Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, 2019, 8(12), 1993-2001
Published Online December 2019 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2019.812229

Hans汉斯

Least Squares Estimation for Self-Attracting Diffusion with Discrete Observations

Jingqi Han

School of Mathematics, Physics and Statistics, Shanghai University of Engineering Science, Shanghai
Email: jingqihan0916@163.com

Received: Nov. 19th, 2019; accepted: Dec. 6th, 2019; published: Dec. 13th, 2019

Abstract

In this paper, the self-attracting diffusion process driven by fractional Brownian motion $X_t^H = B_t^H - \theta\int_0^t\int_0^t\left(X_s^H - X_u^H\right)\mathrm{d}u\mathrm{d}s + vt$ is considered, where B_t^H is fractional Brownian motion with Hurst index $H \in [1/2, 1)$, and $\theta > 0, v \in \mathbb{R}$ are two unknown parameters. With discrete observation, we research the least squares estimators $\hat{\theta}$ and $\hat{v}$ for the unknown parameters. It is proved that they are not weakly consistency and we also construct some new estimators which have weakly consistency.

Keywords

Fractional Brownian, Least Squares Estimation, Self-Attracting Diffusion

离散观测下线性自吸引扩散的最小二乘估计

韩婧琦

上海工程技术大学数理与统计学院，上海
Email: jingqihan0916@163.com

收稿日期：2019年11月19日；录用日期：2019年12月6日；发布日期：2019年12月13日

摘　要

考虑如下分数布朗运动驱动的自吸引扩散过程 $X_t^H = B_t^H - \theta\int_0^t\int_0^t\left(X_s^H - X_u^H\right)\mathrm{d}u\mathrm{d}s + vt$，其中 B_t^H 表示Hurst指数为 $H \in [1/2, 1)$ 的分数布朗运动，而 $\theta > 0, v \in \mathbb{R}$ 为未知参数。在离散观测下，给出了这两个未知参量的最小二乘估计量 $\hat{\theta}$ 和 $\hat{v}$，验证了它们无相合性同时构造新的弱相合估计量。

文章引用：韩婧琦. 离散观测下线性自吸引扩散的最小二乘估计[J]. 应用数学进展, 2019, 8(12): 1993-2001.
DOI: 10.12677/aam.2019.812229

关键词

分数布朗运动，最小二乘估计，自吸引扩散

1. 引言

一个中心化高斯过程 $B^H=\{B_t^H,t\ge 0\}$ 称为Hurst指数为 $H\in(0,1)$ 的分数布朗运动(fractional Brownian motion，简记为 fBm)，若它的协方差函数为：

$$R_H(t,s)=E\left(B_t^H B_s^H\right)\frac{1}{2}\left(s^{2H}+t^{2H}-|t-s|^{2H}\right),\ s,t\ge 0.$$

特别的，当 $H=1/2$， $B^{1/2}$ 是标准布朗运动。分数布朗运动既不是马氏过程，也不是半鞅(布朗运动情形除外)，所以不能用经典的 Ito 随机分析理论来进行研究。关于分数布朗运动的随机积分的研究见文献[1] [2]。

自吸引扩散的数学模型由 Durrett 和 Rogers [3]于 1992 年给出，用来刻画一种增长聚合物(布朗聚合物)的形状变化，在一定条件下建立了该模型对应随机微分方程解的渐近性态。随后，M. Cranston 和 Y. Le Jan [4]推广了该模型并引入了自吸引扩散的概念。L. Yan 等[5]考虑了由分数布朗运动驱动的自吸引扩散并研究了线性情形下相关结论。值得注意的是在线性情况下，相互作用的扩散足以吸引 Ornstein-Uhlenbeck 过程[6] [7]，故而可以研究相关渐近行为。此外，由分数布朗运动驱动的随机方程的统计推断是现代随机分析以及应用概率论中的一个重要的课题。Y. Gan 和 L. Yan [7]研究了连续观测下分数布朗运动驱动的线性自排斥扩散的最小二乘估计。

受上述文献启发，本文讨论由分数布朗运动驱动的自吸引扩散过程：

$$X_t^H=B_t^H-\theta\int_0^t\int_0^t\left(X_s^H-X_u^H\right)\mathrm{d}u\mathrm{d}s+vt.$$

令 $Y_t^H=\int_0^t\left(X_s^H-X_u^H\right)\mathrm{d}u$，则模型简化为

$$X_t^H=B_t^H-\theta\int_0^t Y_s^H\mathrm{d}s+vt. \tag{1}$$

若过程 X_t^H 在离散时刻 $t_k=kh,k=1,2,\cdots,n$ 被观测到，构造未知参数 θ,v 的最小二乘估计量，并建立相关弱相合估计量。用 t_n 表示观测窗口的长度，且当 $n\to\infty$ 时， $h\to 0$。

2. 准备知识

令 $B^H=\{B_t^H,t\ge 0\}$ 是定义在完备概率空间 $(\Omega,\mathcal{F}_t,\mathrm{P})$ 上的 Hurst 指数为 H 的标准一维分数布朗运动。本节主要回顾分数布朗运动的一些基本概念和结论 $\mathcal{H}$ 表示与分数布朗运动有关的再生核 Hlibert 空间，它为示性函数 $\{1_{[0,t]},t\in[0,T]\}$ 关于内积

$$\left\langle 1_{[0,t]},1_{[0,s]}\right\rangle_{\mathcal{H}}=\frac{1}{2}\left(s^{2H}+t^{2H}-|t-s|^{2H}\right)$$

生成的线性空间 $\mathcal{E}$ 的闭包。它可以写成

$$\mathcal{H}=\left\{\varphi:[0,T]\to\Re\left\|\mu_{\varphi}\right\|_{\mathcal{H}}<\infty\right\},$$

其中

$$\|\varphi\|_{\mathcal{H}}^{2}:=\alpha_{H}\int_{0}^{T}\int_{0}^{T}\varphi(t)\varphi(s)|t-s|^{2H-2}\,\mathrm{d}t\mathrm{d}s$$

考虑的$\mathcal{H}$子空间$|\mathcal{H}|$，它是定义为$[0,T]$上可测函数φ构成的集合，使得

$$\|\varphi\|_{|\mathcal{H}|}^{2}:=\alpha_{H}\int_{0}^{T}\int_{0}^{T}|\varphi(t)||\varphi(s)||t-s|^{2H-2}\,\mathrm{d}t\mathrm{d}s<\infty,$$

容易得到$|\mathcal{H}|$关于范数$\|\varphi\|_{|\mathcal{H}|}$是 Banach 空间，并且$\mathcal{E}$在$|\mathcal{H}|$中稠密。另外，对于任意$\varphi,\psi\in|\mathcal{H}|$

$$E\left(\int_{0}^{T}\varphi_{s}\mathrm{d}B_{s}^{H}\int_{0}^{T}\psi_{s}\mathrm{d}B_{s}^{H}\right)=\alpha_{H}\int_{0}^{T}\int_{0}^{T}|\varphi(t)||\psi(s)||t-s|^{2H-2}\,\mathrm{d}t\mathrm{d}s$$

令$f,g:[0,T]\to\mathbb{R}$分别是阶为$\alpha\in(0,1),\beta\in(0,1)$且$\alpha+\beta>1$为 Holder 连续函数，Young [8]证明了 Riemann-Stieltjes 积分(所谓 Young 积分)$\int_{0}^{T}f_{s}\mathrm{d}g_{s}$是存在的。而且，若$\alpha=\beta\in(1/2,1)$且$F:\mathbb{R}^{2}\to\mathbb{R}$为$C^{1}$的，积分$\int_{0}^{\cdot}\frac{\partial F}{\partial f}(f_{u},g_{u})\mathrm{d}f_{u}$和$\int_{0}^{\cdot}\frac{\partial F}{\partial g}(f_{u},g_{u})\mathrm{d}g_{u}$在 Young 积分意义下存在，并且有下述公式成立：

$$F(f_{t},g_{t})=F(f_{0},g_{0})+\int_{0}^{t}\frac{\partial F}{\partial f}(f_{u},g_{u})\mathrm{d}f_{u}+\int_{0}^{t}\frac{\partial F}{\partial g}(f_{u},g_{u})\mathrm{d}g,t\in[0,T]\tag{2}$$

众所周知，当$H\geq 1/2$分数布朗运动具有阶为$\beta<H$的 Holder 连续轨道。若过程$\{u_{t},t\in[0,T]\}$具有阶为$\alpha>1-H$的 Holder 连续轨道，那么积分$\int_{0}^{T}u_{s}\mathrm{d}B_{s}^{H}$在 Young 积分意义下是适定的。

3. 最小二乘估计量

回顾分数布朗运动驱动的自吸引扩散为$X_{t}^{H}=B_{t}^{H}-\theta\int_{0}^{t}Y_{s}^{H}\mathrm{d}s+vt$。对其进行离散化，可得

$$X_{ih}^{H}-X_{(i-1)h}^{H}=B_{ih}^{H}-B_{(i-1)h}^{H}-\theta hY_{(i-1)h}^{H}+vh\tag{3}$$

本节主要是建立θ,v的最小二乘估计量，并研究相关估计量的相合性。

利用 Hu 和 Nualart [6]建立的最小二乘方法，通过对如下对比函数最小化

$$\begin{aligned}&\sum_{i=1}^{n}\left|X_{ih}^{H}-X_{(i-1)h}^{H}-\left(v-\theta Y_{(i-1)h}^{H}\right)h\right|^{2}\\&=\sum_{i=1}^{n}\left[\left(X_{ih}^{H}-X_{(i-1)h}^{H}\right)^{2}-2h\left(v-\theta Y_{(i-1)h}^{H}\right)\left(X_{ih}^{H}-X_{(i-1)h}^{H}\right)+h^{2}\left(v^{2}-2v\theta Y_{(i-1)h}^{H}+\theta^{2}\left(Y_{(i-1)h}^{H}\right)^{2}\right)\right]\end{aligned}\tag{4}$$

可以得到θ,v的最小二乘估计量为：

$$\begin{aligned}\widehat{\theta}_{nh}&=\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(X_{ih}^{H}-X_{(i-1)h}^{H}\right)\sum_{i=1}^{n}Y_{(i-1)h}^{H}-n\sum_{i=1}^{n}\left(X_{ih}^{H}-X_{(i-1)h}^{H}\right)Y_{(i-1)h}^{H}}{nh\sum_{i=1}^{n}\left(Y_{(i-1)h}^{H}\right)^{2}-h\left(\sum_{i=1}^{n}Y_{(i-1)h}^{H}\right)^{2}},\\\widehat{v}_{nh}&=\frac{1}{nh}\sum_{i=1}^{n}\left(X_{ih}^{H}-X_{(i-1)h}^{H}\right)+\frac{\widehat{\theta}_{nh}}{n}\sum_{i=1}^{n}Y_{(i-1)h}^{H}\end{aligned}\tag{5}$$

由(3)，

$$\begin{aligned}\hat{\theta}_{nh}-\theta&=\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(X_{ih}^{H}-X_{(i-1)h}^{H}\right)\sum_{i=1}^{n}Y_{(i-1)h}^{H}-n\sum_{i=1}^{n}\left(X_{ih}^{H}-X_{(i-1)h}^{H}\right)Y_{(i-1)h}^{H}}{nh\sum_{i=1}^{n}\left(Y_{(i-1)h}^{H}\right)^{2}-h\left(\sum_{i=1}^{n}Y_{(i-1)h}^{H}\right)^{2}}-\theta\\&=\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(B_{ih}^{H}-B_{(i-1)h}^{H}\right)\sum_{i=1}^{n}Y_{(i-1)h}^{H}-n\sum_{i=1}^{n}\left(B_{ih}^{H}-B_{(i-1)h}^{H}\right)Y_{(i-1)h}^{H}}{nh\sum_{i=1}^{n}\left(Y_{(i-1)h}^{H}\right)^{2}-h\left(\sum_{i=1}^{n}Y_{(i-1)h}^{H}\right)^{2}}\\&=\frac{B_{nh}^{H}\sum_{i=1}^{n}Y_{(i-1)h}^{H}-n\sum_{i=1}^{n}\left(B_{ih}^{H}-B_{(i-1)h}^{H}\right)Y_{(i-1)h}^{H}}{nh\sum_{i=1}^{n}\left(Y_{(i-1)h}^{H}\right)^{2}-h\left(\sum_{i=1}^{n}Y_{(i-1)h}^{H}\right)^{2}}\\&=\frac{B_{nh}^{H}\sum_{i=1}^{n}Y_{(i-1)h}^{H}-n\sum_{i=1}^{n}\left(B_{ih}^{H}-B_{(i-1)h}^{H}\right)Y_{(i-1)h}^{H}}{\Phi(n,H)},\end{aligned}\tag{6}$$

$$\hat{v}_{nh}-v=\frac{1}{nh}\sum_{i=1}^{n}\left(B_{ih}^{H}-B_{(i-1)h}^{H}\right)+\frac{\hat{\theta}_{nh}-\theta}{n}\sum_{i=1}^{n}Y_{(i-1)h}^{H}=\frac{B_{nh}^{H}}{nh}+\left(\hat{\theta}_{nh}-\theta\right)\frac{\sum_{i=1}^{n}Y_{(i-1)h}^{H}}{n}.\tag{7}$$

其中 $\Phi(n,H)=nh\sum_{i=1}^{n}\left(Y_{(i-1)h}^{H}\right)^{2}-h\left(\sum_{i=1}^{n}Y_{(i-1)h}^{H}\right)^{2}$。

显然，

$$Y_s^H=\int_0^s\left(X_s^H-X_u^H\right)\mathrm{d}u=sX_s^H-\int_0^s X_u^H\mathrm{d}u=\int_0^s u\mathrm{d}X_u^H\tag{8}$$

同时由(1)可得

$$\mathrm{d}X_u^H=\left(v-\theta Y_u^H\right)\mathrm{d}u+\mathrm{d}B_u^H\tag{9}$$

将(9)带入(8)式，并对两边同时求微分，得到

$$\mathrm{d}Y_S^H=-\theta sY_S^H\mathrm{d}s+vs\mathrm{d}s+s\mathrm{d}B_S^H,$$

利用常数变易法解该微分方程可得 $Y_s^H=\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\theta s^2}\int_0^s u\mathrm{e}^{\frac{1}{2}\theta u^2}\mathrm{d}B_u^H+\frac{v}{\theta}\left(1-\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\theta s^2}\right)$

为方便记 $\eta_s=\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\theta s^2}\int_0^s u\mathrm{e}^{\frac{1}{2}\theta u^2}\mathrm{d}B_u^H$，$\Lambda_s=\frac{v}{\theta}\left(1-\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\theta s^2}\right)$，则 $Y_s^H=\eta_s+\Delta_s$。

引理 3.1：令 $\frac{1}{2}\le H<1$。当 $n\to\infty,h\to 0$ 时，

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}Y_{ih}^{H}\xrightarrow{a.s.}\frac{v}{\theta}.\tag{10}$$

证明：

当 $n\to\infty,h\to 0$ 时，有 $h\sum_{i=1}^{n}Y_{ih}^{H}\sim\int_0^{nh}Y_S^H\mathrm{d}s$。

利用(1)有

$$\left|\frac{1}{nh}\int_0^{nh}Y_s^H\mathrm{d}s-\frac{v}{\theta}\right|=\frac{1}{\theta}\left|\frac{B_{nh}^H}{nh}-\frac{X_{nh}^H}{nh}\right|\to 0,\quad \text{a.s.}\tag{11}$$

故$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}Y_{ih}^{H}=\frac{1}{nh}\left(h\sum_{i=1}^{n}Y_{ih}^{H}\right)\xrightarrow{a.s.}\frac{v}{\theta}$。

引理 3.2：令$\frac{1}{2}\le H<1$。当$n\to\infty,h\to 0$时，

$$(nh)^{2H-2}E\left(\eta_{nh}^{2}\right)\to H\theta^{-2H}\Gamma(2H). \tag{12}$$

证明：

$$E\left(\eta_{s}^{2}\right)=H(2H-1)\mathrm{e}^{-\theta(nh)^{2}}\int_{0}^{nh}\int_{0}^{nh}us\mathrm{e}^{\frac{1}{2}\theta\left(s^{2}+u^{2}\right)}|s-u|^{2H-2}\mathrm{d}s\mathrm{d}u=2H(2H-1)\frac{\int_{0}^{nh}\int_{0}^{s}us\mathrm{e}^{\frac{1}{2}\theta\left(s^{2}+u^{2}\right)}(s-u)^{2H-2}\mathrm{d}u\mathrm{d}s}{\mathrm{e}^{\theta(nh)^{2}}}$$

利用洛必达法则，并令$x=\frac{1}{2}\theta\left[(nh)^{2}-u^{2}\right]$，则

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty}\frac{1}{(nh)^{2-2H}}\theta^{-1}H(2H-1)\int_{0}^{nh}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\theta\left[(nh)^{2}-u^{2}\right]}(nh-u)^{2H-2}u\mathrm{d}u\\
&=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{(nh)^{2-2H}}\theta^{-2}H(2H-1)\int_{0}^{\frac{1}{2}\theta(nh)^{2}}\mathrm{e}^{-x}\left(nh-\sqrt{(nh)^{2}-\frac{2x}{\theta}}\right)^{2H-2}\mathrm{d}x\\
&=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{(nh)^{2-2H}}\theta^{-2}H(2H-1)\cdot\int_{0}^{\frac{1}{2}\theta(nh)^{2}}\left(\frac{2x}{\theta}\right)^{2H-2}\left(nh+\sqrt{(nh)^{2}-\frac{2x}{\theta}}\right)^{2-2H}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x\\
&=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{(nh)^{2-2H}}H(2H-1)(nh)^{2-2H}\theta^{-2H}2^{2H-2}\cdot\int_{0}^{\infty}\mathrm{e}^{-x}x^{2H-2}\left(1+\sqrt{1-\frac{2x}{\theta(nh)^{2}}}\right)^{2-2H}1_{\left\{0<x<\frac{1}{2}\theta(nh)^{2}\right\}}\mathrm{d}x\\
&=H(2H-1)\theta^{-2H}\Gamma(2H-1)=H\theta^{-2H}\Gamma(2H).
\end{aligned}$$

引理 3.3：令$\frac{1}{2}\le H<1$。当$n\to\infty,h\to 0$时，

$$\frac{1}{(nh)^{2-2H}n}\sum_{i=1}^{n}\left(Y_{ih}^{H}\right)^{2}\xrightarrow{p}\frac{H\theta^{-2H}}{3-2H}\Gamma(2H) \tag{13}$$

证明：

$$\begin{aligned}
\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(Y_{ih}^{H}\right)^{2}&=\frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n}\eta_{ih}^{2}+\sum_{i=1}^{n}\Delta_{ih}^{2}+2\sum_{i=1}^{n}\eta_{ih}\Delta_{ih}\right)\\
&=\frac{1}{nh}\left(h\sum_{i=1}^{n}\eta_{ih}^{2}\right)+\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\Delta_{ih}^{2}+2\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\eta_{ih}\Delta_{ih}\\
&=\Lambda_{1}(n,h)+\Lambda_{2}(n,h)+\Lambda_{3}(n,h)
\end{aligned}$$

考虑$\frac{1}{(nh)^{2-2H}}\Lambda_{1}(n,h)$，由洛必达法则和引理 3.2，当$n\to\infty,h\to 0$时，有$\frac{1}{nh}\sum_{i=1}^{n}E\left(\eta_{ih}^{2}\right)h\sim\int_{0}^{nh}E\left(\eta_{s}^{2}\right)\mathrm{d}s$，易知

$$\frac{1}{(nh)^{2-2H}}\cdot\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}E\left(\eta_{ih}^{2}\right)=\frac{1}{(nh)^{2-2H}}\cdot\frac{1}{nh}\sum_{i=1}^{n}E\left(\eta_{ih}^{2}\right)h\to C(H):=\frac{H\theta^{-2H}}{3-2H}\Gamma(2H),n\to\infty,h\to 0.$$

令$A_{n,h}=\frac{1}{(nh)^{3-2H}}\int_{0}^{nh}\left(\eta_{s}^{2}\right)\mathrm{d}s$，容易得到$EA_{n,h}=\frac{1}{(nh)^{3-2H}}\int_{0}^{nh}E\left(\eta_{s}^{2}\right)\mathrm{d}s\to C(H)$。

由于 $E\eta_s^2\eta_t^2 = E\eta_s^2 E\eta_t^2 + 2(E\eta_s\eta_t)^2$，可得

$$\begin{aligned}
EA_{n,h}^2 &= E\left[\frac{1}{(nh)^{3-2H}}\int_0^{nh}\eta_s^2\mathrm{d}s\right]^2 = \frac{1}{(nh)^{6-4H}}E\left(\int_0^{nh}\int_0^{nh}\eta_s^2\eta_t^2\mathrm{d}s\mathrm{d}t\right)\\
&= \frac{1}{(nh)^{6-4H}}\int_0^{nh}\int_0^{nh}E\eta_s^2\eta_t^2\mathrm{d}s\mathrm{d}t\\
&= \frac{1}{(nh)^{6-4H}}\int_0^{nh}\int_0^{nh}\left[E\eta_s^2E\eta_t^2 + 2(E\eta_s\eta_t)^2\right]\mathrm{d}s\mathrm{d}t\\
&= \frac{1}{(nh)^{6-4H}}\int_0^{nh}\int_0^{nh}E\eta_s^2E\eta_t^2\mathrm{d}s\mathrm{d}t + \frac{2}{(nh)^{6-4H}}\int_0^{nh}\int_0^{nh}(E\eta_s\eta_t)^2\mathrm{d}s\mathrm{d}t\\
&= \frac{1}{(nh)^{6-4H}}\int_0^{nh}\int_0^{nh}E\eta_s^2E\eta_t^2\mathrm{d}s\mathrm{d}t = \left[\frac{\int_0^{nh}E\eta_s^2\mathrm{d}s}{(nh)^{3-2H}}\right]^2 \to C^2(H)
\end{aligned}$$

又由于 $\frac{2}{(nh)^{6-4H}}\int_0^{nh}\int_0^{nh}(E\eta_s\eta_t)^2\mathrm{d}s\mathrm{d}t \to 0,\ n\to\infty, h\to 0$，

$$E\left|A_{n,h} - C(H)\right|^2 = EA_{n,h}^2 - 2C(H)EA_{n,h} + C^2(H) \to 0,$$

即 $A_{n,h}\xrightarrow{p}C(H)$。进一步，有 $\frac{1}{(nh)^{2-2H}}\Lambda_1(n,h)\xrightarrow{p}C(H)$。

考虑 $\frac{1}{(nh)^{2-2H}}\Lambda_2(n,h)$，当 $n\to\infty, h\to 0$ 时，有 $\frac{1}{nh}\sum_{i=1}^{n}\eta_{ih}\Delta_{ih}h \sim \int_0^{nh}\eta_s\Delta_s\mathrm{d}s$，通过简单计算有

$$\begin{aligned}
\frac{1}{(nh)^{2-2H}}\Lambda_2(n,h) &= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{(nh)^{2-2H}}\cdot\frac{1}{nh}\sum_{i=1}^{n}\Delta_{ih}^2\cdot h\\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{(nh)^{3-2H}}\int_0^{nh}\Delta_t^2\mathrm{d}t\\
&= \frac{v^2}{\theta^2}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{(nh)^{3-2H}}\int_0^{nh}\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\theta t^2} + \mathrm{e}^{-\theta t^2}\right)\mathrm{d}t\\
&= \frac{v^2}{\theta^2}\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{(nh)^{2-2H}} - \frac{1}{\theta(nh)^{3-2H}}\right] = 0.
\end{aligned}$$

考虑 $\frac{1}{(nh)^{2-2H}}\Lambda_3(n,h)$，当 $n\to\infty, h\to 0$ 时，有 $\frac{1}{nh}\sum_{i=1}^{n}\eta_{ih}\Delta_{ih}h \sim \int_0^{nh}\eta_s\Delta_s\mathrm{d}s$。由于

$$\lim_{s\to\infty}\eta_s = \lim_{s\to\infty}\frac{s\mathrm{e}^{\frac{1}{2}\theta s^2}B_s^H - \int_0^s B_u^H\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{2}\theta u^2} + \theta u^2\mathrm{e}^{\frac{1}{2}\theta u^2}\right)\mathrm{d}u}{\mathrm{e}^{\frac{1}{2}\theta s^2}} = \lim_{s\to\infty}\left[sB_s^H - \frac{B_s^H\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{2}\theta s^2} + \theta s^2\mathrm{e}^{\frac{1}{2}\theta s^2}\right)}{\theta s\mathrm{e}^{\frac{1}{2}\theta s^2}}\right] = \lim_{s\to\infty}\frac{B_s^H}{\theta s} = 0$$

故

$$\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\theta(nh)^2}\eta_{nh}\xrightarrow{a.s.}0 \tag{14}$$

从而

$$\begin{aligned}&\lim_{n\to\infty}\frac{1}{(nh)^{2-2H}}\Lambda_3(n,h)\\&=2\lim_{n\to\infty}\frac{1}{(nh)^{2-2H}}\cdot\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\eta_{ih}\Delta_{ih}=2\lim_{n\to\infty}\frac{1}{(nh)^{2-2H}}\cdot\frac{1}{nh}\sum_{i=1}^{n}\eta_{ih}\Delta_{ih}\cdot h\\&=2\lim_{n\to\infty}\frac{1}{(nh)^{3-2H}}\int_0^{nh}\eta_s\Delta_s\mathrm{d}s=\frac{2v}{\theta}\lim_{n\to\infty}\frac{\eta_{nh}+\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\theta(nh)^2}\eta_{nh}}{(3-2H)(nh)^{2-2H}}\\&=\frac{2v}{\theta(3-2H)}\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\eta_{nh}}{(nh)^{2-2H}}+\frac{\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\theta(nh)^2}\eta_{nh}}{(nh)^{2-2H}}\right)=0\end{aligned}$$

引理得证。

引理 3.4： 令 $\frac{1}{2}\le H<1$。当 $n\to\infty,h\to 0$ 时，

$$\frac{1}{(nh)^{3-2H}n}\Phi(n,h)\xrightarrow{P}\frac{H}{3-2H}\theta^{-2H}\Gamma(2H) \tag{15}$$

其中 $\Phi(n,h)=nh\sum_{i=1}^{n}\left(Y_{ih}^H\right)^2-h\left(\sum_{i=1}^{n}Y_{ih}^H\right)^2$

证明：

根据引理 3.1 和引理 3.2，易得

$$\frac{1}{(nh)^{3-2H}n}\Phi(n,h)=\frac{1}{(nh)^{2-2H}n}\sum_{i=1}^{n}\left(Y_{ih}^H\right)^2-\frac{1}{(nh)^{2-2H}}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}Y_{ih}^H\right)^2\to\frac{H\theta^{-2H}}{3-2H}\Gamma(2H).$$

引理 3.5： 令 $\frac{1}{2}\le H<1$。当 $n\to\infty,h\to 0$ 时，

$$\frac{1}{(nh)^{3-2H}n}\left(B_{nh}\sum_{i=1}^{n}Y_{ih}-n\sum_{i=1}^{n}\left(B_{ih}-B_{(i-1)h}\right)Y_{(i-1)h}\right)\xrightarrow{p}\frac{H}{3-2H}\theta^{1-2H}\Gamma(2H) \tag{16}$$

证明：

由(2)

$$\begin{aligned}\int_0^{nh}Y_s^H\mathrm{d}X_s^H&=\int_0^{nh}\left(\int_0^s\left(X_s^H-X_u^H\right)\mathrm{d}u\right)\mathrm{d}X_s^H\\&=\int_0^{nh}sX_s^H\mathrm{d}X_s^H-\int_0^{nh}\mathrm{d}X_s^H\int_0^s X_u^H\mathrm{d}u\\&=\int_0^{nh}sX_s^H\mathrm{d}X_s^H-\left(X_{nh}^H\int_0^{nh}X_u^H\mathrm{d}u-\int_0^{nh}\left(X_u^H\right)^2\mathrm{d}u\right)\\&=\frac{1}{2}nh\left(X_{nh}^H\right)^2-\frac{1}{2}\int_0^{nh}\left(X_u^H\right)^2\mathrm{d}u-X_{nh}^H\int_0^{nh}X_u^H\mathrm{d}u\end{aligned}$$

故

$$\begin{aligned}\int_0^{nh}Y_s^H\mathrm{d}B_s^H&=\int_0^{nh}Y_s^H\left[\mathrm{d}X_s^H-\left(v-\theta Y_s^H\right)\mathrm{d}s\right]=\int_0^{nh}Y_S^H\mathrm{d}X_S^H+\theta\int_0^{nh}\left(Y_S^H\right)^2\mathrm{d}s-v\int_0^{nh}Y_S^H\mathrm{d}s\\&=\frac{1}{2}nh\left(X_{nh}^H\right)^2-\frac{1}{2}\int_0^{nh}\left(X_u^H\right)^2\mathrm{d}u-X_{nh}^H\int_0^{nh}X_u^H\mathrm{d}u+\theta\int_0^{nh}\left(Y_S^H\right)^2\mathrm{d}s-v\int_0^{nh}Y_S^H\mathrm{d}s.\end{aligned}$$

最后，当 $n\to\infty,h\to 0$ 时，有 $\sum_{i=1}^{n}\left(B_{ih}^{H}-B_{(i-1)h}^{H}\right)Y_{(i-1)h}^{H}\sim\int_{0}^{nh}Y_{S}^{H}\mathrm{d}B_{S}^{H}$，从而

$$\begin{aligned}&\lim_{n\to\infty}\frac{1}{(nh)^{3-2H}}\sum_{i=1}^{n}\left(B_{ih}^{H}-B_{(i-1)h}^{H}\right)Y_{(i-1)h}^{H}\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{(nh)^{3-2H}}\int_{0}^{nh}Y_{S}^{H}\mathrm{d}B_{S}^{H}\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{\theta}{(nh)^{3-2H}}\int_{0}^{nh}\left(Y_{S}^{H}\right)^{2}\mathrm{d}s\\&=\frac{H}{3-2H}\theta^{1-2H}\Gamma(2H),\end{aligned}$$

又 $\frac{1}{(nh)^{3-2H}}\frac{B_{nh}^{H}}{n}\sum_{i=1}^{n}Y_{ih}^{H}=\frac{1}{(nh)^{2-2H}}\frac{B_{nh}^{H}}{nh}\frac{\sum_{i=1}^{n}Y_{ih}^{H}}{n}\to 0$。引理得证。

根据引理 3.4 和引理 3.5，可知：

$$\hat{\theta}_{nh}-\theta=\frac{\frac{1}{(nh)^{3-2H_n}}\left(B_{nh}^{H}\sum_{i=1}^{n}Y_{ih}^{H}-n\sum_{i=1}^{n}\left(B_{in}^{H}-B_{(i-1)h}^{H}\right)Y_{(i-1)h}^{H}\right)}{\frac{1}{(nhh)^{3-2H}n}\Psi(n,h)}\to\theta,$$

$$\hat{v}_{nh}-v=\frac{B_{nh}^{H}}{nh}+\left(\hat{\theta}_{nh}-\theta\right)\frac{\sum_{i=1}^{n}Y_{ih}^{H}}{n}\to v.$$

即 $\hat{\theta}_{nh}\to 2\theta,\hat{v}_{nh}\to 2v$。

定理 3.1： 令 $\frac{1}{2}\le H<1$。当 $n\to\infty,h\to 0$ 时，有

$$\tilde{\theta}_{1}=\frac{1}{2}\hat{\theta}_{nh}\xrightarrow{p}\theta$$
$$\tilde{v}_{1}=\frac{1}{2}\hat{v}_{nh}\xrightarrow{p}v$$

证明：

由 $\hat{\theta}_{nh}\to 2\theta,\hat{v}_{nh}\to 2v$。

显然 $\tilde{\theta}_{1}=\frac{1}{2}\hat{\theta}_{nh}\xrightarrow{p}\theta,\tilde{v}_{1}=\frac{1}{2}\hat{v}_{nh}\xrightarrow{p}v$。

基金项目

上海工程技术大学科研启动经费项目(项目编号：0244-E3-0507-19-05156)。

参考文献

[1] Mishura, Y.S. (2008) Stochastic Calculus for fractional Brownian Motion and Related Processes. *Lecture Notes in Mathematics*, **1929**, Springer, Berlin. https://doi.org/10.1007/978-3-540-75873-0

[2] Nualart, D. (2006) Malliavin Calculus and Related Topics. 2nd Edition. Springer-Verlag, Berlin.

[3] Durrett, R. and Rogers, L.C.G. (1992) Asymptotic Behavior of Brownian Polymer. *Probability Theory and Related Fields*, **92**, 337-349. https://doi.org/10.1007/BF01300560

[4] Cranston, M. and Le Jan, Y. (1995) Self-Attracting Diffusions: Two Case Studies. *Mathematische Annalen*, **303**, 87-93. https://doi.org/10.1007/BF01460980

[5] Yan, L., Sun, Y. and Lu, Y. (2008) On the Linear Fractional Self-Attracting Diffusion. *Journal of Theoretical Probability*, **21**, 502-516. https://doi.org/10.1007/s10959-007-0113-y

[6] Hu, Y. and Nualart, D. (2010) Parameter Estimation for Fractional Ornstein-Uhlenbeck Processes. *Statistics & Probability Letters*, **80**, 1030-1038. https://doi.org/10.1016/j.spl.2010.02.018

[7] Gan, Y. and Yan, L. (2018) Least Squares Estimation for a Linear Self-Repelling Diffusion Driven by Fractional Brownian Motion. *Science China Mathematics*, **48**, 1143-1158. https://doi.org/10.1360/SCM-2017-0387

[8] Young, L.C. (1936) An Inequality of Holder Type Connected with Stieltjes Integration. *Acta Mathematica*, **67**, 251-282. https://doi.org/10.1007/BF02401743