Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, 2017, 6(8), 975-984
Published Online November 2017 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2017.68117

A Class of Blow-Up Solution with External Diffusion and Nonlinear Boundary Flow Problems

Yingtao Li[1,2], Zhigang Pan[1]

[1]School of Mathematics, Southwest Jiaotong University, Chengdu Sichuan
[2]College of Mathematics, Sichuan University, Chengdu Sichuan
Email: panzhigang@home.swjtu.edu.cn

Received: Nov. 7th, 2017; accepted: Nov. 21st, 2017; published: Nov. 27th, 2017

Abstract

In this paper, we study a class of problems with external diffusion and nonlinear boundary flow. By using the construction auxiliary function and the maximum principle, the sufficient conditions for the existence of the blow-up solution under the Neumman boundary and the Dirichlet boundary are obtained respectively by using the classical differential inequality. The upper bound of the "blow-up time" is estimated, and finally the concrete application of the theorem in two nonlinear problems is given.

Keywords

External Diffusion, Nonlinear Boundary, Blow-Up Solution, Blow-Up Time

一类具有外部扩散及非线性边界流问题解的爆破

李颖韬[1,2]，潘志刚[1]

[1]西南交通大学数学学院，四川 成都
[2]四川大学数学学院，四川 成都
Email: panzhigang@home.swjtu.edu.cn

收稿日期：2017年11月7日；录用日期：2017年11月21日；发布日期：2017年11月27日

文章引用：李颖韬, 潘志刚. 一类具有外部扩散及非线性边界流问题解的爆破[J]. 应用数学进展, 2017, 6(8): 975-984.
DOI: 10.12677/aam.2017.68117

摘　要

本文研究了一类具有外部扩散及非线性边界流问题，利用构造辅助函数，结合极值原理，利用经典的微分不等式，分别得到了其在Neumman边界和Dirichlet边界下爆破解存在的充分条件，爆破时刻的上界估计，最后给出了定理在两个非线性问题中的具体应用。

关键词

外部扩散，非线性边界，爆破解，爆破时刻

1. 引言

偏微分方程中，非线性抛物方程式具有重要意义，在非线性科学中，它也是重要的研究方向之一。非线性抛物方程本身的非线性性质使得其解有爆破奇性可以对现实世界中许多扩散现象有一个科学的描述，在化学、物理、工程领域，非线性方程的爆破解问题可以应用到物质扩散与热传导问题，反映系统的不稳定状态[1]。在描述自然现象如宇宙黑洞、热传导上、物质的扩散等问题上爆破解具有实际应用[2] [3] [4]。

本文我们首先考虑一类非线性热传导模型：

$$\begin{cases} (h(u))_t = \nabla\cdot\left(a(u,t)b(x)\nabla u\right)+g(t)f(u) & \text{in } D\times(0,T) \\ \dfrac{\partial u}{\partial n}=k(x,u,t) & \text{on } \partial D\times(0,T) \\ u(x,0)=u_0(x)>0 & \text{in } \bar{D} \end{cases} \tag{1.1}$$

其中 $D\subset R^N\ (N\geq 2)$ 是一个有界区域且具有光滑边界 ∂D，$\partial u/\partial n$ 是在边界 ∂D 上向外的法向导数，T 是最终时间，$\bar{D}$ 是有界区域 D 的闭包。定义 $R^+=(0,+\infty)$。在本文中假定：$u_0(x)$ 是正的 $C^2(\bar{D})$ 函数。a 是正的 $C^2(\mathbb{R}^+\times\bar{\mathbb{R}}^+)$ 函数，b 是正的 $C^3(R^+)$ 函数，f 是正的 $C^2(\mathbb{R}^+)$ 函数，g 是正的 $C^2(\bar{\mathbb{R}}^+)$ 函数，对于任意 $s\in\mathbb{R}^+$，$h'(s)>0$，k 是负的 $C^2(\bar{\mathbb{R}}^+)$ 函数。$\nabla(a(u,t)b(x)\nabla u)$ 为反应项，$g(t)f(u)$ 为扩散项，$\dfrac{\partial u}{\partial n}=k(x,u,t)$ 通过边界区域向区域内部的热流。该模型可以解释成一个具有外部扩散和非线性边界流的混合介质中的热传播过程、化学反应过程等[5]，本文通过构造辅助函数与极值原理得到了方程爆破解存在的充分条件与爆破时刻的上界。

随后我们考虑这类非线性热传导模型在 Dirichlet 边界条件下的爆破解：

$$\begin{cases} (h(u))_t = \nabla\cdot\left(a(u,t)b(x)\nabla u\right)+g(t)f(u) & \text{in } D\times(0,T) \\ u(x,t)=k(x,u,t) & \text{on } \partial D\times(0,T) \\ u(x,0)=u_0(x)>0 & \text{in } \bar{D} \end{cases} \tag{1.2}$$

其中 $D\subset R^N\left(N\ge 2\right)$ 是一个有界区域且具有光滑边界 ∂D，$\partial u/\partial n$ 是在边界 ∂D 上向外的法向导数，T 是最终时间，$\bar{D}$ 是有界区域 D 的闭包。定义 $R^+=\left(0,+\infty\right)$。在本文中假定：$u_0\left(x\right)$ 是正的 $C^2\left(\bar{D}\right)$ 函数。a 是正的 $C^2\left(\mathbb{R}^+\times\bar{\mathbb{R}}^+\right)$ 函数，b 是正的 $C^3\left(R^+\right)$ 函数，f 是正的 $C^2\left(\mathbb{R}^+\right)$ 函数，g 是正的 $C^2\left(\bar{\mathbb{R}}^+\right)$ 函数，对于任意 $s\in\mathbb{R}^+$，$h'\left(s\right)>0$，k 是正的 $C^2\left(\bar{\mathbb{R}}^+\right)$ 函数。该方程为附加非线性边界条件 $u\left(x,t\right)=k\left(x,u,t\right)$ 和适当初值的热方程。该模型揭示了非线性扩散系统中非线性的相互作用[6]。本文得到了方程爆破解存在的充分条件与爆破时刻的上界。

2. 爆破解

2.1. 具 Neumann 边界条件下的爆破解

我们的主要结果是：

定理 1.1 设 u 是问题(1.1)的一个解，如果以下条件成立：

(i) 对于任意 $\left(s,t\right)\in\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^+$，

$$\left(\frac{1}{a\left(s,t\right)}\left(\frac{a\left(s,t\right)f\left(s\right)}{h'\left(s\right)}\right)_s\right)_s+\frac{1}{g\left(t\right)}\left(\frac{a_s\left(s,t\right)}{a\left(s,t\right)}\right)_t\ge 0 \tag{2.1.2}$$

(ii)

$$\int_{M_0}^{+\infty}\frac{h'\left(s\right)}{f\left(s\right)}\mathrm{d}s<\int_0^{+\infty}g\left(t\right)\mathrm{d}t,\ M_0=\max_{\bar{D}}u_0\left(x\right) \tag{2.1.3}$$

(iii)

$$\min_{\bar{D}}\nabla\cdot\left(a\left(u_0,0\right)b\left(x\right)\nabla u_0\left(x\right)\right)\ge 0 \tag{2.1.4}$$

(iv) 则 $u\left(x,t\right)$ 是方程的一个爆破解，并且

$$u\left(x,t\right)\le P^{-1}\left(\int_t^T g\left(t\right)\mathrm{d}t\right),\quad \forall\left(x,t\right)\in\bar{D} \tag{2.1.5}$$

其中

$$P\left(z\right)=\int_z^{+\infty}\frac{h'\left(s\right)}{f\left(s\right)}\mathrm{d}s,\quad \forall z\ge M_0 \tag{2.1.6}$$

证明：构造辅助函数：

$$P\left(x,t\right)=h'\left(u\right)u_t-g\left(t\right)f\left(u\right) \tag{2.1.7}$$

则，有

$$\nabla P\left(x,t\right)=h''u_t\nabla u+h'\nabla u_t-gf'\nabla u \tag{2.1.8}$$

$$\Delta P\left(x,t\right)=h'''\left|\nabla u\right|^2u_t+2h''\nabla u\cdot\nabla u_t+h''u_t\Delta u+h'\Delta u_t-gf''\left|\nabla u\right|^2-gf'\Delta u \tag{2.1.9}$$

由(2.1.6)

$$\begin{aligned}P_t&=\left[h'\left(u\right)u_t-g\left(t\right)f\left(u\right)\right]_t=\left[\left(h'\left(u\right)\right)_t-g\left(t\right)f\left(u\right)\right]_t\\&=\left[\nabla\left(a\left(u,t\right)b\left(x\right)\nabla u\right)\right]_t=\left(ab\Delta u+a_ub\left|\nabla u\right|^2+a\nabla b\cdot\nabla u\right)_t\\&=a_ubu_t\Delta u+a_tb\Delta u+ab\Delta u_t+a_{uu}b\left|\nabla u\right|^2u_t+a_{ut}b\left|\nabla u\right|^2\\&\quad+2a_ub\nabla u\cdot\nabla u_t+a_uu_t\nabla b\cdot\nabla u+a_t\nabla b\cdot\nabla u+a\nabla b\cdot\nabla u_t\end{aligned} \tag{2.1.10}$$

由(2.1.8)和(2.1.9)，我们得

$$\begin{aligned}\frac{ab}{h'}\Delta P-P_t=&\left(\frac{abh'''}{h'}-a_{uu}b\right)|\nabla u|^2u_t+\left(\frac{2abh''}{h'}-2a_ub\right)\nabla u\nabla u_t\\&+\left(\frac{abh''}{h'}-a_ub\right)u_t\Delta u-\left(\frac{abgf''}{h'}+a_{ut}b\right)|\nabla u|^2-\left(\frac{abgf'}{h'}+a_tb\right)\Delta u\\&-a_uu_t\nabla b\nabla u-a_t\nabla b\nabla u-a\nabla b\nabla u_t\end{aligned}\tag{2.1.11}$$

由(2.1.5)我们得：

$$\Delta u=\frac{h'}{ab}u_t-\frac{a_u}{a}|\nabla u|^2-\frac{1}{b}\nabla b\cdot\nabla u-\frac{gf}{ab}\tag{2.1.12}$$

将(2.1.11)代入(2.1.10)我们可以得到：

$$\begin{aligned}\frac{ab}{h'}\Delta P-P_t=&\left(\frac{abh'''}{h'}-a_{uu}b+\frac{(a_u)^2b}{a}-\frac{a_ubh''}{h'}\right)|\nabla u|^2u_t+\left(\frac{2abh''}{h'}-2a_ub\right)\nabla u\cdot\nabla u_t\\&+\left(h''-\frac{a_uh'}{a}\right)(u_t)^2-\frac{ah''}{h'}u_t\nabla b\cdot\nabla u+\left(\frac{a_ugf}{a}-\frac{gfh''}{h'}-gf'-\frac{a_th'}{a}\right)u_t\\&+\left(\frac{a_ubgf'}{h'}+\frac{a_ua_tb}{a}-\frac{abgf''}{h'}-a_{ut}b\right)|\nabla u|^2+\frac{agf'}{h'}\nabla b\cdot\nabla u+\frac{g^2ff'}{h'}\\&+\frac{a_tgf}{a}-a\nabla b\cdot\nabla u_t\end{aligned}\tag{2.1.13}$$

由(2.1.7)，我们有：

$$\nabla u_t=\frac{1}{h'}\nabla P-\frac{h''}{h'}u_t\nabla u+\frac{gf'}{h'}\nabla u\tag{2.1.14}$$

将(2.1.13)代入(2.1.12)可得

$$\begin{aligned}&\frac{ab}{h'}\Delta P+\left[2b\left(\frac{a}{h'}\right)_u\nabla u+\frac{a}{h'}\nabla b\right]\cdot\nabla P-P_t\\&=\left(\frac{abh'''}{h'}-a_{uu}b+\frac{(a_u)^2b}{a}+\frac{a_ubh''}{h'}-\frac{2ab(h'')^2}{(h')^2}\right)|\nabla u|^2u_t\\&\quad+\left(\frac{2abh''gf'}{(h')^2}-\frac{a_ubgf'}{h'}-\frac{abgf''}{h'}+\frac{a_ua_tb}{a}-a_{ut}b\right)|\nabla u|^2\\&\quad+\left(h''-\frac{a_uh'}{a}\right)(u_t)^2+\left(\frac{a_ugf}{a}-\frac{gfh''}{h'}-gf'-\frac{a_th'}{a}\right)u_t+\frac{g^2ff'}{h'}+\frac{a_tgf}{a}\end{aligned}\tag{2.1.15}$$

由(2.1.6)我们得

$$u_t=\frac{1}{h'}P+\frac{gf}{h'}\tag{2.1.16}$$

将(2.1.15)代入(2.1.14)我们可得

$$\begin{aligned}&\frac{ab}{h'}\Delta P+\left[2b\left(\frac{a}{h'}\right)_u\nabla u+\frac{a}{h'}\nabla b\right]\cdot\nabla P+\left\{ab\left[\frac{1}{a}\left(\frac{a}{h'}\right)_u\right]_u|\nabla u|^2\right.\\&\left.+\frac{1}{a}\left(\frac{a}{h'}\right)_u(P+gf)+\frac{gf}{h'}+\frac{a_t}{a}\right\}P-P_t=-abg\left\{\left[\frac{1}{a}\left(\frac{af}{h'}\right)_u\right]_u+\frac{1}{g}\left(\frac{a_u}{a}\right)_t\right\}|\nabla u|^2\end{aligned}\tag{2.1.17}$$

由(2.1.1)得等式右边(2.1.16)是非负的，即

$$\begin{aligned}&\frac{ab}{h'}\Delta P+\left[2b\left(\frac{a}{h'}\right)_u\nabla u+\frac{a}{h'}\nabla b\right]\cdot\nabla P\\&+\left\{ab\left[\frac{1}{a}\left(\frac{a}{h'}\right)_u\right]_u|\nabla u|^2+\frac{1}{a}\left(\frac{a}{h'}\right)_u(P+gf)+\frac{gf}{h'}+\frac{a_t}{a}\right\}P-P_t\geq 0\end{aligned}\tag{2.1.18}$$

由(2.1.5)，我们知道

$$P(x,0)=\nabla\cdot\left(a(M_0,0)b(x)\nabla M_0\right)=0\tag{2.1.19}$$

与

$$\frac{\partial P}{\partial n}=h''u_t\frac{\partial u}{\partial n}+h'\frac{\partial u_t}{\partial n}-gf'\frac{\partial u}{\partial n}=h'\left(\frac{\partial u}{\partial n}\right)_t=h'k(x,u,t)\tag{2.1.20}$$

结合(2.1.17)~(2.1.19)，通过极值原理，我们可知 $P\geq 0$ in $\bar{D}\times[0,T]$
因此

$$\frac{h'(u)}{f(u)}u_t\geq g(t)\tag{2.1.21}$$

设存在 $x_0\in\bar{D}$，使得 $u_0(0)=M_0$ 对(2.1.20)在 $[0,t]$ 上积分得：

$$\int_0^t\frac{h'(u)}{f(u)}u_t\mathrm{d}t=\int_{M_0}^{u(x_0,t)}\frac{h'(s)}{f(s)}\mathrm{d}s\geq\int_0^t g(t)\mathrm{d}t\tag{2.1.22}$$

如果 u 在有限时间 $t=T$ 内不爆破，当 $t\to+\infty$ 时(2.1.21)变形为

$$\int_0^{+\infty}\frac{h'(s)}{f(s)}u_t\mathrm{d}t\geq\int_0^{+\infty}g(t)\mathrm{d}t\tag{2.1.23}$$

与条件矛盾，所以 u 一定在有限时间 $t=T$ 内爆破，即当 $t\to T$ 时，$u(x,t)\to+\infty$
并且有下式成立

$$\lim_{t\to T}\int_{M_0}^{u(x_0,t)}\frac{h'(s)}{f(s)}\mathrm{d}t\geq\lim_{t\to T}\int_0^t g(t)\mathrm{d}t$$

因此

$$\int_{M_0}^{+\infty}\frac{h'(s)}{f(s)}\mathrm{d}s\geq\int_0^T g(t)\mathrm{d}t=\eta(T)$$

我们可以得到

$$T\leq\eta^{-1}\left(\int_{M_0}^{+\infty}\frac{h'(s)}{f(s)}\mathrm{d}s\right)$$

对每一个固定的 $x\in\bar{D}$，对(2.1.20)在 $[t,s](0<t<s<T)$ 上积分得

$$P(u(x,t))\geq P(u(x,t))-P(u(x,s))=\int_{u(x,t)}^{u(x,s)}\frac{h'(s)}{f(s)}\mathrm{d}s\geq\int_t^s g(t)\mathrm{d}t$$

因此，令 $s\to T$ 有

$$P\left(u\left(x,t\right)\right) \geq \int_t^T g\left(t\right)\mathrm{d}t$$

由于 P 是严格减函数，所以有

$$u\left(x,t\right) \leq P^{-1}\left(\int_t^T g\left(t\right)\mathrm{d}t\right)$$

这里 P^{-1} 是 P 的反函数，证毕。

2.2. 具 Dirichlet 边界条件下的爆破解

定理 1.2 设 u 是问题(1.2)的一个解，如果以下条件成立：

(i) 对于任意 $\left(s,t\right) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$，

$$\left(\frac{1}{a\left(s,t\right)}\left(\frac{a\left(s,t\right) f\left(s\right)}{h'\left(s\right)}\right)_s\right)_s + \frac{1}{g\left(t\right)}\left(\frac{a_s\left(s,t\right)}{a\left(s,t\right)}\right)_t \geq 0 \tag{2.2.2}$$

(ii)

$$\int_{M_0}^{+\infty} \frac{h'\left(s\right)}{f\left(s\right)}\mathrm{d}s < \int_0^{+\infty} g\left(t\right)\mathrm{d}t,\ M_0 = \max_{\bar{D}} u_0\left(x\right) \tag{2.2.3}$$

(iii)

$$\min_{\bar{D}} \nabla\cdot\left(a\left(u_0,0\right)b\left(x\right)\nabla u_0\left(x\right)\right) = 0 \tag{2.2.4}$$

(iv) 则 $u\left(x,t\right)$ 是方程的一个爆破解，并且

$$u\left(x,t\right) \leq Q^{-1}\left(\int_t^T g\left(t\right)\mathrm{d}t\right), \forall\left(x,t\right) \in \bar{D} \tag{2.2.5}$$

其中

$$Q\left(z\right) = \int_{u(x,t)}^{u(x,s)} \frac{h'\left(s\right)}{f\left(s\right)}\mathrm{d}s, \forall z \geq M_0 \tag{2.2.6}$$

证明：由(2.2.1)可知

$$\Delta u + \frac{a}{h'}\nabla b\cdot\nabla u - u_t = -\frac{gf}{h'} - \frac{a_u b}{h'}\left|\nabla u\right|^2 < 0$$

根据极值原理可知

$$u\left(x,t\right) = k\left(x,u,t\right) \geq 0$$

构造辅助函数：

$$Q\left(x,t\right) = h'\left(u\right)u_t - g\left(t\right) f\left(u\right) \tag{2.2.7}$$

则，有

$$\nabla Q\left(x,t\right) = h'' u_t \nabla u + h'\nabla u_t - gf'\nabla u \tag{2.2.8}$$

$$\Delta Q\left(x,t\right) = h'''\left|\nabla u\right|^2 u_t + 2h''\nabla u\cdot\nabla u_t + h'' u_t\Delta u + h'\Delta u_t - gf''\left|\nabla u\right|^2 - gf'\Delta u \tag{2.2.9}$$

由(2.6)

$$\begin{aligned} P_t &= \left[h'\left(u\right)u_t - g\left(t\right) f\left(u\right)\right]_t = \left[\left(h'\left(u\right)\right)_t - g\left(t\right) f\left(u\right)\right]_t = \left[\nabla\cdot\left(a\left(u,t\right)b\left(x\right)\nabla u\right)\right]_t \\ &= \left(ab\Delta u + a_u b\left|\nabla u\right|^2 + a\nabla b\cdot\nabla u\right)_t = a_u b u_t\Delta u + a_t b\Delta u + ab\Delta u_t + a_{uu} b\left|\nabla u\right|^2 u_t \\ &\quad + a_{ut} b\left|\nabla u\right|^2 + 2a_u b\nabla u\cdot\nabla u_t + a_u u_t\nabla b\cdot\nabla u + a_t\nabla b\cdot\nabla u + a\nabla b\cdot\nabla u_t \end{aligned} \tag{2.2.10}$$

由(2.2.8)和(2.2.9)，我们得

$$\frac{ab}{h'}\Delta Q-Q_t=\left(\frac{abh'''}{h'}-a_{uu}b\right)|\nabla u|^2u_t+\left(\frac{2abh''}{h'}-2a_ub\right)\nabla u\cdot\nabla u_t+\left(\frac{abh''}{h'}-a_ub\right)u_t\Delta u$$
$$-\left(\frac{abgf''}{h'}+a_{ut}b\right)|\nabla u|^2-\left(\frac{abgf'}{h'}+a_tb\right)\Delta u-a_uu_t\nabla b\cdot\nabla u-a_t\nabla b\cdot\nabla u \tag{2.2.11}$$
$$-a\nabla b\cdot\nabla u_t.$$

由(2.2.5)我们得：

$$\Delta u=\frac{h'}{ab}u_t-\frac{a_u}{a}|\nabla u|^2-\frac{1}{b}\nabla b\cdot\nabla u-\frac{gf}{ab} \tag{2.2.12}$$

将(2.2.11)代入(2.2.10)我们可以得到：

$$\begin{aligned}\frac{ab}{h'}\Delta Q-Q_t=&\left(\frac{abh'''}{h'}-a_{uu}b+\frac{(a_u)^2b}{a}-\frac{a_ubh''}{h'}\right)|\nabla u|^2u_t+\left(\frac{2abh''}{h'}-2a_ub\right)\nabla u\cdot\nabla u_t\\&+\left(h''-\frac{a_uh'}{a}\right)(u_t)^2-\frac{ah''}{h'}u_t\nabla b\cdot\nabla u+\left(\frac{a_ugf}{a}-\frac{gfh''}{h'}-gf'-\frac{a_th'}{a}\right)u_t\\&+\left(\frac{a_ubgf'}{h'}+\frac{a_ua_tb}{a}-\frac{abgf''}{h'}-a_{ut}b\right)|\nabla u|^2+\frac{agf'}{h'}\nabla b\cdot\nabla u+\frac{g^2ff'}{h'}\\&+\frac{a_tgf}{a}-a\nabla b\cdot\nabla u_t\end{aligned} \tag{2.2.13}$$

由(2.2.7)，我们有：

$$\nabla u_t=\frac{1}{h'}\nabla Q-\frac{h''}{h'}u_t\nabla u+\frac{gf'}{h'}\nabla u \tag{2.2.14}$$

将(2.2.13)代入(2.2.12)可得

$$\begin{aligned}&\frac{ab}{h'}\Delta Q+\left[2b\left(\frac{a}{h'}\right)_u\nabla u+\frac{a}{h'}\nabla b\right]\cdot\nabla Q-Q_t\\&=\left(\frac{abh'''}{h'}-a_{uu}b+\frac{(a_u)^2b}{a}+\frac{a_ubh''}{h'}-\frac{2ab(h'')^2}{(h')^2}\right)|\nabla u|^2u_t\\&\quad+\left(\frac{2abh''gf'}{(h')^2}-\frac{a_ubgf'}{h'}-\frac{abgf''}{h'}+\frac{a_ua_tb}{a}-a_{ut}b\right)|\nabla u|^2\\&\quad+\left(h''-\frac{a_uh'}{a}\right)(u_t)^2+\left(\frac{a_ugf}{a}-\frac{gfh''}{h'}-gf'-\frac{a_th'}{a}\right)u_t+\frac{g^2ff'}{h'}+\frac{a_tgf}{a}\end{aligned} \tag{2.2.15}$$

由(2.2.6)我们得

$$u_t=\frac{1}{h'}Q+\frac{gf}{h'} \tag{2.2.16}$$

将(2.2.15)代入(2.2.14)我们可得

$$\begin{aligned}&\frac{ab}{h'}\Delta Q+\left[2b\left(\frac{a}{h'}\right)_u\nabla u+\frac{a}{h'}\nabla b\right]\cdot\nabla Q+\left\{ab\left[\frac{1}{a}\left(\frac{a}{h'}\right)_u\right]_u|\nabla u|^2\right.\\&\left.+\frac{1}{a}\left(\frac{a}{h'}\right)_u(Q+gf)+\frac{gf}{h'}+\frac{a_t}{a}\right\}Q-Q_t=-abg\left\{\left[\frac{1}{a}\left(\frac{af}{h'}\right)_u\right]_u+\frac{1}{g}\left(\frac{a_u}{a}\right)_t\right\}|\nabla u|^2\end{aligned} \tag{2.2.17}$$

由(2.2.1)得等式右边(2.2.16)是非负的，即

$$\begin{aligned}&\frac{ab}{h'}\Delta Q+\left[2b\left(\frac{a}{h'}\right)_u\nabla u+\frac{a}{h'}\nabla b\right]\cdot\nabla Q\\&+\left\{ab\left[\frac{1}{a}\left(\frac{a}{h'}\right)_u\right]_u|\nabla u|^2+\frac{1}{a}\left(\frac{a}{h'}\right)_u(P+gf)+\frac{gf}{h'}+\frac{a_t}{a}\right\}Q-Q_t\ge 0\end{aligned}\tag{2.2.18}$$

由(2.2.5)，我们知道；

$$Q(x,0)=\nabla\cdot\left(a(M_0,0)b(x)\nabla M_0\right)=0\tag{2.2.19}$$

结合(2.2.17)~(2.2.19)，通过极值原理，我们可知 $Q\ge 0,\text{in }\bar{D}\times[0,T]$

因此

$$\frac{h'(u)}{f(u)}u_t\ge g(t)\tag{2.2.21}$$

设存在 $x_0\in\bar{D}$，使得 $u_0(0)=M_0$ 对(2.2.20)在 $[0,t]$ 上积分得：

$$\int_0^t\frac{h'(u)}{f(u)}u_t\mathrm{d}t=\int_{M_0}^{u(x_0,t)}\frac{h'(s)}{f(s)}\mathrm{d}s\ge\int_0^t g(t)\mathrm{d}t\tag{2.2.22}$$

如果 u 在有限时间 $t=T$ 内不爆破，当 $t\to+\infty$ 时(2.2.21)变形为

$$\int_0^{+\infty}\frac{h'(s)}{f(s)}u_t\mathrm{d}t\ge\int_0^{+\infty}g(t)\mathrm{d}t\tag{2.2.23}$$

与条件矛盾，所以 u 一定在有限时间 $t=T$ 内爆破，即当 $t\to T$ 时，$u(x,t)\to+\infty$

并且有下式成立

$$\lim_{t\to T}\int_{M_0}^{u(x_0,t)}\frac{h'(s)}{f(s)}\mathrm{d}t\ge\lim_{t\to T}\int_0^t g(t)\mathrm{d}t$$

因此

$$\int_{M_0}^{+\infty}\frac{h'(s)}{f(s)}\mathrm{d}s\ge\int_0^T g(t)\mathrm{d}t=\eta(T)$$

我们可以得到

$$T\le\eta^{-1}\left(\int_{M_0}^{+\infty}\frac{h'(s)}{f(s)}\mathrm{d}s\right)$$

对每一个固定的 $x\in\bar{D}$，对(2.2.20)在 $[t,s](0<t<s<T)$ 上积分得

$$Q(u(x,t))\ge Q(u(x,t))-Q(u(x,s))=\int_{u(x,t)}^{u(x,s)}\frac{h'(s)}{f(s)}\mathrm{d}s\ge\int_t^s g(t)\mathrm{d}t$$

因此，令 $s\to T$ 有

$$Q(u(x,t))\ge\int_t^T g(t)\mathrm{d}t$$

由于 Q 是严格减函数，所以有

$$u(x,t)\le Q^{-1}\left(\int_t^T g(t)\mathrm{d}t\right)$$

这里 Q^{-1} 是 Q 的反函数，证毕。

3. 应用举例

这里，我们分别给出定理 1.1 和定理 1.2 的应用举例。

例 1.1 设 u 是下面问题的一个解：

$$\begin{cases} \left(ue^u\right)_t = \nabla\cdot\left(\dfrac{1}{u+t}e^{|x|^2}\nabla u\right)+(1+t)\left(e^u\cdot u^3\right) & \text{in } D\times(0,T) \\ \dfrac{\partial u}{\partial n} = -2e^{u-2+t|x|^2} & \text{on } \partial D\times(0,T) \\ u(x,0)=1+|x|^2 & \text{in } \bar{D} \end{cases}$$

其中 $D=\left\{x=(x_1,x_2,x_3)\,\middle|\,|x|^2=x_1^2+x_2^2+x_3^2<1\right\}$ 是 R^3 上的单位球，我们有

$$h(u)=ue^u,\ a(u,t)=\frac{1}{u+t},\ b(x)=e^{|x|^2},\ g(t)=1+t,\ f(u)=e^u u^3$$

$$k(x,u,t)=-2e^{u-2+t|x|^2}$$

$$u_0(x)=1+|x|^2$$

假设

$$s=|x|^2$$

可知 $0<s<1$ 且

$$\beta=\min_D\nabla\left\{a(u_0,0)b(x)\nabla u_0(x)\right\}=\nabla\cdot\left\{\left(\frac{1}{1+|x|^2}\right)e^{|x|^2}\nabla\left(1+|x|^2\right)\right\}$$

$$=\nabla\cdot\left\{\left(\frac{1}{1+s}\right)e^s\nabla(1+s)\right\}=\frac{se^s}{(1+s)^2}=0$$

根据定理 2.1 可知，u 一定在有限时间 T 爆破，并且有：

$$T\le\eta^{-1}\left(\int_2^{+\infty}\frac{h'(s)}{f(s)}ds\right)=\eta^{-1}\left(\frac{3}{4}\right)=0.6514$$

$$u(x,t)\le P^{-1}\left((T-t)+\frac{(T-t)^2}{2}\right)$$

这里：

$$P(z)=\int_t^s\frac{h'(t)}{f(t)}dt=\int_t^s\frac{1+t}{t^3}dt,\quad \forall z\ge M_0$$

其中 P^{-1} 是 P 的反函数。

例 1.2 设 u 是下面问题的一个解：

$$\begin{cases} \left(u+e^u\right)_t = \nabla\cdot\left(e^{-u-t}e^{|x|^2}\nabla u\right)+t\left(2e^u+2\right) & \text{in } D\times(0,T) \\ \dfrac{\partial u}{\partial n} = e^{\frac{1}{2}(u-2)}+e^{u-2+t|x|^2} & \text{on } \partial D\times(0,T) \\ u(x,0)=1+|x|^2 & \text{in } \bar{D} \end{cases}$$

其中 $D=\left\{x=\left(x_1,x_2,x_3\right)\middle|\left|x\right|^2=x_1^2+x_2^2+x_3^2<1\right\}$ 是 R^3 上的单位球，我们有

$$h(u)=u+\mathrm{e}^u,\ a(u,t)=\mathrm{e}^{-u-t},\ b(x)=\mathrm{e}^{|x|^2},\ g(t)=t,\ f(u)=2\mathrm{e}^u+2$$

$$k(x,u,t)=\mathrm{e}^{\frac{1}{2}(u-2)}+\mathrm{e}^{u-2+t|x|^2}$$

$$u_0(x)=1+|x|^2$$

假设

$$s=|x|^2$$

可知 $0<s<1$ 且

$$\begin{aligned}\beta&=\min_D\nabla\left\{a(u_0,0)b(x)\nabla u_0(x)\right\}\\&=\nabla\left\{\mathrm{e}^{-|x|^2}\mathrm{e}^{|x|^2}\nabla\left(1+|x|^2\right)\right\}=\nabla\left\{\nabla(1+s)\right\}=0\end{aligned}$$

根据定理 2.1 可知，u 一定在有限时间 T 爆破，并且有：

$$T\le\eta^{-1}\left(\int_2^{+\infty}\frac{h'(s)}{f(s)}\mathrm{d}s\right)=\eta^{-1}(2)=2$$

$$u(x,t)\le P^{-1}\left(\frac{(T-t)^2}{2}\right)$$

这里：

$$P(z)=\int_t^s\frac{h'(t)}{f(t)}\mathrm{d}t=\int_t^s\frac{1}{2}\mathrm{d}t,\ \forall z\ge M_0$$

其中 P^{-1} 是 P 的反函数。

基金项目

中央高校理科创新基金项目(No. A0920502051619-113)。

参考文献 (References)

[1] 王明新. 非线性抛物方程[M]. 北京: 科学出版社, 1997: 1-3.

[2] Juntang, D. and Shengjia, L. (2005) Blow-Up Solutions and Global Solutions for a Class of Quasilinear Parabolic Equations with Robin. *Computers and Mathematics with Applications*, **60**, 670-679.

[3] Lingling, Z. and Hui, W. (2014) Global and Blow-Up Solutions for a Class of Nonlinear Parabolic Problems under Robin Boundary Condition. *Hindawi Publishing Corporation Abstract and Applied Analysis*, **7**, 232-256.

[4] Juntang, D. and Baozhu, G. (2010) Blow-Up and Global Existence for Nonlinear Parabolic Equations with Neumann Boundary Conditions. *Computers and Mathematics with Applications*, **60**, 234-239.

[5] 曹京瑞. 几类非线性抛物方程的整体解和爆破解[D]: [硕士学位论文]. 太原: 太原理工大学数学系, 2016.

[6] 叶其孝, 李正元, 王明新, 吴雅萍. 反应扩散方程理论[M]. 北京: 科学出版社, 2011: 1-450.

知网检索的两种方式：

1. 打开知网页面 http://kns.cnki.net/kns/brief/result.aspx?dbPrefix=WWJD
   下拉列表框选择：[ISSN]，输入期刊 ISSN：2325-2286，即可查询
2. 打开知网首页 http://cnki.net/
   左侧“国际文献总库”进入，输入文章标题，即可查询

投稿请点击：http://www.hanspub.org/Submission.aspx
期刊邮箱：aam@hanspub.org