

Two Efficient Numerical Schemes for the Allen-Cahn Equation

Nan Zheng, Shuying Zhai, Zhifeng Weng

School of Mathematical Sciences HuaQiao University, Quanzhou Fujian
Email: zhaishuying123456@163.com

Received: May 6th, 2017; accepted: May 21st, 2017; published: May 27th, 2017

Abstract

Based on the idea of operator splitting, this paper proposes two efficient operator splitting schemes for the Allen-Cahn equation. The original equation is divided into linear and nonlinear parts. The linear part is approximated numerically by two different schemes: the second-order center difference scheme and the fourth-order compact difference scheme. The stability analysis of both schemes is discussed according to a Fourier stability analysis. The nonlinear part is solved accurately. Numerical comparisons are carried out to verify the accuracy and efficiency of the proposed methods, and to verify the given schemes satisfied the law of decreasing energy.

Keywords

Splitting Method, Heat Conduction Equation, Padé Approximation, Fourth-Order Compact Scheme, Energy Decline

求解Allen-Cahn方程的两种高效数值格式

郑楠, 翟术英, 翁智峰

华侨大学数学科学学院, 福建 泉州
Email: zhaishuying123456@163.com

收稿日期: 2017年5月6日; 录用日期: 2017年5月21日; 发布日期: 2017年5月27日

摘要

基于算子分裂思想, 本文提出了求解Allen-Cahn方程的两种高效算子分裂格式。首先将此方程分裂为线性项与非线性项两个部分: 对线性部分, 通过二阶中心差分法与四阶紧致差分法分别进行数值计算, 并利用傅里叶方法给出了稳定性的分析; 对非线性部分进行精确求解。最后, 通过数值算例比较两种算子

分裂格式的数值解差异以及运行效率，而且验证了两种格式满足能量递减规律。

关键词

算子分裂算法，热传导方程，帕德逼近，四阶紧致差分格式，能量递减

Copyright © 2017 by authors and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

Allen-Cahn 方程是一类非齐次半线性泊松方程。1979 年，为了描述晶体中反相位边界运动，Allen 和 Cahn [1] 引入了 Allen-Cahn 方程。该方程是材料科学中描述流体动力学问题和反应扩散问题的一类重要方程，且在描述生物种群的竞争与排斥现象[2]、河床的迁移过程[3]等许多扩散现象的研究中也提出同样的数学模型。对 Allen-Cahn 方程的研究是在上个世纪七十年代以后开始的。

设基本能泛函为 $E(u)$ ，是由 u 离开物相的惩罚项 $F(u)$ 和扩散项 ∇u 决定，可表示为：

$$E(u) = \int_a^b \left[\frac{1}{\varepsilon^2} F(u) + \frac{1}{2} |\nabla u|^2 \right] dx \quad (1)$$

其中 $F(u) = \frac{1}{4}(u^2 - 1)^2$ 关于 u 求导得到 $F(u)' = u(u^2 - 1)$ 。作图得 $F(u)$ 的图像如图 1 所示。从而 $u = \pm 1$ 为图像的稳定点，也是极小值点。

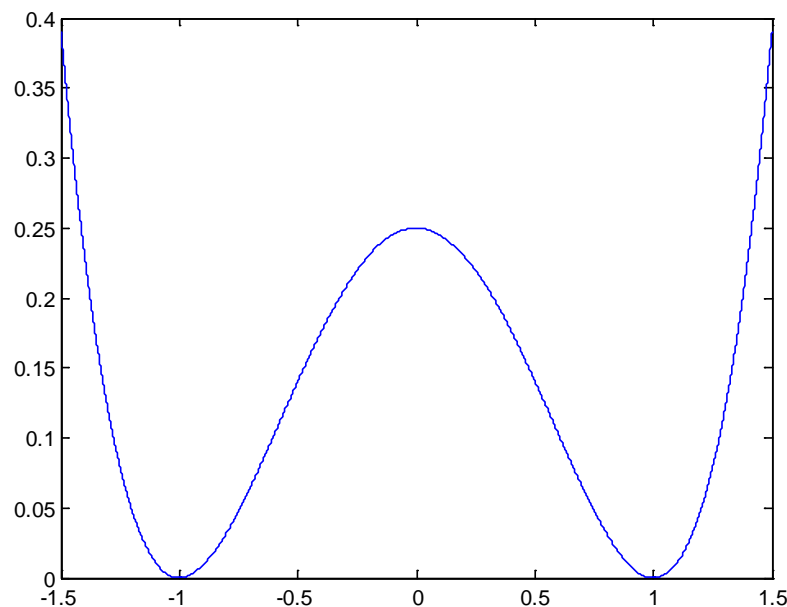


Figure 1. Curve: the figure of $F(u) = \frac{1}{4}(u^2 - 1)^2$

图 1. $F(u) = \frac{1}{4}(u^2 - 1)^2$ 的图像

通过对式(1)进行变分、Taylor 展开从而可得到如下 Allen-Cahn 方程:

$$\begin{cases} u_\tau + \frac{1}{\varepsilon^2}u(u^2 - 1) - \Delta u = 0, x \in [a, b], \tau \in [0, T] \\ u(a, \tau) = 1, u(b, \tau) = -1, \tau \in [0, T] \\ u_0(x) = u(x, 0), x \in [a, b] \end{cases} \quad (2)$$

Allen-Cahn 方程广泛运用于处理各种问题, 例如图像分析[4], [5], 平均曲率-流量[6], 和晶体生长[7]。人们对 Allen-Cahn 方程进行数值计算时, 采用算子分裂算法[8]进行方程的求解计算, 能够将一个复杂的算子分裂成几个较简单的子算子之积, 从而把一个复杂的数学物理问题分裂成一些简单的问题来求解。它既适用于典型的双曲型方程和抛物型方程, 也适用于更为复杂的方程的初边值问题, 且分裂后的方程更加容易求解、格式灵活、稳定性好。

经典的算子分裂格式有 Marchuk-Strang 分裂格式、Trotter-Lie 分裂格式[9], [10], [11], [12]以及对称加权分裂格式[13], [14]等。本文采用二阶精度的 Marchuk-Strang 算子分裂格式[15], 将原始方程分裂为线性部分和非线性部分。其中线性部分的数值解算子记为 S^A , 非线性部分的精确解算子记为 S^B , 则上述问题可通过以下三步格式进行求解, 即

$$u(t + \Delta t) = S^B\left(\frac{t}{2}\right)S^A(t)S^B\left(\frac{t}{2}\right)u(t) \quad (3)$$

该算子分裂算法的主要优点是算子 S^A 与算子 S^B 可以分别通过不同的数值计算方法进行求解。这里我们对线性部分 S^A 采用构造差分的方法, 实验证明 Crank-Nicolson 格式[16]是最为稳定, 且误差值是最小的。本文采用的高精度有限差分方法是紧致差分法。最后, 通过数值实验比较了两种格式数值解差异及运行效率。

2. 算子分裂法求解 Allen-Cahn 方程

2.1. 两种求解 Allen-Cahn 方程的高效算子分裂方法

运用算子分裂方法[17]求解 Allen-Cahn 方程数值解具体过程如下:

- 1) 计算前半步算子 S^B , 其中 $t \in \left[t_m, t_{m+\frac{1}{2}}\right]$;
- 2) 计算完整一步算子 S^A , 其中 $t \in [t_m, t_{m+1}]$, 且 $u^m = u^{\frac{t}{m+\frac{1}{2}}}$;
- 3) 计算后半步算子 S^B , 其中 $t \in \left[t_{m+\frac{1}{2}}, t_{m+1}\right]$, 且 $u^{\frac{t}{m+\frac{1}{2}}} = u^{m+1}$;

在 Allen-Cahn 方程 $u_t + \frac{1}{\varepsilon^2}(u^2 - 1) - \Delta u = 0$ 中, 根据上述算子分裂算法, 可将方程分解为: 热传导方程

$$S^A : u_t - \Delta u = 0 \quad (4)$$

和非线性方程

$$S^B : u_t + \frac{1}{\varepsilon^2}u(u^2 - 1) = 0 \quad (5)$$

因此, Allen-Cahn 方程的求解可通过 3 个子步实现[18], 即:

$$u(t + \Delta t) = S^A\left(\frac{t}{2}\right)S^B(t)S^A\left(\frac{t}{2}\right)u(t) \quad (6)$$

或者

$$u(t + \Delta t) = S^B \left(\frac{t}{2} \right) S^A(t) S^B \left(\frac{t}{2} \right) u(t) \quad (7)$$

其中热传导方程 S^A 可通过下文 2.3 及 2.4 节的格式计算得到。非线性方程 S^B 可通过如下解析式[19]得到:

$$u = \frac{u^*}{\sqrt{e^{-2\tau/\varepsilon^2} + (u^*)^2 \cdot (1 - e^{-2\tau/\varepsilon^2})}} \quad (8)$$

2.2. 二阶中心差分格式计算热传导方程

取空间节点数为 N , 空间步长为 $h = \frac{b-a}{N}$, 空间节点可表示为 $x_i = a + hi$ 。取时间节点数为 M , 时间步长为 $\tau = \frac{T}{M}$, 时间节点可表示为 $t_i = \tau \cdot i$ 。同时记 $u_i^m = u(x_i, t_m)$ 。

令:

$$\delta_x^2 u_i = \frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{h^2} \quad (9)$$

则方程(4)有如下 CN 格式:

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\tau} = \frac{1}{2} (\delta_x^2 u_i^{n+1} + \delta_x^2 u_i^n) \quad (10)$$

容易验证上式精度为 $O(\tau^2 + h^2)$, 进一步化简可得:

$$-\tau \cdot u_{i-1}^{n+1} + (2\tau + 2h^2) \cdot u_i^{n+1} - \tau \cdot u_{i+1}^{n+1} = \tau \cdot u_{i-1}^n + (-2\tau + 2h^2) \cdot u_i^n + \tau \cdot u_{i+1}^n \quad (11)$$

为进一步验证格式的有效性, 将对其做收敛性分析。

定理 1. 差分方程按谱范数稳定的充分必要条件是对于任意均成立 $0 \leq \tau \leq \tau_0$, $0 \leq n\tau \leq T$, 均成立:

$$|G(\tau, k)| \leq 1 + O(\tau)$$

证明:

令 $\lambda = \frac{\tau}{h^2}$, 式(11)可化为:

$$-\lambda \cdot u_{i-1}^{n+1} + (2\lambda + 2) \cdot u_i^{n+1} - \lambda \cdot u_{i+1}^{n+1} = \lambda \cdot u_{i-1}^n + (-2\lambda + 2) \cdot u_i^n + \lambda \cdot u_{i+1}^n$$

利用 Fourier 方法, 令 $u_j^n = v^n e^{ikjh}$, 得:

$$v^{n+1} = \frac{\lambda \cdot e^{ikjh} - (2\lambda - 2) + \lambda \cdot e^{-ikjh}}{-\lambda \cdot e^{ikjh} + (2\lambda + 2) - \lambda \cdot e^{-ikjh}} \cdot v^n$$

由此得到增长因子:

$$\begin{aligned} G(\tau, k) &= \frac{\lambda \cdot e^{ikjh} - (2\lambda - 2) + \lambda \cdot e^{-ikjh}}{-\lambda \cdot e^{ikjh} + (2\lambda + 2) - \lambda \cdot e^{-ikjh}} = \frac{(1 - \lambda) + \frac{1}{2} \lambda (e^{ikjh} + e^{-ikjh})}{(1 + \lambda) - \frac{1}{2} \lambda (e^{ikjh} - e^{-ikjh})} \\ &= \frac{1 - \lambda(1 - \cos kh)}{1 + \lambda(1 - \cos kh)} = \frac{1 - 2 \cdot \lambda \sin^2 \frac{kh}{2}}{1 + 2 \cdot \lambda \sin^2 \frac{kh}{2}} \end{aligned}$$

从而 $|G(\tau, k)| \leq 1$, 此格式无条件稳定。

由于 S^B 是精确求解, 所以此定理表明整个分裂算法的格式都是稳定的。

2.3. 四阶紧致差分格式计算热传导方程

上文 2.2 节所用格式得到的精度为 $O(\tau^2 + h^2)$, 为了提高计算精度, 本节引入如下四阶帕德逼近格式:

$$u''(x_i) = \frac{\delta_x^2 u(x_i)}{1 + \frac{h^2}{12} \frac{d^2}{dx^2}} + O(h^4) \quad (12)$$

结合(12)及 CN 格式, 可得求解 S^A 的如下高阶紧致差分格式:

$$\frac{u^n - u^{n-1}}{\tau} = \frac{1}{2} \left(\frac{\delta_x^2}{1 + \frac{h^2}{12} \delta_x^2} \cdot u^n + \frac{\delta_x^2}{1 + \frac{h^2}{12} \delta_x^2} \cdot u^{n-1} \right) \quad (13)$$

容易验证上式精度为 $O(\tau^2 + h^4)$, 进一步可化简得:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1}{6} h^2 - dt \right) u_{i-1}^{n+1} + \left(2dt + \frac{5}{3} h^2 \right) u_i^{n+1} + \left(\frac{1}{6} h^2 - dt \right) u_{i+1}^{n+1} \\ & = \left(\frac{1}{6} h^2 + dt \right) u_{i-1}^n + \left(-2dt + \frac{5}{3} h^2 \right) u_i^n + \left(\frac{1}{6} h^2 + dt \right) u_{i+1}^n \end{aligned} \quad (14)$$

为进一步验证格式的有效性, 将对其做收敛性分析。

定理 1. 差分方程按谱范数稳定的充分必要条件是对于任意均成立 $0 \leq \tau \leq \tau_0$, $0 \leq n\tau \leq T$, 均成立:

$$|G(\tau, k)| \leq 1 + O(\tau)$$

证明:

令 $\lambda = \frac{\tau}{h^2}$, 式(14)可化为:

$$\begin{aligned} & \left(-\lambda + \frac{1}{6} \right) \cdot u_{i-1}^{n+1} + \left(2\lambda + \frac{5}{3} \right) \cdot u_i^{n+1} + \left(-\lambda + \frac{1}{6} \right) \cdot u_{i+1}^{n+1} \\ & = \left(\lambda + \frac{1}{6} \right) \cdot u_{i-1}^n + \left(-2\lambda + \frac{5}{3} \right) \cdot u_i^n + \left(\lambda + \frac{1}{6} \right) \cdot u_{i+1}^n \end{aligned}$$

利用 Fourier 方法, 令 $u_j^n = v^n e^{ikjh}$, 得:

$$v^{n+1} = \frac{\left(\lambda + \frac{1}{6} \right) \cdot e^{ikjh} + \left(-2\lambda + \frac{5}{3} \right) + \left(\lambda + \frac{1}{6} \right) \cdot e^{-ikjh}}{\left(-\lambda + \frac{1}{6} \right) \cdot e^{ikjh} + \left(2\lambda + \frac{5}{3} \right) + \left(-\lambda + \frac{1}{6} \right) \cdot e^{-ikjh}} \cdot v^n$$

由此得到增长因子:

$$\begin{aligned} G(\tau, k) &= \frac{\left(\lambda + \frac{1}{6} \right) \cdot e^{ikjh} + \left(-2\lambda + \frac{5}{3} \right) + \left(\lambda + \frac{1}{6} \right) \cdot e^{-ikjh}}{\left(-\lambda + \frac{1}{6} \right) \cdot e^{ikjh} + \left(2\lambda + \frac{5}{3} \right) + \left(-\lambda + \frac{1}{6} \right) \cdot e^{-ikjh}} = \frac{\left(\frac{1}{3} + 2\lambda \right) \cdot \cos kh + \frac{5}{3} - 2\lambda}{\left(\frac{1}{3} - 2\lambda \right) \cdot \cos kh + \frac{5}{3} + 2\lambda} \\ &= \frac{\frac{1}{3} \cos kh + \frac{5}{3} - 2\lambda \cdot (1 - \cos kh)}{\frac{1}{3} \cos kh + \frac{5}{3} + 2\lambda \cdot (1 - \cos kh)} = \frac{\frac{1}{3} \cos kh + \frac{5}{3} - 4\lambda \cdot \sin^2 \frac{kh}{2}}{\frac{1}{3} \cos kh + \frac{5}{3} + 4\lambda \cdot \sin^2 \frac{kh}{2}} \end{aligned}$$

从而 $|G(\tau, k)| \leq 1$ ，此格式无条件稳定。

由于 S^B 是精确求解，所以此定理表明整个分裂算法的格式都是稳定的。

3. 数值算例

在本节，将通过数值算例来验证算子分裂格式的收敛阶和稳定性。为方便分析，对如下符号进行解释：

$$Err_\infty = \max_{1 \leq i \leq N, 1 \leq m \leq M} |u(x_i, t^m) - u_i^m|;$$

$$Err_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^N [u(x_i, t^m) - u_i^m]^2};$$

$$\text{CI-ABA: } u^{m+1} = S^A\left(\frac{t}{2}\right) S^B(t) S^A\left(\frac{t}{2}\right) u^m;$$

$$\text{CI-ABA: } u^{m+1} = S^B\left(\frac{t}{2}\right) S^A(t) S^B\left(\frac{t}{2}\right) u^m$$

其中 S^A 通过二阶中心差分法求得；

$$\text{CII-ABA: } u^{m+1} = S^A\left(\frac{t}{2}\right) S^B(t) S^A\left(\frac{t}{2}\right) u^m;$$

$$\text{CII-ABA: } u^{m+1} = S^B\left(\frac{t}{2}\right) S^A(t) S^B\left(\frac{t}{2}\right) u^m$$

其中 S^A 通过二阶中心差分法求得；

3.1. 算例一

为验证收敛阶，本文选取文献[20]作为数值算例。Allen-Cahn 方程的精确解为：

$$u = \frac{1}{2} \left(1 - \tanh \left(\frac{x - st}{2\sqrt{2\varepsilon}} \right) \right) \quad (15)$$

其中 $s = \frac{3}{\sqrt{2\varepsilon}}$ 。且其区域的取值范围为 $(-7, 13) \times (0, 1]$ ， $\varepsilon = 0.3$ 。

□ 现欲验证所用算法格式 ABA 与 BAB 的高效性和准确性。

假设 $Err_\infty(\tau, h) = O(\tau^p + h^q)$ ，当 h 取充分小值时，得到 $Err_\infty(\tau, h) = c_1 \tau^p$ ，且

$$p \approx \log \frac{Err_\infty(\tau_1, h)}{Err_\infty(\tau_2, h)} \bigg/ \log \left(\frac{\tau_1}{\tau_2} \right) \quad (16)$$

当 τ 取充分小值时，可得到 $Err_\infty(\tau, h) = c_2 h^q$ ，且

$$q \approx \log \frac{Err_\infty(\tau, h_1)}{Err_\infty(\tau, h_2)} \bigg/ \log \left(\frac{h_1}{h_2} \right) \quad (17)$$

由上得到收敛阶的表达式，以下记为 Rate。

在 2.2 节二阶中心差分格式求解热传导方程的基础上，我们将网格以 $N = 100, 200, 400, 800, 1600$ ； M 对应取 $M = 20, 40, 80, 160, 320$ 进行剖分，满足 $M = cN$ ，其中 $c = 0.2$ 。

在迭代格式 CI-ABA 和 CI-BAB 中，通过算子分裂算法分别进行计算得到表 1、表 2。

Table 1. Calculation results of the CI-ABA scheme**表 1.** 格式 CI-ABA 的计算结果

格式 I	$N = 100, M = 20$	$N = 200, M = 40$	$N = 400, M = 80$	$N = 800, M = 160$	$N = 1600, M = 320$
Err_{∞}	1.0106e-02	2.5469e-03	6.3967e-04	1.5999e-04	4.0003e-05
Err_2	2.5724e-03	6.4747e-04	1.6215e-04	4.0554e-05	1.0140e-05
Rate	-	2.014	1.9665	1.9993	1.9998
CPU	2.2932	2.6052	5.1168	23.7122	145.1277

Table 2. Calculation results of the CI-BAB scheme**表 2.** 格式 CI-BAB 的计算结果

格式 I	$N = 100, M = 20$	$N = 200, M = 40$	$N = 400, M = 80$	$N = 800, M = 160$	$N = 1600, M = 320$
Err_{∞}	1.4514e-02	3.6814e-03	9.2341e-04	2.3110e-04	5.7784e-05
Err_2	3.5482e-03	8.9491e-04	2.2423e-04	5.6088e-05	1.4024e-05
Rate	-	1.9705	2.002	1.9985	1.9998
CPU	4.6488	4.9296	6.3804	13.5720	87.1578

对比表 1 和表 2, 在用二阶中心差分格式求解 Allen-Cahn 中, 随着网格剖分变细, 最大误差值 Err_{∞} 和 2-范数 Err_2 的数量级从 10^{-2} 下降到 10^{-5} , 且收敛精度逐渐接近预期的算子分裂方法的 2 阶收敛率。再对比它们 CPU 时间, 在 M 、 N 取值较小时, 格式 CI-BAB 计算所用时间比格式 CI-ABA 长, 而随着网格的剖分变细, 格式 CI-BAB 的 CPU 远小于格式 CI-ABA。

同理, 在 2.4 节四阶紧致差分格式求解热传导方程的基础上, 我们将网格以 $N = 20, 40, 80, 160, 320$; M 对应取 $M = 100, 400, 1600, 6400, 25600$ 进行剖分。满足 $M = cN^2$, 其中 $c = 0.25$ 。

在迭代格式 CII-ABA 和 CII-BAB 中, 分别计算得到表 3、表 4。

通过对比表 3 和表 4, 在四阶紧致差分格式下求解 Allen-Cahn 方程, 随着网格剖分变细, 最大误差值 Err_{∞} 和 2-范数 Err_2 的数量级从 10^{-2} 下降到 10^{-7} , 收敛精度逐渐接近预期的算子分裂方法的 4 阶收敛率。再对比两者的 CPU 时间, 在 M 、 N 取较小值时, 迭代格式 CII-BAB 计算所用时间比格式 CII-ABA 长, 而随着网格的剖分变细, 格式 CII-BAB 的 CPU 远小于格式 CII-ABA。

综上, 结合实际情况, 在求解热传导方程时, 由于迭代过程中产生的误差不断累积, 如果采用格式 CII-BAB 进行计算, 误差能够被大大减小。

3.2. 算例二

在下面的数值实验中, 我们定义能量函数 $E(u)$:

$$E^h(u^n) = \frac{h}{4\varepsilon^2} \sum_{i=0}^N \left[(u_i^n)^2 - 1 \right]^2 + \frac{h}{2} \sum_{i=1}^{N-1} \left[\frac{u_{i+1}^n - u_{i-1}^n}{2h} \right]^2 \quad (18)$$

初值 $u^0 = \varepsilon \cdot \sin(1.5\pi \cdot x)$, 取 Dirichlet 边界条件, 左边界值 $u_0 = 1$, 右边界值 $u_n = -1$ 。

在 2.2 节的二阶中心差分格式情况下, 取 $t \in [0, 2]$, $x \in [-1, 1]$ 。

对此, 我们将网格取 $N = 40, M = 750$ 进行剖分, 此时 $\Delta t = \frac{T}{M} = 0.0027$, $\Delta h = \frac{b-a}{N} = 0.05$ 。其中图 2 和图 3 为 $\varepsilon = 0.1$ 的运行结果; 图 4 和图 5 为 $\varepsilon = 0.075$ 的运行结果; 图 6 和图 7 为 $\varepsilon = 0.125$ 的运行结果。

Table 3. Calculation results of the CII-ABA scheme
表 3. 格式 CII-ABA 的计算结果

格式 II	$N = 20, M = 100$	$N = 40, M = 400$	$N = 80, M = 1600$	$N = 160, M = 6400$	$N = 320, M = 25600$
Err_{∞}	4.4632e-02	2.7318e-03	1.8605e-04	1.1590e-05	7.3054e-07
Err_2	1.0947e-02	6.2072e-04	3.8951e-05	2.4378e-06	1.5242e-07
Rate	-	4.0460	3.8592	4.0047	3.9878
CPU	2.1528	4.4928	6.7704	22.7605	200.2429

Table 4. Calculation results of the CII-BAB scheme
表 4. 格式 CII-BAB 的计算结果

格式 II	$N = 20, M = 100$	$N = 40, M = 400$	$N = 80, M = 1600$	$N = 160, M = 6400$	$N = 320, M = 25600$
Err_{∞}	4.4465e-02	2.7189e-03	1.8537e-04	1.1547e-05	7.2762e-07
Err_2	1.0907e-02	6.1822e-04	3.8795e-05	2.4281e-06	1.5181e-07
Rate	-	4.0428	3.8645	4.0048	3.9882
CPU	3.8220	4.0248	6.4116	17.8465	120.6512

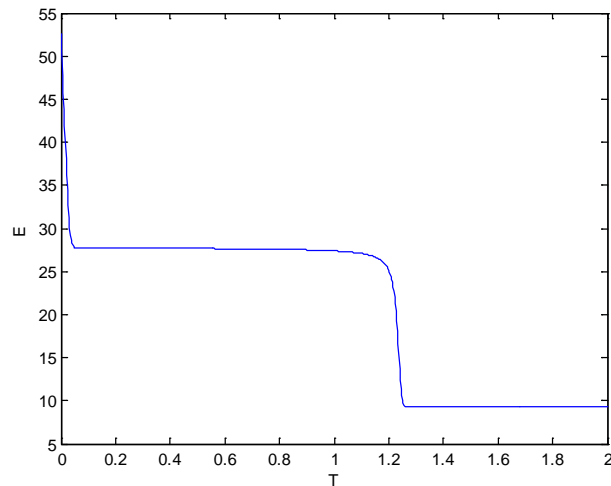


Figure 2. Curve: Energy variation with time in the second-order center difference scheme
图 2. $\xi = 0.1$.二阶中心差分格式能量随时间变化

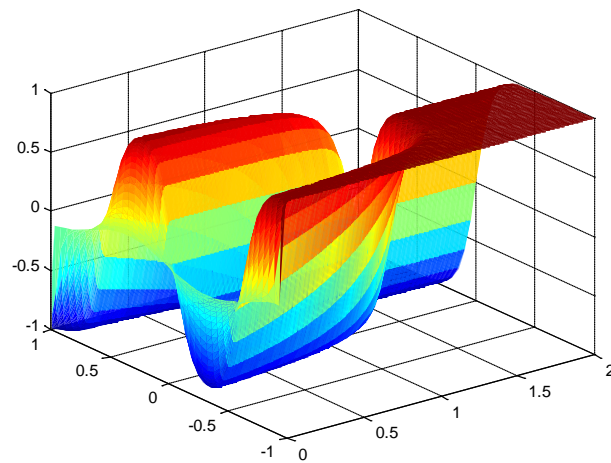


Figure 3. Numerical solution of the second-order center difference scheme
图 3. $\xi = 0.1$.二阶中心差分格式数值解图像

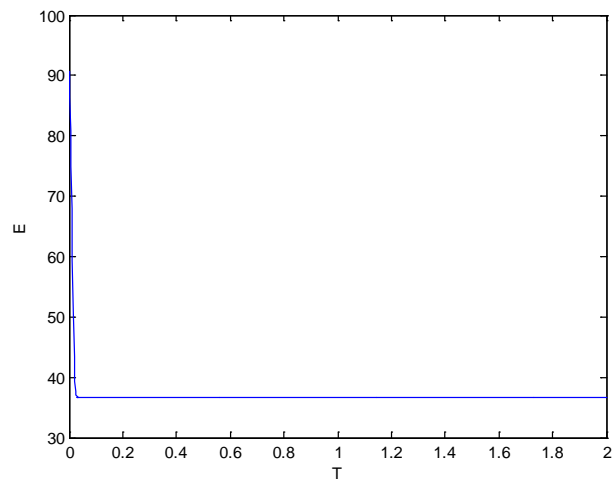


Figure 4. Curve: Energy variation with time in the second-order center difference scheme
图 4. $\xi = 0.075$.二阶中心差分格式能量随时间变化

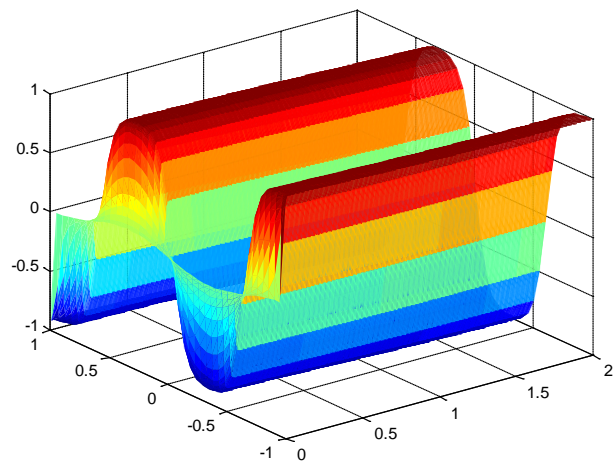


Figure 5. Numerical solution of the second-order center difference scheme
图 5. $\xi = 0.075$.二阶中心差分格式数值解图像

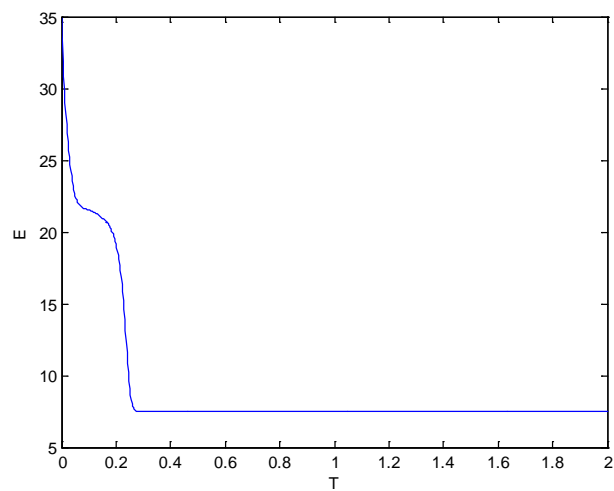


Figure 6. Curve: Energy variation with time in the second-order center difference scheme
图 6. $\xi = 0.125$.二阶中心差分格式能量随时间变化

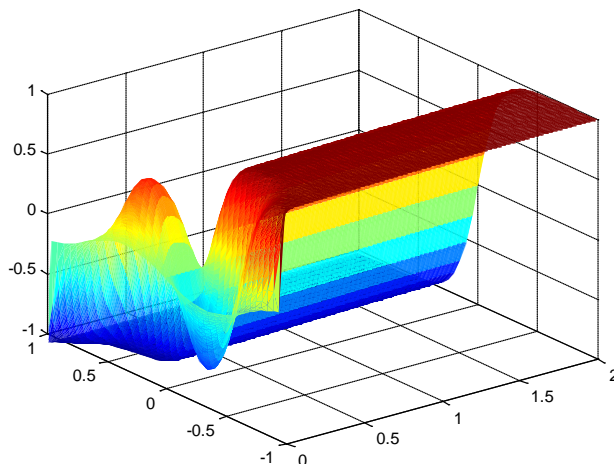


Figure 7. Numerical solution of the second-order center difference scheme
图 7. $\xi = 0.125$.二阶中心差分格式数值解图像

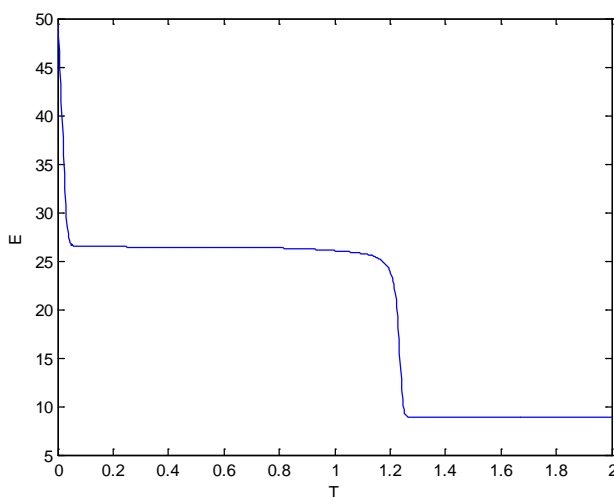


Figure 8. Curve: Energy variation with time in the fourth-order compact difference scheme
图 8. $\xi = 0.1$.四阶紧致差分格式能量随时间变化

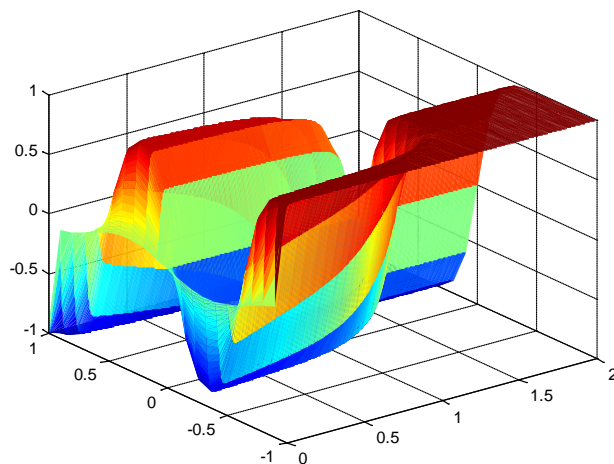


Figure 9. Numerical solution of the fourth-order compact difference scheme
图 9. $\xi = 0.1$.四阶紧致差分格式数值解图像

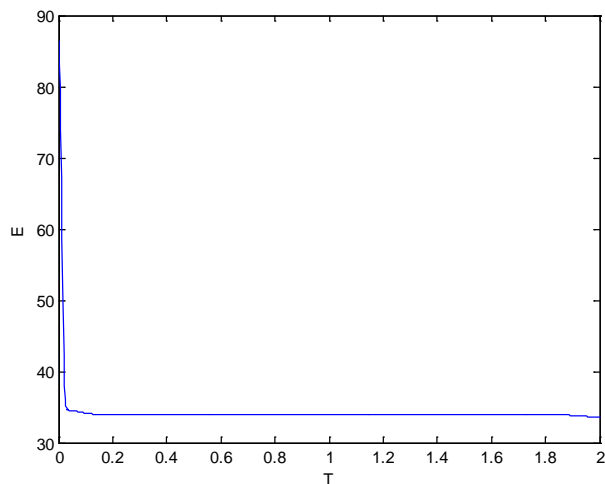


Figure 10. Curve: Energy variation with time in the fourth-order compact difference scheme
图 10. $\xi = 0.075$.四阶紧致差分格式能量随时间变化

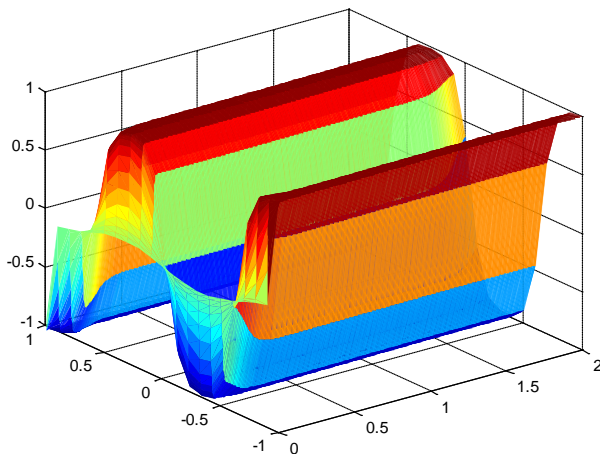


Figure 11. Numerical solution of the fourth-order compact difference scheme
图 11. $\xi = 0.075$.四阶紧致差分格式数值解图像

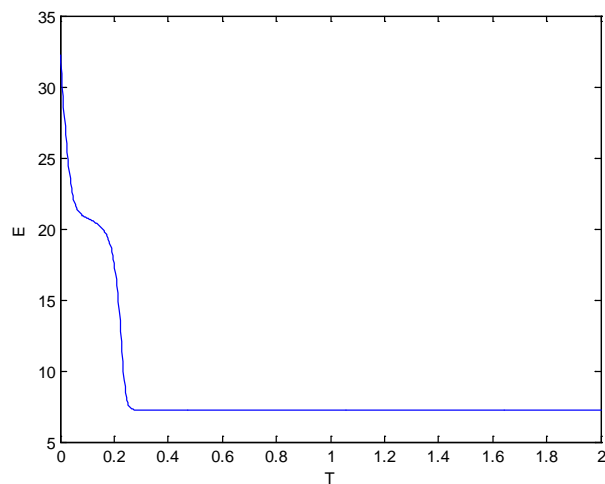


Figure 12. Curve: Energy variation with time in the fourth-order compact difference scheme
图 12. $\xi = 0.125$.四阶紧致差分格式能量随时间变化

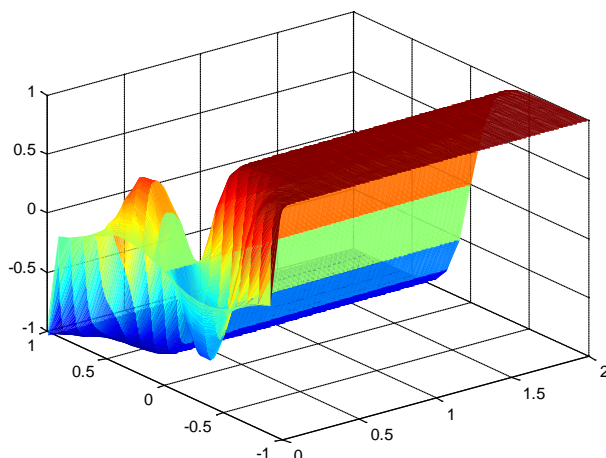


Figure 13. Numerical solution of the fourth-order compact difference scheme

图 13. $\xi = 0.125$ 四阶紧致差分格式数值解图像

首先, 观察 $\varepsilon = 0.1$ 时, 图 2 表示的能量函数 $E(u)$ 随着时间 t 的增加在不断减少, 图 3 的数值解图像表明首先形成边界层, 然后到达亚稳态, 最后到达稳态。从中我们可以观察到从初始值到亚稳态这一个快速的动力学行为。当 $\varepsilon = 0.075$ 时, 比较图 2 与图 4, 随着 ε 的变小, 要出现图 3 的行为, 所需的网格剖分需越细密; 当 $\varepsilon = 0.125$ 时, 比较图 2 与图 6, 随着 ε 的变大, 所需的网格剖分越稀疏, 即 M 、 N 需取较小的值。

在 2.3 节的四阶紧致差分格式情况下, 我们将网格取 $N=20$, $M=750$ 进行剖分, 此时 $t \in [0, 2]$, $x \in [-1, 1]$, 此时 $\Delta t = \frac{T}{M} = 0.0027$, $\Delta h = \frac{b-a}{N} = 0.1$ 。其中图 8 和图 9 为 $\varepsilon = 0.1$ 的运行结果; 图 10 和图 11 为 $\varepsilon = 0.075$ 的运行结果; 图 12 和图 13 为 $\varepsilon = 0.125$ 的运行结果。

同理, 可得到类似结论。

综上, 不论二阶中心差分格式或者四阶紧致差分格式, ε 的取值越小, 所取的网格剖分则需越细密, 才能减少误差, 满足能量函数 $E(u)$ 呈现如上图所示的递减规律。对比两种差分格式, 发现出现同样结果下, 四阶紧致差分格式的剖分可以更稀疏, 从而可见高阶情况下所需的网格剖分要求不那么高。

4. 结论

本文利用算子分裂算法将 Allen-Cahn 方程分解为两个子问题, 然后用二阶中心差分格式和四阶紧致差分格式求数值解, 并利用傅里叶方法给出了稳定性的分析。最后, 通过数值算例比较两种格式的误差和 CPU 时间及验证其数值解满足能量递减规律。在本文中对算子分裂算法列出了详细的计算步骤, 通过第一个算例对两种算子分裂格式的优缺点进行了细致的比较, 对比分析之后, 我们发现采用格式 CII-BAB 的误差最小, 且能有效减少计算时间。通过第二个算例, 说明不论采用哪种格式进行迭代计算, 得到的能量函数都满足递减的规律, 其数值解也呈现对应的变化。本文对 Allen-Cahn 方程的求解方法, 也能为我们今后解决同类问题提供了简单的途径和有力的支持。

基金项目

国家自然科学基金(11526094)和福建省青年基金(2016J05007)资助项目。

参考文献 (References)

- [1] Allen, S.M. and Cahn, J.W. (1979) A Microscopic Theory for Antiphase Boundary Motion and Its Application to An-

- tiphase Domain Coarsening. *Acta Metallurgica*, **27**, 1085-1095.
- [2] Cohen, D.S. and Murray, J.D. (1981) A Generalized Diffusion Model for Growth and Dispersal in a Population. *Journal of Mathematical Biology*, **12**, 237-249. <https://doi.org/10.1007/BF00276132>
- [3] Hazewinkel, M., Kaashoek, J.F. and Leynse, B. (1986) Pattern Formation for a One Dimensional Evolution Equation Based on Thom's River Basin Model. Springer, Netherlands.
- [4] Benes, M., Chalupecky, V. and Mikula, K. (2004) Geometrical Image Segmentation by the Allen-Cahn Equation. *Applied Numerical Mathematics*, **51**, 187-205.
- [5] Dobrosotskaya, J.A. and Bertozzi, A.L. (2008) A Wavelet-Laplace Variational Technique for Image Deconvolution and Inpainting. *IEEE Transactions on Image Processing*, **17**, 657-663. <https://doi.org/10.1109/TIP.2008.919367>
- [6] Feng, X.B. and Prohl, A. (2003) Numerical Analysis of the Allen-Cahn Equation and Approximation for Mean Curvature Flows. *Numerische Mathematik*, **94**, 33-65. <https://doi.org/10.1007/s00211-002-0413-1>
- [7] Wheeler, A.A., Boettinger, W.J. and McFadden, G.B. (1992) Phase-Field Model for Isothermal Phase Transitions in Binary Alloys. *Physical Review A*, **45**, 7424-7439. <https://doi.org/10.1103/PhysRevA.45.7424>
- [8] Zhai, S., Feng, X. and He, Y. (2014) Numerical Simulation of the Three Dimensional Allen-Cahn Equation by the High-Order Compact ADI Method. *Computer Physics Communications*, **185**, 2449-2455.
- [9] Chertock, A., Doering, C.R., Kashdan, E., *et al.* (2010) A Fast Explicit Operator Splitting Method for Passive Scalar Advection. *Journal of Scientific Computing*, **45**, 200-214. <https://doi.org/10.1007/s10915-010-9381-2>
- [10] Dimov, I., Farago, I., Havasi, A. and Zlatev, Z. (2001) L-Commutativity of the Operators of Splitting Methods for Air Pollution Models. *Annales Univ. Sci. Budapest Eötvös, Sec. Math.*, **44**, 127-148.
- [11] Farago, I. and Havasi, A. (2007) Consistency Analysis of Operator Splitting Methods for C_0 -Semigroups Expression. *Semigroup Forum*, **74**, 125-139. <https://doi.org/10.1007/s00233-006-0640-3>
- [12] Strang, G. (1968) On the Construction and Comparison of Different Splitting Schemes. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, **5**, 506-517.
- [13] Strang, G. (1963) Accurate Partial Difference Methods I: Linear Cauchy Problems. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, **12**, 392-402. <https://doi.org/10.1007/BF00281235>
- [14] Csomos, P., Farago I. and Havasi, A. (2005) Weighted Sequential Splittings and Their Analysis. *Computers & Mathematics with Applications*, **50**, 1017-1031.
- [15] Strang, G. (1968) On the Construction and Comparison of Difference Schemes. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, **5**, 506-517. <https://doi.org/10.1137/0705041>
- [16] Smith, G.D. (1996) Numerical Solution of Partial Differential Equations (Finite Difference Methods). 3rd Edition, Oxford University Press, Oxford.
- [17] Bagrinovskii, K.A. and Godunov, S.K. (1957) Difference Schemes for Multidimensional Problems. *Doklady Akademii Nauk SSSR (NS)*, **115**, 431-433.
- [18] Weng, Z. and Tang, L. (2016) Analysis of the Operator Splitting Scheme for the Allen-Cahn Equation. *Journal Numerical Heat Transfer, Part B: Fundamentals*, **70**, 472-483. <https://doi.org/10.1080/10407790.2016.1215714>
- [19] Feng, X., Tang, T. and Yang, J. (2015) Long Time Numerical Simulations for Phase-Field Problems Using p-Adaptive Spectral Deferred Correction Methods. *SIAM Journal on Scientific Computing*, **37**, A271-A294. <https://doi.org/10.1137/130928662>
- [20] Zhai, S., Feng, X. and He, Y. (2014) An Unconditionally Stable Compact ADI Method for Three-Dimensional Time-Fractional Convection-Diffusion Equation. *Journal of Computational Physics*, **269**, 138-155.

期刊投稿者将享受如下服务：

1. 投稿前咨询服务 (QQ、微信、邮箱皆可)
2. 为您匹配最合适的期刊
3. 24 小时以内解答您的所有疑问
4. 友好的在线投稿界面
5. 专业的同行评审
6. 知网检索
7. 全网络覆盖式推广您的研究

投稿请点击：<http://www.hanspub.org/Submission.aspx>

期刊邮箱：aam@hanspub.org