨论损失厌恶系数对最优订购量的影响。谭建等[2]在文献[1]的基础上，引入单位机会期望缺货惩罚、单位机会期望超量损失，运用期望效用理论讨论缺货惩罚与损失厌恶的报童模型，并分析损失厌恶系数对最优订购量的影响。Chen 等[3]采用均值方差方法分析报童模型，但未考虑缺货成本，认为风险规避报童的订购量小于风险中性报童的订购量。Wu 等[4]运用均值方差方法研究带有缺货成本的报童订购策略，认为缺货成本对报童的优化订购有显著影响，考虑缺货成本下，风险规避报童的订购量不一定比风险中性报童的订购量小。均值方差对称地处理收益与损失，并不适合于小概率事件的限制，难以很好地刻画风险。Özler 等[5]运用 VaR 度量方法研究多产品风险规避的报童问题。Choi 等[6]运用不变一致性风险度量讨论多产品风险规避的报童问题。VaR 只能衡量置信水平与目标水平之间预期的最大损失，而这种损失不具有代表性。Chen 等[7]仅考虑零售商存在残值处理而不考虑缺货惩罚时 CVaR 度量准则下报童的最优订购量，指出当没有缺货惩罚时，在风险厌恶环境下的最优订货量及期权购买量与风险厌恶程度具有单调性，最优总订购数量小于风险中性时的最优总订购数量。许明辉等[8]在风险厌恶环境下用 CVaR 方法对报童模型中存在缺货惩罚时进行了分析，指出零售商最优订购量与缺货惩罚单调递增，与零售商风险厌恶程度却不一定具有单调性；且风险厌恶零售商最优定购量与风险中性零售商最优订购量之间的大小关系依赖于需求分布、风险厌恶程度以及缺货惩罚大小。CVaR 只关注利润低于某个给定水平的利润平均值，而忽略利润高于该水平的情况，显得过于保守。Gotoh 等[9]和 Chen 等[10]以期望利润与 CVaR 的加权平均为准则研究给定外部环境下的订货策略，考虑决策者在少订货赢利不够与多订货滞销之间的一个平衡。柳键等[11]以利润-CVaR 准则研究风险厌恶零售商的订货策略，但未考虑缺货惩罚。利润-CVaR 既考虑了风险又兼顾了期望利润。既反映决策者追求高利润的愿望，又反映其对潜在风险的控制。

现实中，许多决策者超量订货，避免缺货，反映决策者对缺货损失厌恶的心态。因此，决策者订货决策与决策者的损失厌恶态度以及缺货损失高低可能有密切关系，所以，考虑缺货损失情形下损失厌恶

决策者的决策行为研究具有较强的现实意义。本文基于利润-CVaR 准则，考虑零售商面临随机需求，存在产品剩余损失和缺货损失的情况下，研究缺货损失因素、期望利润因素对损失厌恶零售商的最优订货决策的影响，为决策者的正确决策提供理论支持。

2. 报童模型构建

考虑风险厌恶的单个报童以批发价 ω 订购某种商品，以零售价 P 出售。假设该商品市场需求 x 是服从密度函数 f 的随机变量，其相应的分布函数 F 单调、可微。当商品剩余时，以处理价 s 进行处理；当商品供不应求时，以缺货惩罚 g 进行处理。根据现实情况，假设 $\{s,g\} \prec w \prec p$ 。

当报童订购量为 q 时，其期望利润为：

$$E\left[\pi(q,x)\right] = p\min(q,x) + s(q-x)^{+} - g(x-q)^{+} - \omega q = (p+g-\omega)q - gx - (p+g-s)(q-x)^{+} \tag{1}$$

其中 $z^{+} = \max\{z,0\}$ 。

报童的风险运用 CVaR 度量，在给定的条件和风险厌恶因子 β 下，利润低于某个给定 VaR 水平的平均值，即

$$\mathrm{CVaR}_{\beta}\left[\pi(q,x)\right] = \max\left\{v - \frac{1}{1-\beta}E\left[v-\pi(q,x)\right]^{+}\right\} \tag{2}$$

其中 v 为以 VaR 为风险度量的决策者期望最大化 $\mathrm{VaR}_{\beta}\pi(q,X,\varphi)$，

$$\mathrm{VaR}_{\beta}\pi(q,x) = \max_{v}\left\{v \middle| P\left(\pi(q,x) \ge v\right) \ge \beta\right\} \tag{3}$$

风险厌恶的报童兼顾风险与期望利润，期望利润权重为 λ ，CVaR 权重为 $1-\lambda$ ，其目标是最大化利润-CVaR：

$$\max\left\{\lambda E\left[\pi(q,x)\right] + (1-\lambda)\mathrm{CVaR}_{\beta}\left[\pi(q,x)\right]\right\} \tag{4}$$

其中 $\lambda \in [0,1]$ 。

3. 模型求解

$$\begin{aligned}
&\max_{q}\left\{\lambda E\left[\pi(q,x)\right] + (1-\lambda)\mathrm{CVaR}_{\beta}\left[\pi(q,x)\right]\right\} \\
&= \max_{q}\left\{\lambda E\left[\pi(q,x)\right] + (1-\lambda)\max_{v}\left\{v - \frac{1}{1-\beta}E\left[v-\pi(q,x)\right]^{+}\right\}\right\} \\
&= \max_{q,v}\left\{\lambda E\left[\pi(q,x)\right] + (1-\lambda)\left\{v - \frac{1}{1-\beta}E\left[v-\pi(q,x)\right]^{+}\right\}\right\}
\end{aligned} \tag{5}$$

令 $G(q,v) = \lambda E\left[\pi(q,x)\right] + (1-\lambda)\left\{v - \frac{1}{1-\beta}E\left[v-\pi(q,x)\right]^{+}\right\}$ ，对每个固定 q ，

$$\begin{aligned}
\frac{\partial G}{\partial v} &= (1-\lambda)\left\{1 - \frac{1}{1-\beta}E\left[1_{v \succ \pi(q,x)}\right]\right\} \\
&= (1-\lambda)\left\{1 - \frac{1}{1-\beta}\left[\int_{0}^{q} 1_{v \succ (p-s)x + (s-\omega)q} \cdot f(x)\mathrm{d}x + \int_{q}^{\infty} 1_{v \succ (p+g-\omega)q - gx} \cdot f(x)\mathrm{d}x\right]\right\} \\
&= (1-\lambda)\left\{1 - \frac{1}{1-\beta}\left[\int_{0}^{\min\left\{q,\frac{v+(\omega-s)q}{p-s}\right\}} f(x)\mathrm{d}x + \int_{\max\left\{q,\frac{(p+g-\omega)q-v}{g}\right\}}^{\infty} f(x)\mathrm{d}x\right]\right\}
\end{aligned} \tag{6}$$

① 当 $v \le (s-\omega)q$ 时

$$\frac{\partial G}{\partial v} = (1-\lambda)\left\{1 - \frac{1}{1-\beta}\int_{\frac{(p+g-\omega)q-v}{g}}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x\right\} \tag{7}$$

由一阶条件，得

$$v^* = \overline{v} = (p+g-\omega)q - gF^{-1}(\beta) \tag{8}$$

② 当 $(s-\omega)q \prec v \le (p-\omega)q$ 时

$$\begin{aligned}\frac{\partial G}{\partial v} &= (1-\lambda)\left\{1 - \frac{1}{1-\beta}\left[\int_0^{\frac{v+(\omega-s)q}{p-s}} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{\frac{(p+g-\omega)q-v}{g}}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x\right]\right\} \\ &= (1-\lambda)\left\{1 - \frac{1}{1-\beta}\left[F\left(\frac{v+(\omega-s)q}{p-s}\right)\right] + 1 - F\left(\frac{(p+g-\omega)q-v}{g}\right)\right\}\end{aligned} \tag{9}$$

特别：$\left.\frac{\partial G}{\partial v}\right|_{v=(s-\omega)q} = (1-\lambda)\left\{1 - \frac{1}{1-\beta}\left[1 - F\left(\frac{(p+g-s)q}{g}\right)\right]\right\}$，$\left.\frac{\partial G}{\partial v}\right|_{v=(p-\omega)q} = (1-\lambda)\left\{1 - \frac{1}{1-\beta}\right\} \prec 0$。

若 $\left.\frac{\partial G}{\partial v}\right|_{v=(s-\omega)q} \succ 0$，则存在 $\hat{v} \in \left((s-\omega)q, (p-\omega)q\right)$，使得 $\left.\frac{\partial G}{\partial v}\right|_{v=\hat{v}} = 0$。

由一阶条件，得：

$$F\left(\frac{\hat{v}+(\omega-s)q}{p-s}\right) - F\left(\frac{(p+g-\omega)q-\hat{v}}{g}\right) = -\beta \tag{10}$$

③ 当 $v \succ (p-\omega)q$ 时

$$\frac{\partial G}{\partial v} = (1-\lambda)\left\{1 - \frac{1}{1-\beta}\right\} \prec 0 \tag{11}$$

上述分析可得，存在 v^* 使得 $\max G(q,v) = G(q,v^*)$。

令

$$v^* = \arg\max_{v} G(q,v) = \begin{cases} \overline{v}, & \text{若} 1 - \frac{1}{1-\beta}\left[1 - F\left(\frac{(p+g-s)q}{g}\right)\right] \le 0 \\ \hat{v}, & \text{其它} \end{cases} \tag{12}$$

若 $q \le \frac{gF^{-1}(\beta)}{p+g-s}$，则

$$\max_{v} G(q,v) = \lambda E\left[\pi(q,x)\right] + (1-\lambda)\left\{\overline{v} - \frac{1}{1-\beta}\int_{\frac{(p+g-\omega)q-\overline{v}}{g}}^{\infty}\left[\overline{v} - (p+g-\omega)q + gx\right]\cdot f(x)\,\mathrm{d}x\right\} \tag{13}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial \max_{v} G(q,v)}{\partial q} &= \lambda\left[(p+g-\omega) - (p+g-s)F(q)\right] + (1-\lambda)(p+g-\omega) \\ &= (p+g-\omega) - \lambda(p+g-s)F(q)\end{aligned} \tag{14}$$

由一阶条件，得：

$$q^* = F^{-1}\left(\frac{p+g-\omega}{\lambda(p+g-s)}\right) \tag{15}$$

若 $q \succ \dfrac{gF^{-1}(\beta)}{p+g-s}$，则

$$\max_{v} G(q,v)=\lambda E\left[\pi(q,x)\right]+(1-\lambda)\left\{\hat{v}-\frac{1}{1-\beta}\left[\int_{0}^{\frac{\hat{v}+(\omega-s)q}{p-s}}\left[\hat{v}+(\omega-s)q-(p-s)x\right]f(x)\mathrm{d}x\right.\right.$$
$$\left.\left.+\int_{\frac{(p+g-\omega)q-\hat{v}}{g}}^{\infty}\left[\hat{v}+gx-(p+g-\omega)q\right]f(x)\mathrm{d}x\right]\right\} \tag{16}$$

$$\frac{\partial \max\limits_{v} G(q,v)}{\partial q}=\lambda(p+g-\omega)-\lambda(p+g-s)F(q)$$
$$+(1-\lambda)\left[-\frac{\omega-s}{1-\beta}F\left(\frac{\hat{v}+(\omega-s)q}{p-s}\right)+\frac{p+g-\omega}{1-\beta}\left(1-F\left(\frac{(p+g-\omega)q-\hat{v}}{g}\right)\right)\right] \tag{17}$$
$$=(p+g-\omega)-\lambda(p+g-s)F(q)+(1-\lambda)\left[-\frac{p+g-s}{1-\beta}F\left(\frac{\hat{v}+(\omega-s)q}{p-s}\right)\right]$$

由一阶条件，得：

$$(1-\beta)\left[(p+g-\omega)-\lambda(p+g-s)F(q)\right]=(1-\lambda)(p+g-s)F\left(\frac{\hat{v}+(\omega-s)q}{p-s}\right) \tag{18}$$

4. 数值分析

某商品市场需求服从正态分布 $N\sim\left(1000,100^2\right)$，报童以批发价 $\omega=5.5$ 元订购该商品，以零售价 $p=6$ 元出售，当商品剩余时，以处理价 $s=3$ 元进行处理；当商品供不应求时，以缺货惩罚 $g=2$ 元进行处理。考虑不同的风险厌恶因子 β、期望利润权重 λ 下，报童的最优订购量 q，如表 1 所示。

从表 1 中可看出，当 $\beta=0$ 时，报童的最优订货量是一样的，这时因为当 $\beta=0$ 时，利润-CVaR 最优就是期望利润最优；因此这时无论 λ 取什么值，式(4)相当于期望利润。当 $\lambda=1$ 时，报童的最优订货量是一样的，且与 $\beta=0$ 时的最优订购量相同，这时因为当 $\lambda=1$ 时，利润-CVaR 最优就是期望利润最优，因此这时无论 β 取什么值，式(4)相当于期望利润。

从表 1 中还可看出，风险厌恶时报童的最优订货量总是低于风险中性时的，且随风险厌恶因子 β 的增加，其最优订货量不断减少。当风险厌恶因子 β 保持不变时，其最优订货量随 λ 的增加而增加，这是因为随期望利润权重 λ 的不断增加，CVaR 的权重 $1-\lambda$ 在减少，相当于弱化了风险厌恶的作用，或者说更偏好于风险中性。

取报童的风险厌恶因子 $\beta=0.5$，其他条件不变。考虑缺货惩罚 g 取不同值时，期望利润权重 λ 对订购量 q 的影响，如图 1 所示；考虑期望利润权重 λ 取不同值时，缺货惩罚 g 对订购量 q 的影响，如图 2 所示。综合考虑缺货惩罚 g、期望利润权重 λ 对订购量 q 的影响，如图 3 所示。

从图 1 可看出，不同的缺货惩罚 g 下，期望利润权重 λ 对订购量 q 的影响是不同的，如 $g=2$ 时，其最优订货量 q 随着期望利润权重 λ 的增加而增加；如 $g=6$ 时，其最优订货量 q 随着期望利润权重 λ 的增加而几乎不变；如 $g=8$ 时，其最优订货量 q 随着期望利润权重 λ 的增加反而减少。

从图 2 可看出，无论期望利润权重 λ 取不同值，是否考虑缺货惩罚对订货量影响非常大，其最优订货量 q 随着缺货惩罚 g 的增加而增加，缺货惩罚从 0 到 1 时，最优订购量急增，缺货惩罚从 1 到 7 时，最优订购量渐增。

从图 3 可看出，最优订货量受到缺货惩罚 g 和期望利润权重 λ 的双重影响。

Table 1. Newsvendor's optimal order quantity under β, λ
表 1. 不同 β，λ 下报童的最优订购量

β \ λ	0	0.4	0.5	0.8	1
0	1000	1000	1000	1000	1000
0.5	987	991	992	997	1000
0.8	975	981	983	991	1000

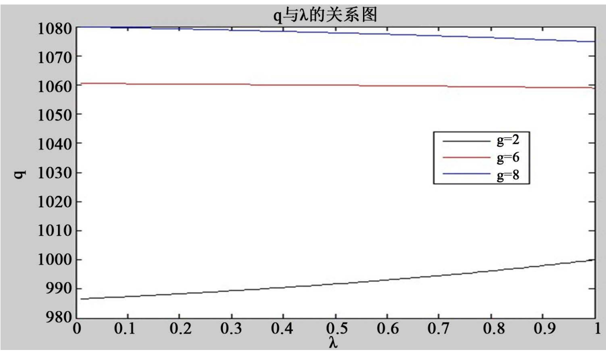

Figure 1. Relationship between the order quantity and the weight of the expectation profit
图 1. 订货量与期望利润权重的关系

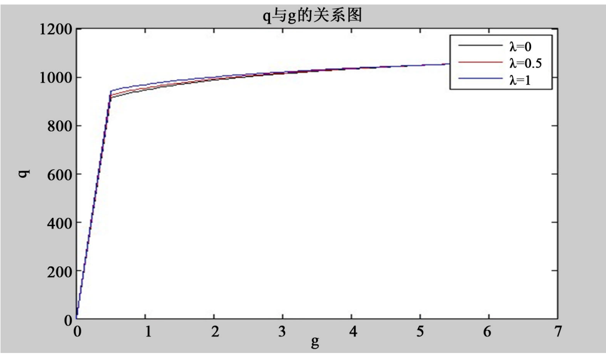

Figure 2. The relationship between the quantity of order and the penalty of shortage of goods
图 2. 订货量与缺货惩罚的关系

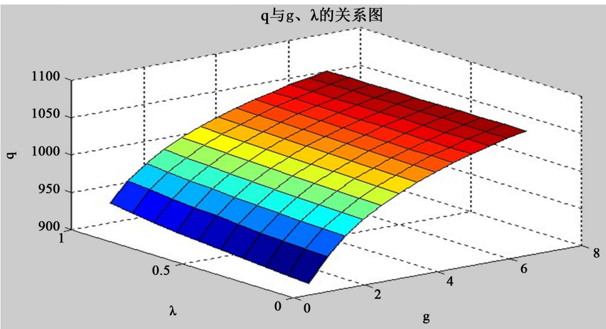

Figure 3. The relationship between the quantity of order quantity and the penalty of shortage of stock and the weight of expectation
图 3. 订货量与缺货惩罚和期望利润权重的关系

5. 结束语

考虑风险厌恶的报童既有追求高利润的动机，又有控制潜在风险的意愿，运用期望利润和 CVaR 的加权平均作为目标函数，优化其在考虑缺货惩罚时的订货决策。通过数值分析表明，风险厌恶程度、期望利润权重以及单位缺货惩罚等因素共同决定风险厌恶报童的最优订货量。

基金项目

教育部人文社会科学研究规划基金(13YJA630055)；长沙理工大学公路工程省部共建教育部重点实验室开放基金资助项目(kfj120104)；湖南省现代企业管理研究中心开放基金(13QGB1)。

参考文献 (References)

[1] Wang, C.X. and Webster, S. (2009) The loss-averse newsvendor problem. *Omega*, **37**, 93-105.

[2] 谭建，王先甲 (2010) 缺货惩罚下的损失厌恶报童模型. *武汉大学学报(工学版)*, **5**, 677-680.

[3] Chen, F. and Federgruen, A. (2000) Mean-variance analysis of basic inventory models. Columbia University, New York.

[4] Wu, J., Li, J., Wang, S.Y. and Cheng, T.C.E. (2009) Mean-Variance Analysis of the Newsvendor Model with Stockout Cost. *Omega*, **37**, 724-730.

[5] Özler, A., Tan, B. and Karaesmen, F. (2009) Multi-product newsvendor problem with value-at-risk considerations. *International Journal of Production Economics*, **117**, 244-255.

[6] Choi, S.Y., Ruszczynski, A. and Zhao, Y. (2011) A multiproduct risk-averse newsvendor with law-invariant coherent measures of risk. *Operations Research*, **59**, 346-364.

[7] Chen, X., Sim, M., Levi, D.S. and Sun, P. (2007) Risk aversion in inventory management. *Operations Research*, **55**, 828-842.

[8] 许明辉，于刚，张汉勤 (2006) 带有缺货惩罚的报童模型中的 CVaR 研究. *系统工程理论与实践*, **10**, 1-8.

[9] Gotoh, J.Y. and Seshadri, S. (2005) Hedging inventory risk through market instruments. *Manufacturing & Service Operations Management*, **7**, 103-120.

[10] Chen, Y.H., Xu, M H. and Zhang, Z.G. (2009) Technical note—A risk-averse newsvendor model under the CVaR criterion. *Operations Research*, **4**, 1040-1044.

[11] 柳键，罗春林 (2010) 利润-CVaR 准则下的二级供应链定价与订货策略研究. *控制与决策*, **1**, 130-133.