

Stability Analysis of HIV Models with Stage Structure and Bilinear Incidence

Yousu Huang, Xiaoling Zhang, Juan Li, Yuanyuan Wang, Lu Wang

School of Mathematics and Statistics, Changsha University of Science and Technology, Changsha Hunan
Email: chunluanshijie@163.com

Received: Dec. 17th, 2018; accepted: Jan. 22nd, 2019; published: Jan. 30th, 2019

Abstract

AIDS is one of the most harmful infectious diseases. In this paper, we study a class of HIV transmission models with stage structure and bilinear incidence. The spectral radius method is used to calculate the basic regeneration number R_0 . Furthermore, we prove that the system has a unique disease-free equilibrium E^0 when $R_0 < 1$ while its global asymptotic stability is obtained by the V -function method and the LaSalle invariant principle; and when $R_0 > 1$, the system adds an endemic equilibrium E^* which is globally asymptotically stable. Numerical simulations are carried out to verify our theoretical results.

Keywords

HIV Transmission Model, Basic Regeneration Number, Global Asymptotic Stability, V Function, LaSalle Invariant Principle

具有阶段结构和双线性发生率的HIV模型的稳定性分析

黄幼苏, 张晓玲, 李娟, 王圆圆, 王璐

长沙理工大学, 数学与统计学院, 湖南 长沙
Email: chunluanshijie@163.com

收稿日期: 2018年12月17日; 录用日期: 2019年1月22日; 发布日期: 2019年1月30日

摘要

艾滋病是具有严重危害性的传染病之一。本文研究了一类具有阶段结构和双线性发生率的HIV传播模型,

利用谱半径的方法计算得到疾病消亡或持续存在的阈值, 即基本再生数 R_0 。进一步地, 我们证明了当 $R_0 < 1$ 时系统仅存在无病平衡点 E^0 , 并且由 V 函数法以及 LaSalle 不变原理得到了它的全局渐近稳定性; 当 $R_0 > 1$ 时系统新增一个全局渐近稳定的地方病平衡点 E^* 。在文章的最后我们进行了数值模拟来验证我们的理论结果。

关键词

HIV 传播模型, 基本再生数, 渐近稳定性, V 函数, LaSalle 不变原理

Copyright © 2019 by authors and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

一直以来, 传染病的流行给人类造成了巨大的危害。天花、鼠疫、霍乱、艾滋病、非典、甲型 H1N1 流感、埃博拉等严重威胁到人类的生命和健康, 导致社会倒退, 给人类造成的损失大大超过历史上所有战争的总和。然而目前传染病的流行与防控形势仍然十分严峻[1] [2]。

人类免疫缺陷病毒(HIV)与常见传染病的传播特性具有显著的不同, 例如 HIV 是不可治愈的, 因此不存在治愈人群, 且从感染到死亡期间都属于传染期, 平均可长达十几年甚至几十年, 病人在染病的不同时期病理反应也不相同[3] [4]。

世界卫生组织(WHO)给出了成年人感染 HIV 后的临床过程, 主要包括三个阶段, 如图 1 所示。

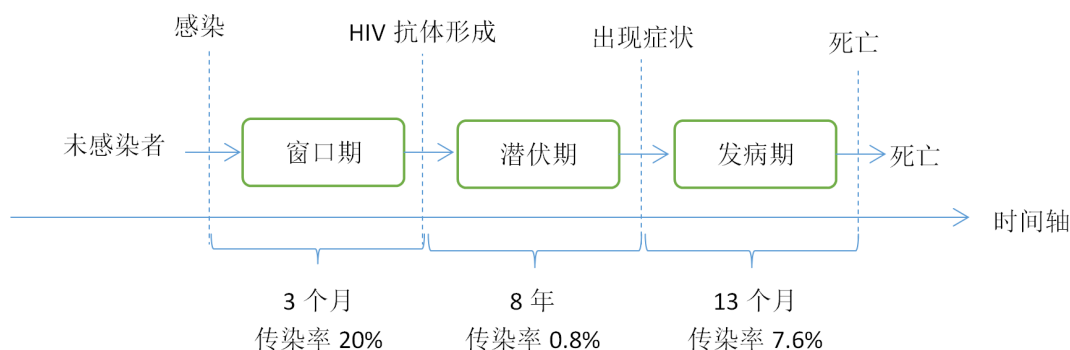


Figure 1. The clinical process of HIV infection in adults

图 1. 成年人感染 HIV 后的临床过程

尽管在窗口期检测不到艾滋病病毒抗体, 但艾滋病病毒已存在于感染者体内, 并且可以通过 HIV 核酸检测证实, 因此处于窗口期的感染者是具有传染性的。艾滋病潜伏期是指从感染艾滋病病毒到出现艾滋病症状和体征的时间, 感染者在此阶段内也具有传染性。

2. 模型建立及预备结论

在建立模型之前, 我们先做如下假设[5] [6]:

- 1) 人口增加率为常数 k , 且均为易感者。
- 2) HIV 携带者与易感者有相同的自然死亡率。

根据 WHO 公布的 HIV 的感染过程, 将总人口 $N(t)$ 分为四类: 易感者 S 、窗口期的 HIV 感染者 I_1 、潜伏期的 HIV 感染者 I_2 和发病期的 HIV 感染者 I_3 。采用双线性发生率, 我们建立如下 HIV 传播模型:

$$\begin{cases} \dot{S} = k - dS - S(\beta_1 I_1 + \beta_2 I_2 + \beta_3 I_3), \\ \dot{I}_1 = -dI_1 - \omega_1 I_1 + S(\beta_1 I_1 + \beta_2 I_2 + \beta_3 I_3), \\ \dot{I}_2 = -dI_2 - \omega_2 I_2 + \omega_1 I_1, \\ \dot{I}_3 = -dI_3 - \omega_3 I_3 + \omega_2 I_2, \\ S(0) = S^0, I_1(0) = I_1^0, I_2(0) = I_2^0, I_3(0) = I_3^0, \end{cases} \quad (1)$$

其中 $k > 0$ 为人口增加率, $d > 0$ 为人口自然死亡率, $\beta_i > 0$ 为第 i 阶段传染率, $\frac{1}{\omega_i} > 0$ 为第 i 阶段的平均间隔期。模型的初始条件如下:

$$S^0 > 0, I_1^0 > 0, I_2^0 > 0, I_3^0 > 0. \quad (2)$$

下面根据模型的实际意义证明系统(1)满足初值条件(2)的解的存在唯一性、正性和有界性。

引理 2.1: 系统(1)满足初值条件(2)的解是存在且唯一的。

证明: 系统(1)的右端函数是连续可微的, 满足 Liptstiz 条件, 因此满足初值条件的解存在且唯一。

引理 2.2: 若系统(1)满足初值条件(2), 则它的任意一个解 $\{S(t), I_1(t), I_2(t), I_3(t)\}$ 对于所有的 $t > 0$ 都是正的。

证明: 在给定的初始条件下易知系统的所有解都是正的。反之, 假设存在时刻 $t_0 > 0$, 使得 $m(t_0) = 0$, 当 $t \in [0, t_0)$ 时 $m(t) > 0$, 其中 $m(t) = \min\{S(t), I_1(t), I_2(t), I_3(t)\}$ 。若 $m(t_0) = S(t_0) = 0$, $S(t) > 0$ 当 $t \in [0, t_0)$, 则由导数的定义知, $\dot{S}(t_0) < 0$, 而由(1)可知 $\dot{S}(t_0) = k > 0$, 故矛盾, 因此 $S(t) > 0$ 对于 $t \in [0, +\infty)$ 。 $I_1(t), I_2(t), I_3(t)$ 可类似讨论, 引理得证。

引理 2.3: 若系统(1)满足初值条件(2), 则它的任意一个解 $\{S(t), I_1(t), I_2(t), I_3(t)\}$ 对于所有的 $t > 0$ 都是有界的。

证明: 由系统(1)可得:

$$\dot{N} = k - dN - \omega_3 I_3 \leq k - dN.$$

解得

$$0 \leq N \leq \frac{k}{d} + N(0)e^{-dt}.$$

这里 $N(0)$ 是初始时刻人口总数。因此

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} N(t) \leq \frac{k}{d}.$$

易知 $\Omega = R_+^4 \cap \left\{ S + I_1 + I_2 + I_3 \leq \frac{k}{d} \right\}$ 是系统(1)的正向不变集, 且系统满足初值条件的解最终都进入 Ω , 即 Ω 是吸收集。由 Ω 的有界性可得解的有界性[7]。

3. 模型的无病平衡点和基本再生数

令 $I_1 = I_2 = I_3 = 0$ 可得系统(1)的无病平衡点 $E^0 \left(\frac{k}{d}, 0, 0, 0 \right)$ 。记 $S_0 = \frac{k}{d}$ 。下面我们用再生矩阵的方法

[8] [9]求得基本再生数。

令 $X = (I_1, I_2, I_3, S)$ 则系统(1)变成 $\dot{X} = \mathfrak{R}(x) - \mathfrak{N}(x)$, 其中:

$$\mathfrak{R}(x) = \begin{pmatrix} S(\beta_1 I_1 + \beta_2 I_2 + \beta_3 I_3) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathfrak{N}(X) = \begin{pmatrix} (d + \omega_1)I_1 \\ (d + \omega_2)I_2 - \omega_1 I_1 \\ (d + \omega_3)I_3 - \omega_2 I_2 \\ S(\beta_1 I_1 + \beta_2 I_2 + \beta_3 I_3) + dS - k \end{pmatrix}.$$

$\mathfrak{R}(x), \mathfrak{N}(x)$ 在 E^0 处的 Jacobian 矩阵分别为:

$$R = \begin{bmatrix} S_0\beta_1 & S_0\beta_2 & S_0\beta_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad H = \begin{bmatrix} d + \omega_1 & 0 & 0 & 0 \\ -\omega_1 & d + \omega_2 & 0 & 0 \\ 0 & -\omega_2 & d + \omega_3 & 0 \\ S_0\beta_1 & S_0\beta_2 & S_0\beta_3 & d \end{bmatrix}.$$

则模型的基本再生数 R_0 为:

$$R_0 = \rho(RH^{-1}) = \frac{S_0\beta_1(d + \omega_2)(d + \omega_3) + S_0\beta_2\omega_1(d + \omega_3) + S_0\beta_3\omega_1\omega_2}{(d + \omega_1)(d + \omega_2)(d + \omega_3)}.$$

定理 3.1: 当 $R_0 > 1$ 时, 无病平衡点 E^0 是不稳定的; 当 $R_0 < 1$ 时, 无病平衡点 E^0 是局部渐近稳定的。

证明: 系统(1)在 E^0 的 Jacobian 矩阵为:

$$J(E^0) = \begin{pmatrix} -d & -S_0\beta_1 & -S_0\beta_2 & -S_0\beta_3 \\ 0 & -d - \omega_1 + S_0\beta_1 & S_0\beta_2 & S_0\beta_3 \\ 0 & \omega_1 & -d - \omega_2 & 0 \\ 0 & 0 & \omega_2 & -d - \omega_3 \end{pmatrix}.$$

记

$$A = \begin{pmatrix} -d - \omega_1 + S_0\beta_1 & S_0\beta_2 & S_0\beta_3 \\ \omega_1 & -d - \omega_2 & 0 \\ 0 & \omega_2 & -d - \omega_3 \end{pmatrix}.$$

易知 $J(E^0)$ 有一个特征值为 $-d$, $J(E^0)$ 的其余三个特征值即为 A 的特征值。

$$\begin{aligned} \det(A) &= S_0\beta_3\omega_1\omega_2 - (d + \omega_3)[d(d + \omega_3) - S_0\beta_1(d + \omega_2) + \omega_1(-S_0\beta_2 + d + \omega_2)] \\ &= (d + \omega_1)(d + \omega_2)(d + \omega_3) \left[\frac{S_0\beta_1(d + \omega_2)(d + \omega_3) + S_0\beta_1\omega_1(d + \omega_3) + S_0\beta_3\omega_1\omega_2}{(d + \omega_1)(d + \omega_2)(d + \omega_3)} - 1 \right] \\ &= (d + \omega_1)(d + \omega_2)(d + \omega_3)(R_0 - 1). \end{aligned}$$

当 $R_0 > 1$ 时 $\det(A) > 0$ 。此时 $J(E^0)$ 必有一个正的特征根, 因此无病平衡的 E^0 是不稳定的。下面说明当 $R_0 < 1$ 时, E^0 是局部渐近稳定的。

由前面分析知:

$$\text{Tr}(A) = -3d - \omega_1 - \omega_2 - \omega_3 + S_0\beta_1.$$

易知当 $R_0 < 1$ 时 $\text{Tr}(A) < 0$ 。另外 A 的第二加性复合矩阵[10][11]为:

$$A^{[2]} = \begin{pmatrix} -d - \omega_1 + S_0\beta_1 - d - \omega_2 & 0 & -S_0\beta_3 \\ \omega_2 & -d - \omega_1 + S_0\beta_1 - d - \omega_3 & 0 \\ 0 & \omega_1 & -d - \omega_2 - d - \omega_3 \end{pmatrix}.$$

则

$$\begin{aligned} \text{Tr}(A^{[2]}) &= S_0 \omega_1 [-\beta_3 \omega_2 + \beta_2 (2d - S_0 \beta_1 + \omega_1 + \omega_2)] \\ &\quad - (2d - S_0 \beta_1 + \omega_1 + \omega_2)(2d - S_0 \beta_1 + \omega_1 + \omega_3)(2d + \omega_2 + \omega_3) \end{aligned}$$

当 $R_0 < 1$ 时 $\text{Tr}(A^{[2]}) < 0$ 。因此无病平衡点 E^0 是局部渐近稳定的[6]。

事实上, $R_0 < 1$ 时 E^0 还是全局渐近稳定的。

定理 3.2 当 $R_0 < 1$ 时, 无病平衡点 E^0 是全局渐近稳定的。

证明: 我们只需考虑 E^0 在系统的正向不变集 $\Omega = R_+^4 \cap \left\{ S + I_1 + I_2 + I_3 \leq \frac{k}{d} \right\}$ 中的全局渐近稳定性。构造 Lyapunov 函数 $V: \Omega \rightarrow R$ 如下:

$$V(S, I_1, I_2, I_3) = \left(S - S_0 - S_0 \ln \frac{S}{S_0} \right) + a_1 I_1 + a_2 I_2 + a_3 I_3.$$

其中 $a_i (i=1,2,3)$ 为待定常数。易知 $V \in C^1$ 且在 Ω 内 V 只在 E^0 取得最小值, 即 $V(E^0) = 0$ 。且有:

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \dot{S} \left(1 - \frac{S_0}{S} \right) + a_1 \dot{I}_1 + a_2 \dot{I}_2 + a_3 \dot{I}_3 = \left(1 - \frac{S_0}{S} \right) [k - dS - S(\beta_1 I_1 + \beta_2 I_2 + \beta_3 I_3)] \\ &\quad + a_1 [-dI_1 - \omega_1 I_1 + S(\beta_1 I_1 + \beta_2 I_2 + \beta_3 I_3)] \\ &\quad + a_2 (-dI_2 - \omega_2 I_2 + \omega_1 I_1) + a_3 (-dI_3 - \omega_3 I_3 + \omega_2 I_2) \\ &= -dS \left(1 - \frac{S_0}{S} \right)^2 - S(\beta_1 I_1 + \beta_2 I_2 + \beta_3 I_3) + S_0(\beta_1 I_1 + \beta_2 I_2 + \beta_3 I_3) \\ &\quad + a_1 [-dI_1 - \omega_1 I_1 + S(\beta_1 I_1 + \beta_2 I_2 + \beta_3 I_3)] \\ &\quad + a_2 (-dI_2 - \omega_2 I_2 + \omega_1 I_1) + a_3 (-dI_3 - \omega_3 I_3 + \omega_2 I_2) \end{aligned}$$

令 $a_1 = 1, a_2 = \frac{S_0 \beta_2 (d + \omega_3) + \omega_2 S_0 \beta_3}{(d + \omega_2)(d + \omega_3)}, a_3 = \frac{S_0 \beta_3}{d + \omega_3}$, 则上式右端可变成:

$$\begin{aligned} \dot{V} &= -dS \left(1 - \frac{S_0}{S} \right)^2 + [S_0 \beta_1 - (d + \omega_1) + a_2 \omega_1] I_1 = -dS \left(1 - \frac{S_0}{S} \right)^2 - (d + \omega_1) \left[1 - \frac{S_0 \beta_1 + a_2 \omega_1}{d + \omega_1} \right] I_1 \\ &= -dS \left(1 - \frac{S_0}{S} \right)^2 - (d + \omega_1)(1 - R_0) I_1. \end{aligned}$$

因此当 $R_0 < 1$ 时, $\dot{V} \leq 0$ 。又注意到 $\{\dot{V} = 0\} = \{E^0\}$, 由 LaSalle 不变原理, $R_0 < 1$ 时 E^0 在 Ω 上是渐近稳定的, 而 Ω 为吸收集, 因此 E^0 是全局渐近稳定的。

4. 地方病平衡点的存在性和渐近稳定性

这一节我们将讨论模型的地方病平衡点的存在性及其渐近稳定性。

定理 4.1: 当 $R_0 > 1$ 时, 系统(1)存在唯一的地方病平衡点。

证明: 假设系统(1)有正平衡点 $E^*(S^*, I_1^*, I_2^*, I_3^*)$, 则正平衡点 E^* 满足下列方程组:

$$\begin{cases} k - dS - S(\beta_1 I_1 + \beta_2 I_2 + \beta_3 I_3) = 0 \\ -dI_1 - \omega_1 I_1 + S(\beta_1 I_1 + \beta_2 I_2 + \beta_3 I_3) = 0 \\ -dI_2 - \omega_2 I_2 + \omega_1 I_1 = 0 \\ -dI_3 - \omega_3 I_3 + \omega_2 I_2 = 0 \end{cases}$$

且有 $I_1^* \neq 0, I_2^* \neq 0, I_3^* \neq 0$ 。则有如下关系成立:

$$S^* = \frac{S_0}{R_0}, I_2^* = \frac{dS_0\omega_1(R_0-1)}{R_0(d+\omega_1)(d+\omega_2)}, I_1^* = \frac{(d+\omega_2)I_2^*}{\omega_1}, I_3^* = \frac{\omega_2 I_2^*}{d+\omega_3}.$$

因此, 当 $R_0 > 1$ 时存在地方病平衡点。

下面分析地方病平衡点的渐近稳定性。由于地方病平衡点的代数形式比较复杂, 用特征值方法判断其局部渐近稳定性难以实现。我们用 LaSalle 不变原理证明地方病平衡点 E^* 在 $\Omega = \text{int } \Omega$ 上是渐近稳定的。

首先我们可以得到以下关于持久性的引理:

引理 4.1 若 $R_0 > 1$, 若初值条件满足 $S^0 > 0, I_1^0 > 0, I_2^0 > 0, I_3^0 > 0$, 则存在常数 $C > 0$ 使得满足初值条件的解有如下关系:

$$\min \left\{ \liminf_{t \rightarrow +\infty} S(t), \liminf_{t \rightarrow +\infty} I_1(t), \liminf_{t \rightarrow +\infty} I_2(t), \liminf_{t \rightarrow +\infty} I_3(t) \right\} > C.$$

即从 $S^0 > 0, I_1^0 > 0, I_2^0 > 0, I_3^0 > 0$ 出发的轨线不会趋于无病平衡点 E^0 。

定理 4.1 若 $R_0 > 1$, 则地方病平衡点 E^* 在 Ω 上是渐近稳定的。

证明: 定义 V 函数: $\Omega \rightarrow R$

$$V(S, I_1, I_2, I_3) = \left(S - S^* - S^* \ln \frac{S}{S^*} \right) + a_1 \left(I_1 - I_1^* - I_1^* \ln \frac{I_1}{I_1^*} \right) + a_2 \left(I_2 - I_2^* - I_2^* \ln \frac{I_2}{I_2^*} \right) + a_3 \left(I_3 - I_3^* - I_3^* \ln \frac{I_3}{I_3^*} \right).$$

其中 a_1, a_2, a_3 均为待定的非负常数。易知 $V \in C^1$ 且在 Ω 内 V 只在 E^* 取得最小值, 即 $V(E^*) = 0$ 。计算 V 沿系统的全导数, 我们有:

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \left(1 - \frac{S^*}{S} \right) \dot{S} + a_1 \left(1 - \frac{I_1^*}{I_1} \right) \dot{I}_1 + a_2 \left(1 - \frac{I_2^*}{I_2} \right) \dot{I}_2 + a_3 \left(1 - \frac{I_3^*}{I_3} \right) \dot{I}_3 \\ &= \left(1 - \frac{S^*}{S} \right) [k - dS - S(\beta_1 I_1 + \beta_2 I_2 + \beta_3 I_3)] \\ &\quad + a_1 \left(1 - \frac{I_1^*}{I_1} \right) [-dI_1 - \omega_1 I_1 + S(\beta_1 I_1 + \beta_2 I_2 + \beta_3 I_3)] \\ &\quad + a_2 \left(1 - \frac{I_2^*}{I_2} \right) (-dI_2 - \omega_2 I_2 + \omega_1 I_1) + a_3 \left(1 - \frac{I_3^*}{I_3} \right) (-dI_3 - \omega_3 I_3 + \omega_2 I_2) \\ &= (k + dS^* + a_1 dI_1^* + a_1 \omega_1 I_1^* + a_2 dI_2^* + a_2 \omega_2 I_2^* + a_3 dI_3^* + a_3 \omega_3 I_3^*) + (-d - a_1 \beta_1 I_1^*) S \\ &\quad + (a_1 - 1) S(\beta_1 I_1 + \beta_2 I_2 + \beta_3 I_3) + (S^* \beta_1 - a_1 d - a_1 \omega_1 + a_2 \omega_1) I_1 \\ &\quad + (S^* \beta_2 - a_2 d - a_2 \omega_2 + a_3 \omega_2) I_2 + (S^* \beta_3 - a_3 d - a_3 \omega_3) I_3 \\ &\quad + \left(-k \frac{S^*}{S} - a_1 \beta_2 I_1^* \frac{SI_2}{I_1} - a_1 \beta_3 I_1^* \frac{SI_3}{I_1} - a_2 \omega_1 I_2^* \frac{I_1}{I_2} - a_3 \omega_2 I_3^* \frac{I_2}{I_3} \right) \end{aligned} \tag{3}$$

为了简化符号, 我们记:

$$\begin{aligned} c &= k + dS^* + a_1 dI_1^* + a_1 \omega_1 I_1^* + a_2 dI_2^* + a_2 \omega_2 I_2^* + a_3 dI_3^* + a_3 \omega_3 I_3^*, \\ w &= \frac{S}{S^*}, \quad x = \frac{I_1}{I_1^*}, \quad y = \frac{I_2}{I_2^*}, \quad z = \frac{I_3}{I_3^*}. \end{aligned}$$

注意到 $\left\{ w, \frac{1}{w} \right\}, \left\{ \frac{1}{w}, \frac{wz}{x}, \frac{y}{z}, \frac{x}{y} \right\}, \left\{ \frac{1}{w}, \frac{wy}{x}, \frac{x}{y} \right\}$ 的代数特征。假设(3)式右端形如:

$$b_1 \left(2 - w - \frac{1}{w} \right) + b_2 \left(4 - \frac{1}{w} - \frac{wz}{x} - \frac{y}{z} - \frac{x}{y} \right) + b_3 \left(3 - \frac{1}{w} - \frac{wy}{x} - \frac{x}{y} \right),$$

其中 b_1, b_2, b_3 为待定常数。注意到 $E^*(S^*, I_1^*, I_2^*, I_3^*)$ 为系统(1)的平衡点, 则有:

$$\begin{cases} 2b_1 + 4b_2 + 3b_3 = c \\ b_1 = (d + a_1 I_1^* \beta_1) S^* \\ a_1 - 1 = 0 \\ b_1 + b_2 + b_3 = k \\ -a_2(d + \omega_2) + a_2 \omega_2 + S^* \beta_2 = 0 \\ -a_3(d + \omega_3) + S^* \beta_3 = 0 \\ b_3 = S^* \beta_2 I_2^* \\ b_2 = S^* \beta_3 I_3^* = a_3 \omega_2 I_2^* \\ b_2 + b_3 = a_2 \omega_1 I_1^* \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b_1 = (d + a_1 I_1^* \beta_1) S^* > 0 \\ b_2 = S^* \beta_3 I_3^* > 0 \\ b_3 = S^* \beta_2 I_2^* > 0 \\ a_1 = 1 \\ a_2 = \frac{S^* \beta_3 \omega_2 + S^* \beta_2 (d + \omega_3)}{(d + \omega_2)(d + \omega_3)} \\ a_3 = \frac{S^* \beta_3}{d + \omega_3} \end{cases}$$

因此:

$$\dot{V} = b_1 \left(2 - w - \frac{1}{w} \right) + b_2 \left(4 - \frac{1}{w} - \frac{wz}{x} - \frac{y}{z} - \frac{x}{y} \right) + b_3 \left(3 - \frac{1}{w} - \frac{wy}{x} - \frac{x}{y} \right) \leq 0,$$

$\dot{V} = 0$ 当且仅当 $w = \frac{1}{w} = \frac{wz}{x} = \frac{y}{z} = \frac{x}{y} = \frac{wy}{x} = 1$, 即 $\{\dot{V} = 0\} = \{E^*\}$ 。由 LaSalle 不变原理知地方病平衡

点 E^* 在 Ω 上是渐近稳定的。

注: 根据引理 4.1 和定理 4.1, 并结合引理 2.3 的证明, 可知: 地方病平衡点 E^* 还是全局渐近稳定的。

5. 数值模拟

为了验证理论结果的正确性, 在本节中我们利用 MATLAB 对系统(1)的解进行数值模拟。取系统初值如下:

$$S^0 = 10000, \quad I_1^0 = 15, \quad I_2^0 = 50, \quad I_3^0 = 50.$$

1) 当 $R_0 < 1$ 时的情形

取参数值如下:

$$\begin{aligned} k = 10, \quad d = 0.01, \quad \omega_1 = \frac{1}{3}, \quad \omega_2 = \frac{1}{96}, \\ \omega_3 = \frac{1}{13}, \quad \beta_1 = 2 \times 10^{-4}, \quad \beta_2 = 8 \times 10^{-6}, \quad \beta_3 = 7.6 \times 10^{-5}. \end{aligned} \quad (4)$$

此时 $R_0 \approx 0.9016 < 1$, 数值模拟结果如图 2~图 4 所示。

由定理 3.2 可知, 轨线最终收敛到无病平衡点 $E^0(1000, 0, 0, 0)$, 由数值模拟得到

$$S(20000) = 999.9983, \quad I_1(20000) = 4.5139 \times 10^{-6}, \quad I_2(20000) = 7.4608 \times 10^{-4}, \quad I_3(20000) = 9.1416 \times 10^{-5}.$$

因此数值模拟结果与理论结果一致。

ii) 当 $R_0 > 1$ 时的情形

取参数值如下:

$$\begin{aligned} k = 15, \quad d = 0.01, \quad \omega_1 = \frac{1}{3}, \quad \omega_2 = \frac{1}{96}, \\ \omega_3 = \frac{1}{13}, \quad \beta_1 = 2 \times 10^{-4}, \quad \beta_2 = 8 \times 10^{-6}, \quad \beta_3 = 7.6 \times 10^{-5}. \end{aligned} \quad (5)$$

此时 $R_0 \approx 1.35238 > 1$, 模拟结果如图 5~图 7 所示。

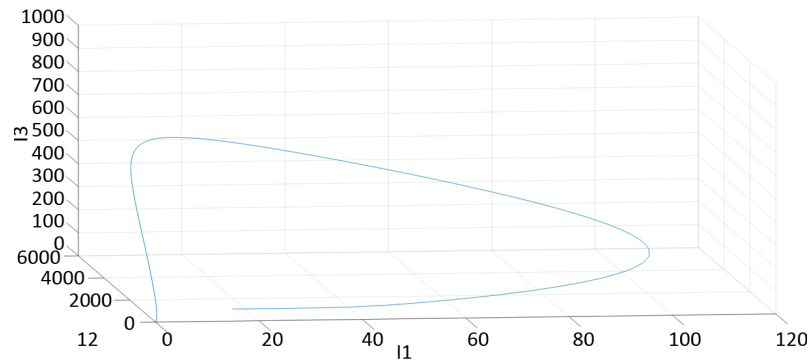


Figure 2. Three-dimensional projection of phase portrait of system (1) with $S^0 = 10000$, $I_1^0 = 15$, $I_2^0 = 50$, $I_3^0 = 50$, and the parameter values are shown in (4)

图 2. 参数取值如(4)所示, 当初值取 $S^0 = 10000, I_1^0 = 15, I_2^0 = 50, I_3^0 = 50$ 时系统(1)的相图在三维空间的投影

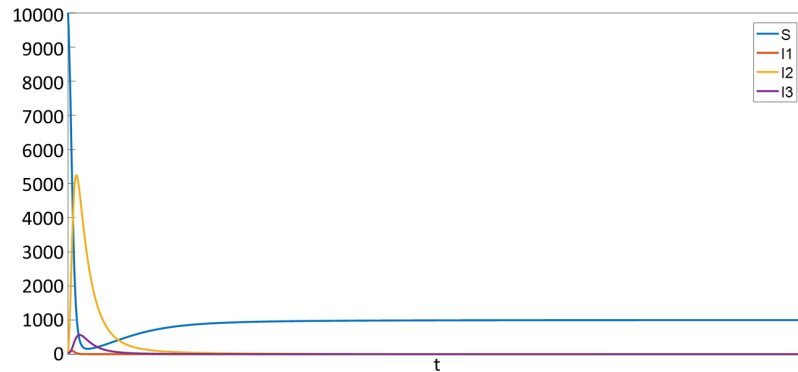


Figure 3. Images of S, I_1, I_2, I_3 of the solution of system (1) with $S^0 = 10000$, $I_1^0 = 15$, $I_2^0 = 50$, $I_3^0 = 50$ and the parameter values are shown in (4)

图 3. 参数取值如(4)所示, 当初值取 $S^0 = 10000, I_1^0 = 15, I_2^0 = 50, I_3^0 = 50$ 时系统(1)的解各分量 S, I_1, I_2, I_3 随时间变化的图像

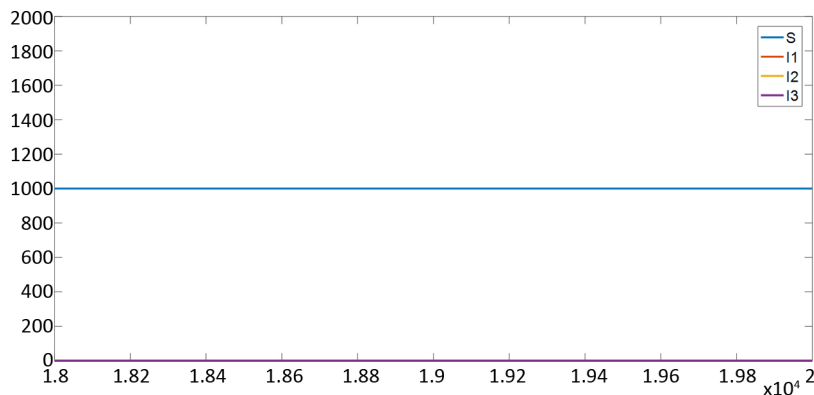


Figure 4. Images of S, I_1, I_2, I_3 of the solution of system (1) with $S^0 = 10000$, $I_1^0 = 15$, $I_2^0 = 50$, $I_3^0 = 50$ and the parameter values are shown in (4), time of integration: [18000, 20000]

图 4. 参数取值如(4)所示, 当初值取 $S^0 = 10000, I_1^0 = 15, I_2^0 = 50, I_3^0 = 50$ 时系统(1)的解各分量 S, I_1, I_2, I_3 在时间 $t \in [18000, 20000]$ 的图像

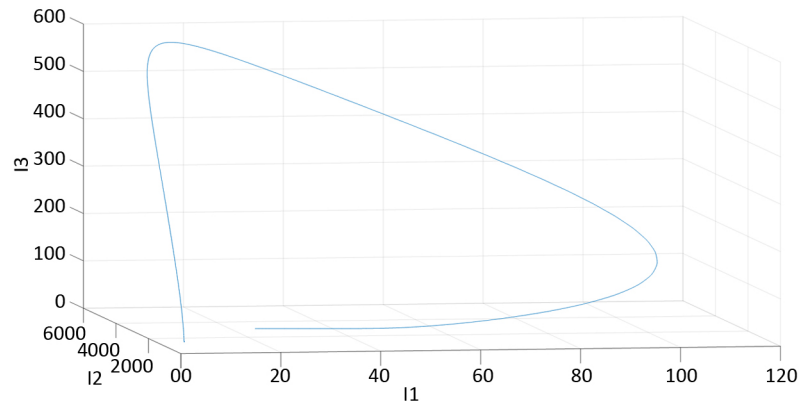


Figure 5. Three-dimensional projection of phase portrait of system (1) with $S^0 = 10000$, $I_1^0 = 15$, $I_2^0 = 50$, $I_3^0 = 50$, and the parameter values are shown in (5)

图 5. 参数取值如(5)所示, 当初值取 $S^0 = 10000, I_1^0 = 15, I_2^0 = 50, I_3^0 = 50$ 时系统(1)的相图在三维空间的投影

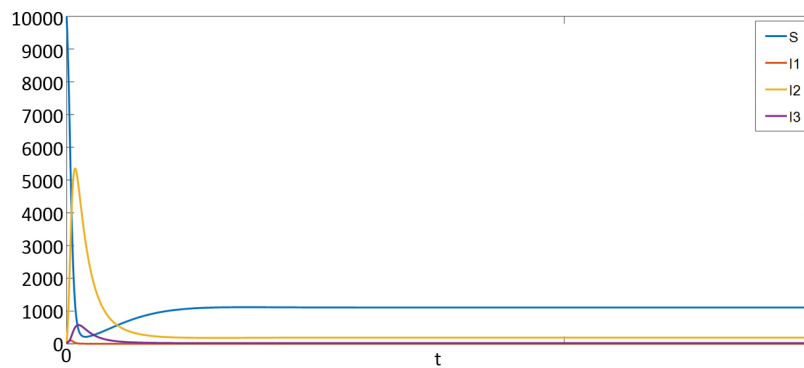


Figure 6. Images of S, I_1, I_2, I_3 of the solution of system (1) with $S^0 = 10000$, $I_1^0 = 15$, $I_2^0 = 50$, $I_3^0 = 50$ and the parameter values are shown in (5)

图 6. 参数取值如(5)所示, 当初值取 $S^0 = 10000, I_1^0 = 15, I_2^0 = 50, I_3^0 = 50$ 时, 系统(1)的解各分量 S, I_1, I_2, I_3 随时间变化的图像

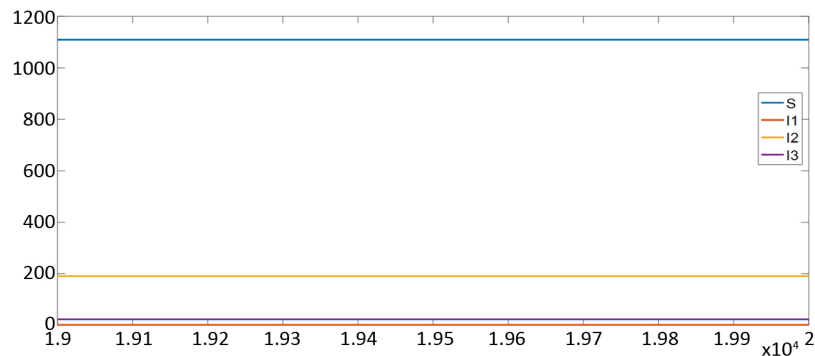


Figure 7. Images of S, I_1, I_2, I_3 of the solution of system (1) with $S^0 = 10000$, $I_1^0 = 15$, $I_2^0 = 50$, $I_3^0 = 50$ and the parameter values are shown in (5), time of integration : [19000,20000]

图 7. 参数取值如(5)所示, 当初值取 $S^0 = 10000, I_1^0 = 15, I_2^0 = 50, I_3^0 = 50$ 时, 系统(1)的解各分量 S, I_1, I_2, I_3 在时间 $t \in [19000, 20000]$ 的图像

由定理 4.1 可知, 任一正解最终将被吸引到地方病平衡点:

$$E^*(1109.15, 1.29849, 190.799, 22.8649).$$

另一方面, 由数值模拟得到:

$$S(20000) = 1.1092 \times 10^3, I_1(20000) = 1.2983,$$

$$I_2(20000) = 190.7990, I_3(20000) = 22.8649.$$

这表明, 数值模拟结果与理论结果吻合。

6. 结论

本文我们根据世界卫生组织给出的成年人感染 HIV 后的临床过程, 建立了一个具有阶段结构和双线性发生率的 HIV 传播模型。通过对模型的稳定性分析我们知道, 疾病本身的传播特征以及环境等因素会形成一个决定疾病最终消亡还是持续存在的阈值 R_0 : 即当 $R_0 < 1$ 时, 疾病最终会消亡; 当 $R_0 > 1$ 时, 会产生一个全局渐近稳定的地方病平衡点, 即疾病最终会持续存在且稳定在该平衡点附近。数值模拟结果验证了理论结果的正确性。我们期望所得数学结果能为传染病预防与控制中心决策提供理论指导。

基金项目

受湖南省大学生研究性学习与创新性实验计划项目资助(湘教通[2016]283 号)和长沙理工大学数学与应用数学专业“十三五”专业综合改革试点项目资助。

参考文献

- [1] 马知恩, 周义仓. 传染病动力学的数学建模与研究[M]. 北京: 科学出版社, 2004.
- [2] 陈雪玲. 一类具有性传播的艾滋病模型的研究[D]: [硕士学位论文]. 乌鲁木齐: 新疆大学, 2017.
- [3] 买买提江·买斯塔洪. 具有人口迁移的艾滋病模型的稳定性分析及最优控制[D]: [硕士学位论文]. 乌鲁木齐: 新疆大学, 2017.
- [4] Mushayabasa, S. (2014) On the role of HIV/AIDS Support Groups on Combating New Infections. *HIV & AIDS Review*, **13**, 109-119. <https://doi.org/10.1016/j.hivar.2014.07.002>
- [5] 范新华, 陈荣军. 数学建模[M]. 南京: 南京大学出版社, 2018: 89-94.
- [6] 梁国业, 廖建平. 数学建模[M]. 北京: 冶金工业出版社, 2004: 256-263.
- [7] Lamichhane, S. and Chen, Y.M. (2015) Global Asymptotic Stability of a Compartmental Model for a Pandemic. *Journal of the Egyptian Mathematical Society*, **23**, 251-255. <https://doi.org/10.1016/j.joems.2014.04.001>
- [8] Van den Driessche, P. and Watmough, J. (2002) Reproduction Numbers and Sub-Threshold Endemic Equilibria for Compartmental Models of Disease Transmission. *Mathematical Biosciences*, **180**, 29-48. [https://doi.org/10.1016/S0025-5564\(02\)00108-6](https://doi.org/10.1016/S0025-5564(02)00108-6)
- [9] Huo, H.F. and Feng, L.X. (2013) Global Stability for an HIV/AIDS Epidemic Model with Different Latent Stages and Treatment. *Applied Mathematical Modelling*, **37**, 1480-1489. <https://doi.org/10.1016/j.apm.2012.04.013>
- [10] Li, M.Y., Muldowney, J.S. and On, R.A. (1995) Smith's Autonomous Convergence Theorem. *Rocky Mountain Journal of Mathematics*, **25**, 365-379. <https://doi.org/10.1216/rmj/1181072289>
- [11] McCluskey, C.C. and Driessche, P.V.D. (2004) Global Analysis of Two Tuberculosis Models. *Journal of Dynamics & Differential Equations*, **16**, 139-166. <https://doi.org/10.1023/B:JODY.0000041283.66784.3e>

知网检索的两种方式：

1. 打开知网页面 <http://kns.cnki.net/kns/brief/result.aspx?dbPrefix=WWJD>
下拉列表框选择：[ISSN]，输入期刊 ISSN：2324-7991，即可查询
2. 打开知网首页 <http://cnki.net/>
左侧“国际文献总库”进入，输入文章标题，即可查询

投稿请点击：<http://www.hanspub.org/Submission.aspx>

期刊邮箱：aam@hanspub.org