Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, 2019, 8(2), 320-326
Published Online February 2019 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2019.82036

Hans汉斯

The Generalized 3-Connectivity of Cartesian Product of Complete Graphs

Hengzhe Li, Yuanyuan Lu, Jiajia Wang

College of Mathematics and Information Science, Henan Normal University, Xinxiang Henan
Email: lhz@htu.cn, lyy1xf@163.com, sxywjj012@163.com

Received: Feb. 3rd, 2019; accepted: Feb. 18th, 2019; published: Feb. 26th, 2019

Abstract

Let S be a set of at least two vertices in a graph G. A subtree T of G is an S-Steiner tree if $S \subseteq V(T)$. Two S-Steiner trees T_1 and T_2 are internally disjoint if $E(T_1) \cap E(T_2) = \varnothing$ and $V(T_1) \cap V(T_2) = S$. Let $\kappa_G(S)$ be the maximum number of internally disjoint S-Steiner trees in G, and let $\kappa_k(G)$ be the minimum $\kappa_G(S)$ for S ranges over all k-subsets of $V(G)$. In this paper, we study the κ_3-connectivity of Cartesian product of complete graphs, determine $\kappa_3(K_{n_1} \square K_{n_2}) = n_1 + n_2 - 3$ for any two complete graphs; $\kappa_3(K_{n_1} \square K_{n_2} \square \cdots \square K_{n_k}) = \sum_{i=1}^{k} n_i - k - 1$ for any k complete graphs, where $k \ge 2$.

Keywords

Complete Graphs, κ_3-Connectivity, Cartesian Product

完全图的笛卡尔积的广义3-连通度

李恒哲，芦园园，王佳佳

河南师范大学数学和信息科学学院，河南 新乡
Email: lhz@htu.cn, lyy1xf@163.com, sxywjj012@163.com

收稿日期：2019年2月3日；录用日期：2019年2月18日；发布日期：2019年2月26日

摘　要

设S是图G中至少有2个顶点的集合，T是G的一棵子树。如果 $S \subseteq V(T)$，则称T是G的一棵S-斯坦纳树。设T_1

文章引用: 李恒哲, 芦园园, 王佳佳. 完全图的笛卡尔积的广义 3-连通度[J]. 应用数学进展, 2019, 8(2): 320-326.
DOI: 10.12677/aam.2019.82036

与 T_2 是 S-斯坦纳树，如果 $E(T_1)\cap E(T_2)=\varnothing$ 且 $V(T_1)\cap V(T_2)=S$，则称 T_1 与 T_2 是内部不交的 S-斯坦纳树。$\kappa_G(S)$ 表示图 G 中内部不交的 S-斯坦纳树的最大数目，$\kappa_k(G)$ 是当 S 遍及 $V(G)$ 的所有 k 元子集时的最小的 $\kappa_G(S)$。在本文中，我们研究完全图的笛卡尔积的 κ_3-连通度。对于任意两个完全图 K_{n_1} 与 K_{n_2}，确定 $\kappa_3(K_{n_1}\square K_{n_2})=n_1+n_2-3$；对于任意 $k(k\geq 2)$ 个完全图，确定 $\kappa_3(K_{n_1}\square K_{n_2}\square\cdots\square K_{n_k})=\sum_{i=1}^{k}n_i-k-1$。

关键词

完全图，κ_3-连通度，笛卡尔积

1. 引言

在本文中，所有的图都是无向、有限的简单图。对于在本文中没有提到的图论的概念与术语，我们可以参考[1]。

设图 G 是一个连通图，S 是图 G 中至少有 2 个顶点的集合，T 是 G 的一棵子树。如果 $S\subseteq V(T)$，则称 T 是 G 的一棵 S-斯坦纳树。设 T_1 与 T_2 是 S-斯坦纳树，如果 $E(T_1)\cap E(T_2)=\varnothing$ 且 $V(T_1)\cap V(T_2)=S$，则称 T_1 与 T_2 是内部不交的 S-斯坦纳树。对于 $V(G)$ 的一个子集 S，$\kappa_G(S)$ 表示图 G 中内部不交的 S-斯坦纳树的最大数目。如果 $S=\{x,y\}$，则 $\kappa_G(S)=\kappa_G(\{x,y\})$ 是局部点连通度。对于 $k\geq 2$ 的整数，$\kappa_k(G)$ 是当 S 遍及 $V(G)$ 的所有 k 元子集时的最小的 $\kappa_G(S)$，称它为广义 k-连通度，简称 κ_k-连通度。Chartrand 等人[2]引入了 κ_k-连通度。显然，当 $|S|=2$ 时，$\kappa_2(G)=\kappa(G)$。

笛卡尔积是最重要的图运算之一，并且在网络的设计与分析中有重要作用。在过去的几十年，许多图论学者研究了笛卡尔积图的(边)连通度[3]-[9]。显然，在同构意义下，该运算满足交换律，即 $G\square H\cong H\square G$，该运算满足结合律，即 $(F\square G)\square H\cong F\square(G\square H)$。

对于一般图 G 来说，确定 $\kappa_k(G)$ 是一件非常困难的事情。到目前为止，只有少数图类的 κ_k-连通度被确定，例如，Chartrand 等人[10]确定了完全图的 κ_k-连通度；Lin 和 Zhang 确定了超立方体的 κ_4-连通度；Li 和 Wang [11]确定了递归循环图的 λ_3-连通度与 κ_3-连通度，等等。图论学者研究了图的广义连通度的上界与下界[12] [13] [14] [15] [16]，图论学者研究了图运算的广义(边)连通度的上界与下界[12] [17]。更多的结果，可以参考[18]。

在本文中，我们将研究完全图的笛卡尔积的 κ_3-连通度。本文的结构如下，在第 2 部分，我们将介绍一些定义和已知的结论；在第 3 部分，我们将给出主要的结果。

2. 预备知识

设 G 和 H 是两个图，图 G 与 H 的笛卡尔积，记作 $G\square H$，其顶点集为 $V(G)\times V(H)$，两个顶点 (u,v) 与 (u',v') 相邻当且仅当 $u=u'$ 且 $vv'\in E(H)$，或 $v=v'$ 且 $uu'\in E(G)$。特别地，n 条路的笛卡尔积是 n-维网格图。长为 1 的 n 条路的笛卡尔积是 n-维超立方体。

设 G 与 H 是两个图，顶点集分别为 $V(G)=\{u_1,u_2,\cdots,u_n\}$，$V(H)=\{v_1,v_2,\cdots,v_m\}$。我们用 $G(u_i,v_j)$ 来表示 $G\square H$ 的子图，这个子图是由顶点集 $\{(u_i,v_j)\mid 1\leq i\leq n\}$ 诱导出来的。类似的，我们用 $H(u_i,v_j)$ 来表示 $G\square H$ 的子图，这个子图是由顶点集 $\{(u_i,v_j)\mid 1\leq j\leq m\}$ 诱导出来的。显然，对于图 G 中的不同顶点 u_{i_1} 与

u_{i_2}，有 $G\left(u_{i_1},v_j\right)=G\left(u_{i_2},v_j\right)$。为了简单，我们可以用 G^{v_j} 来代替 $G\left(u_i,v_j\right)(1\le i\le n)$。类似的，我们也可以用 H^{u_i} 来代替 $H\left(u_i,v_j\right)(1\le j\le m)$。下面的几个符号可以简化我们的证明。

给定一个顶点 $v_a\in V(H)$，对于 $V(G)$ 中的任意顶点 u，有 $u^{v_a}:=(u,v_a)$，对于 G 中的任意子图 G_1，有 $G_1^{v_a}:=\left(V\left(G_1^{v_a}\right),E\left(G_1^{v_a}\right)\right)$，其中 $V\left(G_1^{v_a}\right)=\left\{(u,v_a):u\in V(G_1)\right\}$，$E\left(G_1^{v_a}\right)=\left\{(u,v_a)(u',v_a):uu'\in E(G_1)\right\}$。

给定一个顶点 $v_b\in V(H)$，对于任意顶点 $(u,v_a)\in V\left(G^{v_a}\right)$，有 $(u,v_a)^{v_b}:=(u,v_b)$，对于任意子图 $G_1\subseteq G^{v_a}$，有 $G_1^{v_b}:=\left(V\left(G_1^{v_b}\right),E\left(G_1^{v_b}\right)\right)$，其中 $V\left(G_1^{v_b}\right)=\left\{(u,v_b):(u,v_a)\in V\left(G_1^{v_a}\right)\right\}$，$E\left(G_1^{v_b}\right)=\left\{(u,v_b)(u',v_b):(u,v_a)(u',v_a)\in E\left(G_1^{v_a}\right)\right\}$。

类似的，给定一个顶点 $u_a\in V(G)$，对于 $v\in V(H)$ 可以定义映射 v^{u_a}，对于 $H_1\subseteq H$ 可以定义映射 $H_1^{u_a}$；给定一个顶点 $u_b\in V(G)$，对于 $(u_a,v)\in V\left(H^{u_a}\right)$ 可以定义映射 $(u_a,v)^{u_b}$，对于 $H_1\subseteq H^{u_a}$ 可以定义映射 $H_1^{u_b}$。

下面的几个定理和引理对我们要证明的结果很重要。

定理 2.1 [10]：对于任意两个整数 n 和 k，$2\le k\le n$，有 $\kappa_k\left(K_n\right)=n-\left\lceil\frac{k}{2}\right\rceil$。

引理 2.2 [13]：设图 G 是一个至少有 3 个顶点的连通图，如果图 G 有两个最小度为 $\delta(G)$ 的相邻顶点，则有 $\kappa_k(G)\le\delta(G)-1$；而且，上界是紧的。

定理 2.3 [1]：设图 G 是一个 k-连通图，如果 x 与 y 是 G 中的一对不同顶点，那么在图 G 中存在 k 条内部不交的 xy-路 $P_1,P_2,\cdots,P_k$。

引理 2.4 [19]：如果图 G 是 k-连通的，那么对于任意顶点 x 和子集 $U\subseteq V(G)\setminus x$，满足 $|U|\ge k$，都有一个大小为 k 的 x，U-扇。

定理 2.5 [20]：$\kappa_4\left(Q_k\right)=k-1$，$k\ge 2$。

引理 2.6 [20]：设 k,r 是两个整数，$k\ge 4$，G 是一个 r-正则图，如果 $\kappa_k(G)=r-1$，那么 $\kappa_{k-1}(G)=r-1$。

引理 2.7 [17]：设 $C_1,C_2,\cdots,C_k$ 是 k 个圈，则 $\kappa_3\left(C_1\square C_2\square\cdots\square C_k\right)=2k-1$。

3. 主要定理及其证明

在本文中，K_{n_i} 表示有 n_i 个顶点的完全图，其中 $1\le i\le k$。一条 xy-路是一条起始于 x，终止于 y 的路。对于一条路 P 来说，其中 $x,y\in V(P)$，我们用 xPy 去表示 P 上连接 x,y 的子路。

定理 3.1：对于任意两个完全图 K_{n_1} 与 K_{n_2}，有 $\kappa_3\left(K_{n_1}\square K_{n_2}\right)=n_1+n_2-3$。

证明：根据 n_1 与 n_2 的取值情况，考虑如下三种情形。

情形 1：$n_1=n_2=2$。

因为 $n_1=n_2=2$，所以两个完全图都是 K_2。显然，$\kappa_3\left(K_2\square K_2\right)=\kappa_3\left(C_4\right)=1=2+2-3$。

情形 2：$n_1\ge 3,n_2=2$。

由引理 2.2 知，$\kappa_3\left(K_{n_1}\square K_2\right)\le\delta\left(K_{n_1}\square K_2\right)-1=n_1-1$，故只需证 $\kappa_3\left(K_{n_1}\square K_2\right)\ge n_1-1$。令 $V\left(K_{n_1}\right)=\left\{u_1,u_2,\cdots,u_{n_1}\right\}$，$V\left(K_2\right)=\left\{v_1,v_2\right\}$，$S=\{x,y,z\}\subseteq V\left(K_{n_1}\square K_2\right)$。下面分两种子情形讨论。

子情形 2.1：$S\subseteq K_{n_1}^{v_i}$，$i=1,2$。

不失一般性，假设 $S\subseteq K_{n_1}^{v_1}$。由定理 2.1 知，$\kappa_3\left(K_{n_1}\right)=n_1-\left\lceil\frac{3}{2}\right\rceil=n_1-2$，故在 K_{n_1} 中有 n_1-2 棵内部不交的 S-斯坦纳树，记作 $T_1,T_2,\cdots,T_{n_1-2}$。令 $T_{n_1-1}=T_1^{v_2}\cup xx^{v_2}\cup yy^{v_2}\cup zz^{v_2}$。显然，$T_1,T_2,\cdots,T_{n_1-1}$ 是 n_1-1 棵内部不交的 S-斯坦纳树。

子情形 2.2：S 中的某两个顶点属于某个 $K_{n_1}^{v_i}$，$i=1,2$。

不失一般性，假设 $x,y\in K_{n_1}^{v_1}$，$z\in K_{n_1}^{v_2}$。因为 $\kappa\left(K_{n_1}\right)=n_1-1$，$K_{n_1}^{v_i}\cong K_{n_1}$，$i=1,2$，所以由定理 2.3 知，在 $K_{n_1}^{v_1}$ 中存在 n_1-1 条内部不交的 xy-路 P_i，$1\le i\le n_1-1$，在 $K_{n_1}^{v_2}$ 中存在 n_1-1 条内部不交的 $x^{v_2}z$-路 Q_i，

$1 \le i \le n_1 - 1$。令 x_i 是在 P_i 上的 x 的邻点。令 $T_i = P_i \cup x_i^{v_2} Q_i z \cup x_i^{v_2} x_i$，$1 \le i \le n_1 - 1$。显然，$T_1, T_2, \cdots, T_{n_1-1}$ 是 $n_1 - 1$ 棵内部不交的 S-斯坦纳树。

情形 3： $n_1 \ge 3, n_2 \ge 3$。

由引理 2.2 知，$\kappa_3\left(K_{n_1} \square K_{n_2}\right) \le \delta\left(K_{n_1} \square K_{n_2}\right) - 1 = n_1 + n_2 - 3$，故只需证 $\kappa_3\left(K_{n_1} \square K_{n_2}\right) \ge n_1 + n_2 - 3$。令 $V\left(K_{n_1}\right) = \left\{u_1, u_2, \cdots, u_{n_1}\right\}$，$V\left(K_{n_2}\right) = \left\{v_1, v_2, \cdots, v_{n_2}\right\}$，$S = \{x, y, z\} \subseteq V\left(K_{n_1} \square K_{n_2}\right)$。下面分三种子情形讨论。

子情形 3.1： $S \subseteq K_{n_1}^{v_i}$，$1 \le i \le n_2$。

因为此情形与子情形 2.1 的讨论类似，所以留给读者证明。

子情形 3.2： S 中的某两个顶点属于某个 $K_{n_1}^{v_i}$，$1 \le i \le n_2$。

因为此情形与子情形 2.2 的讨论类似，所以留给读者证明。

子情形 3.3： S 中的三个顶点分别属于不同的 $K_{n_1}^{v_i}$，$1 \le i \le n_2$。

不失一般性，设 $x \in K_{n_1}^{v_1}$，$y \in K_{n_1}^{v_2}$，$z \in K_{n_1}^{v_3}$。下面分三种情形讨论。

如果 $S \subseteq K_{n_2}^{u_i}$，不妨设 $S \subseteq K_{n_2}^{u_1}$。由定理 2.1 知，$\kappa_3\left(K_{n_2}^{u_1}\right) = n_2 - 2$，所以在 $K_{n_2}^{u_1}$ 中有 $n_2 - 2$ 棵内部不交的 S-斯坦纳树，记作 $T_1, T_2, \cdots, T_{n_2-2}$。令 $T_i' = T_1^{u_i} \cup xx^{u_i} \cup yy^{u_i} \cup zz^{u_i}$，$2 \le i \le n_1$。显然，$T_1, T_2, \cdots, T_{n_2-2}, T_2', \cdots, T_{n_1}'$ 是 $n_1 + n_2 - 3$ 棵内部不交的 S-斯坦纳树。

如果 $x, y \in K_{n_2}^{u_s}$，$z \in K_{n_2}^{u_t}$，其中 $s \ne t$。因为 $\kappa\left(K_{n_1}\right) = n_1 - 1$，$K_{n_1}^{v_1} \cong K_{n_1}$，所以由定理 2.3 知，在 $K_{n_1}^{v_1}$ 中存在 $n_1 - 1$ 条内部不交的 xz^{v_1}-路 P_i，$1 \le i \le n_1 - 1$。因为 K_{n_1} 是简单图，所以在 $K_{n_1}^{v_1}$ 中可以找到 $n_1 - 2$ 条长度至少为 2 的 xz^{v_1}-路 P_i，$1 \le i \le n_1 - 2$。令 x_i 是在 P_i 上的 x 的邻点，$T_i = xP_i x_i \cup x_i^{v_2} P_i^{v_2} y \cup x_i^{v_3} P_i^{v_3} z \cup x_i^{v_2} x_i \cup x_i^{v_2} x_i^{v_3}$，$1 \le i \le n_1 - 2$；$T_{n_1-1} = P_{n_1-1} \cup P_{n_1-1}^{v_2} \cup z^{v_1} z^{v_2} \cup z^{v_2} z$；$T_{n_1} = xy \cup yy^{v_3} \cup P_{n_1-1}^{v_3}$；$T_j' = x^{v_j} x \cup x^{v_j} y \cup z^{v_j} z \cup P_1^{v_j}$，$4 \le j \le n_2$。显然，$T_1, T_2, \cdots, T_{n_1}, T_4', \cdots, T_{n_2}'$ 是 $n_1 + n_2 - 3$ 棵内部不交的 S-斯坦纳树。

如果 $x \in K_{n_2}^{u_r}$，$y \in K_{n_2}^{u_s}$，$z \in K_{n_2}^{u_t}$，其中 r, s, t 不相等。当 $n_1 = n_2 = 3$ 时，由引理 2.7 知，$\kappa_3\left(K_3 \square K_3\right) = \kappa_3\left(C_3 \square C_3\right) = 3$，故定理成立。当 $n_1 \ge 4$ 和 $n_2 \ge 3$ 时，令 w_i 是在图 $K_{n_1}^{v_1}$ 中除顶点 y^{v_1} 与 z^{v_1} 外的 x 的邻点，则 $T_i = xw_i \cup w_i w_i^{v_2} \cup w_i^{v_2} w_i^{v_3} \cup w_i^{v_2} y \cup w_i^{v_3} z$，$1 \le i \le n_1 - 3$。令 $T_1' = xy^{v_1} \cup y^{v_1} z^{v_1} \cup yy^{v_1} \cup zz^{v_1}$；$T_2' = xx^{v_2} \cup x^{v_2} y \cup yz^{v_2} \cup z^{v_2} z$；$T_3' = xx^{v_3} \cup x^{v_3} y^{v_3} \cup y^{v_3} z \cup y^{v_3} y$；$T_j' = xx^{v_j} \cup yy^{v_j} \cup zz^{v_j} \cup x^{v_j} y^{v_j} \cup y^{v_j} z^{v_j}$，$4 \le j \le n_2$。显然，$T_1, T_2, \cdots, T_{n_1-3}, T_1', \cdots, T_{n_2}'$ 是 $n_1 + n_2 - 3$ 棵内部不交的 S-斯坦纳树。

定理 3.2： 对于任意 $k(k \ge 2)$ 个完全图，有 $\kappa_3\left(K_{n_1} \square K_{n_2} \square \cdots \square K_{n_k}\right) = \sum_{i=1}^{k} n_i - k - 1$。

证明： 对 k 用归纳法。因为图的笛卡尔积满足交换律和结合律，所以可设 $n_1 \le n_2 \le \cdots \le n_k$。如果 $n_k = 2$，那么 $K_{n_1} \square K_{n_2} \square \cdots \square K_{n_k}$ 是超立方体 Q_k，由定理 2.5 与引理 2.6 知，定理成立。

接下来只讨论 $n_k \ge 3$ 即可。当 $k = 2$ 时，由定理 3.1 知，定理成立；假设对于任意不超过 $k-1$ 个完全图的笛卡尔积，定理都成立，即 $\kappa_3\left(K_{n_1} \square K_{n_2} \square \cdots \square K_{n_{k-1}}\right) = \sum_{i=1}^{k-1} n_i - k$ 成立；现在证明对于任意 k 个完全图的笛卡尔积，定理成立。由引理 2.2 知，$\kappa_3\left(K_{n_1} \square K_{n_2} \square \cdots \square K_{n_k}\right) \le \delta\left(K_{n_1} \square K_{n_2} \square \cdots \square K_{n_k}\right) - 1 = \sum_{i=1}^{k} n_i - k - 1$，故只需证 $\kappa_3\left(K_{n_1} \square K_{n_2} \square \cdots \square K_{n_k}\right) \ge \sum_{i=1}^{k} n_i - k - 1$。为了简便，令图 G 表示图 $K_{n_1} \square K_{n_2} \square \cdots \square K_{n_{k-1}}$，$a = \sum_{i=1}^{k-1} n_i - k$，$b = \sum_{i=1}^{k} n_i - k - 1$。令 $V(G) = \{u_1, u_2, \cdots, u_n\}$，$V\left(K_{n_k}\right) = \left\{v_1, v_2, \cdots, v_{n_k}\right\}$，$S = \{x, y, z\} \subseteq V\left(G \square K_{n_k}\right)$。考虑如下三种情形。

情形 1： $S \subseteq G^{v_i}$，$1 \le i \le n_k$。

不失一般性，假设 $S \subseteq G^{v_1}$。由归纳假设知，在 G^{v_1} 中可以找到 a 棵内部不交的 S-斯坦纳树，记作 $T_1, T_2, \cdots, T_a$。我们只需在 G^{v_1} 外找 $n_k - 1$ 棵内部不交的 S-斯坦纳树，令 $T_i' = T_1^{v_i} \cup xx^{v_i} \cup yy^{v_i} \cup zz^{v_i}$，$2 \le i \le n_k$。显然，$T_1, T_2, \cdots, T_a, T_2', \cdots, T_{n_k}'$ 是 b 棵内部不交的 S-斯坦纳树。

情形 2： S 中的某两个顶点属于某个 G^{v_i}，$1 \le i \le n_k$。

不失一般性，假设 $x, y \in G^{v_1}$，$z \in G^{v_2}$。下面分两种子情形讨论。

子情形 2.1：$\left|z^{v_1} \cap \{x, y\}\right| = 0$。

因为$\kappa(G)=\delta(G)=a+1$，$G^{v_i} \cong G$，$i=1,2,\cdots,n_k$，所以由定理 2.3 知，在G^{v_1}中存在$a+1$条内部不交的xy-路P_i，$1\le i\le a+1$，在G^{v_2}中存在$a+1$条内部不交的$x^{v_2}z$-路Q_i，$1\le i\le a+1$。令x_i是在P_i上的x的邻点。在G^{v_j}中任取一棵$\left\{x^{v_j}, y^{v_j}, z^{v_j}\right\}$-斯坦纳树$R^{v_j}$，$3\le j\le n_k$。令$T_i = P_i \cup x_i^{v_2} Q_i z \cup x_i^{v_2} x_i$，$1\le i\le a+1$；$T_j' = R^{v_j} \cup xx^{v_j} \cup yy^{v_j} \cup zz^{v_j}$，$3\le j\le n_k$。显然，$T_1, T_2, \cdots, T_{a+1}, T_3', \cdots, T_{n_k}'$是$b$棵内部不交的$S$-斯坦纳树。

子情形 2.2：$\left|z^{v_1} \cap \{x, y\}\right| = 1$。

不失一般性，假设$z^{v_1} = y$。因为$\kappa(G)=\delta(G)=a+1$，$G^{v_1} \cong G$，所以由定理 2.3 知，在G^{v_1}中存在$a+1$条内部不交的xy-路P_i，$1\le i\le a+1$。令x_i是在P_i上的x的邻点。令$T_i = P_i \cup x_i^{v_2} P_i^{v_2} z \cup x_i^{v_2} x_i$，$1\le i\le a+1$；$T_j' = P_1^{v_j} \cup xx^{v_j} \cup yy^{v_j} \cup zy^{v_j}$，$3\le j\le n_k$。显然，$T_1, T_2, \cdots, T_{a+1}, T_3', \cdots, T_{n_k}'$是$b$棵内部不交的$S$-斯坦纳树。

情形 3：S中的三个顶点分别属于不同的G^{v_i}，$1\le i\le n_k$。

不失一般性，假设$x\in G^{v_1}$，$y\in G^{v_2}$，$z\in G^{v_3}$。下面分三种子情形讨论。

子情形 3.1：$S \subseteq K_{n_k}^{u_i}$，$1\le i\le n$。

不失一般性，假设$S \subseteq K_{n_k}^{u_1}$。因为$\kappa(G)=\delta(G)=a+1$，所以在$G^{v_1}$中，顶点$x$有$a+1$个邻点，记作$x_1, x_2, \cdots, x_{a+1}$。令$T_i = xx_i \cup yx_i^{v_2} \cup zx_i^{v_3} \cup x_i x_i^{v_2} \cup x_i^{v_2} x_i^{v_3}$，$1\le i\le a+1$。又因为$K_{n_k}$是完全图，所以由定理 2.1 知，$\kappa_3\left(K_{n_k}\right) = n_k - 2$，故在$K_{n_k}^{u_1}$中有$n_k-2$棵内部不交的$S$-斯坦纳树，记作$T_1', \cdots, T_{n_k-2}'$。显然，$T_1, T_2, \cdots, T_{a+1}, T_1', \cdots, T_{n_k-2}'$是$b$棵内部不交的$S$-斯坦纳树。

子情形 3.2：$x, y \in K_{n_k}^{u_s}$，$z \in K_{n_k}^{u_t}$，$s \ne t$。

因为$\kappa(G)=\delta(G)=a+1$，$G^{v_1} \cong G$，所以由定理 2.3 知，在G^{v_1}中存在$a+1$条内部不交的xz^{v_1}-路P_i，$1\le i\le a+1$。因为图G是简单图，所以在G^{v_1}中可以找到a条长度至少为 2 的xz^{v_1}-路P_i，$1\le i\le a$。令x_i是在P_i上的x的邻点。令$T_i = xP_i x_i \cup x_i^{v_2} P_i^{v_2} y \cup x_i^{v_3} P_i^{v_3} z \cup x_i^{v_2} x_i \cup x_i^{v_2} x_i^{v_3}$，$1\le i\le a$；$T_{a+1} = P_{a+1}^{v_2} \cup xy \cup zz^{v_2}$；$T_{a+2} = xx^{v_3} \cup yx^{v_3} \cup P_{a+1}^{v_3}$；$T_j' = P_1^{v_j} \cup x^{v_j} x \cup x^{v_j} y \cup z^{v_j} z$，$4\le j\le n_k$。显然，$T_1, T_2, \cdots, T_{a+2}, T_4', \cdots, T_{n_k}'$是$b$棵内部不交的$S$-斯坦纳树。

子情形 3.3：$x \in K_{n_k}^{u_i}$，$y \in K_{n_k}^{u_l}$，$z \in K_{n_k}^{u_m}$，其中i, l, m不相等。

令$x = (u_i, v_1), y = (u_l, v_2), z = (u_m, v_3)$，$S' = \left\{(u_c, v_j) \mid c = i, l, m; j = 1,2,3\right\}$。考虑如下两种情况。

如果在G中，u_i, u_l, u_m中的某两个顶点不相邻。不失一般性，假设在G中u_i, u_l不相邻。因为$\kappa(G)=\delta(G)=a+1$，所以在G中存在$a+1$条内部不交的$u_i u_l$-路，记作P_j，设u_{i_j}是u_i的邻点，$1\le j\le a+1$。假设u_m不在P_j上，$1\le j\le a$。由引理 2.4 知，在G中存在一个从u_m到$\left\{u_{i_1}, u_{i_2}, \cdots, u_{i_a}, u_l\right\}$的$(a+1)$-扇，记作$Q_j$，其中有一条$u_{i_j} u_m$-路，$1\le j\le a$，$Q_{a+1}$是一条$u_m u_l$-路。令$H_j = \left(u_i u_{i_j}\right)^{v_1} \cup K_{n_k}^{u_{i_j}} \cup \left(P_j - u_i\right)^{v_2} \cup Q_j^{v_3}$，$1\le j\le a$。因为每个$H_j$有一棵支撑树$T_j$，$1\le j\le a$，所以我们找到$a$棵内部不交的$S$-斯坦纳树，记作$T_1, T_2, \cdots, T_a$。因为$K_{n_k}$是$(n_k-1)$-连通的，所以在$K_{n_k}$中存在$n_k-1$条内部不交的$v_1 v_2$-路，记作$R_j$，设$v_{i_j}$是$v_2$的邻点，$1\le j\le n_k-1$。又因为$K_{n_k}$是完全图，所以可假设$v_{i_1}, v_{i_2}, \cdots, v_{i_{n_k-3}} \ne v_1, v_3$，令$v_{i_{n_k-2}} = v_3$，$v_{i_{n_k-1}} = v_1$，故$R_{n_k-2} - v_2 = v_1 v_3$，$R_{n_k-1} = v_1 v_2$。

因为$\kappa\left(K_{n_k}\right) = n_k - 1$，所以在$K_{n_k} - v_1$中存在一个从$v_3$到$\left\{v_{i_1}, v_{i_2}, \cdots, v_{i_{n_k-3}}, v_2\right\}$的$(n_k-2)$-扇，记作$S_j$，其中有一条$v_{i_j} v_3$-路，$1\le j\le n_k-3$，有一条$v_2 v_3$-路$S_{n_k-2}$。令

$$T_j' = \left(R_j - v_2\right)^{u_i} \cup \left(G - \left\{u_{i_1}, u_{i_2}, \cdots, u_{i_a}\right\}\right)^{v_{i_j}} \cup \left(v_{i_j} v_2\right)^{u_l} \cup S_j^{u_m},\quad 1\le j\le n_k-3;$$

$$T_{n_k-2}' = \left(v_1 v_2\right)^{u_i} \cup \left(G - \left\{u_{i_1}, u_{i_2}, \cdots, u_{i_a}\right\}\right)^{v_2} \cup S_{n_k-2}^{u_m};\quad T_{n_k-1}' = \left(v_1 v_3\right)^{u_i} \cup Q_{a+1}^{v_3} \cup P_{a+1}^{v_1} \cup \left(v_1 v_2\right)^{u_l}。$$

显然，$T_1, T_2, \cdots, T_a, T_1', \cdots, T_{n_k-1}'$是$b$棵内部不交的$S$-斯坦纳树(如图 1 所示)。

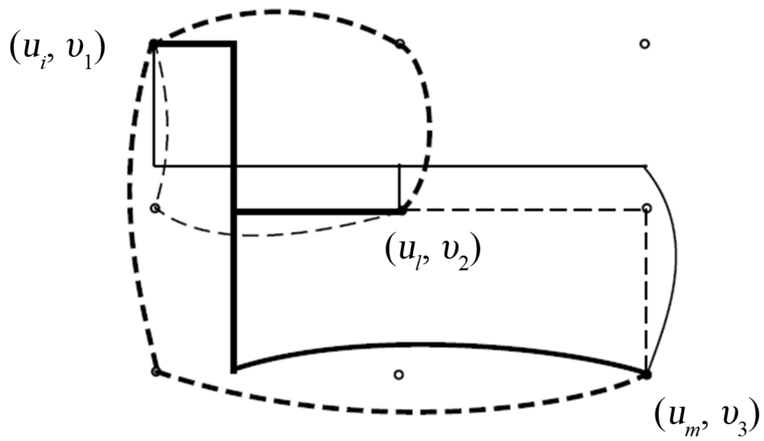

Figure 1. Solid lines in bold for T_j, $1 \le j \le a$; Solid lines for T'_j, $1 \le j \le n_k - 3$; Dashed lines for T'_{n_k-2}; Dashed lines in bold for T'_{n_k-1}

图 1. 粗实线表示T_j，$1 \le j \le a$；细实线表示$T'_j, 1 \le j \le n_k - 3$；细虚线表示$T'_{n_k-2}$；粗虚线表示$T'_{n_k-1}$

如果在 G 中，u_i, u_l, u_m 两两相邻。由引理 2.7 知，在 $(G \square K_{n_k})(S')$ 中有 3 条内部不交的 S-斯坦纳树，记作 T''_1, T''_2, T''_3。因为 G 是 $(a+1)$-连通的，所以 $\kappa((G-u_m)-u_iu_l) \ge a-1$，故在 $(G-u_m)-u_iu_l$ 中存在 $a-1$ 条内部不交的 u_iu_l-路，记作 P_j。令 u_{i_j} 是 u_i 的邻点，$1 \le j \le a-1$。由引理 2.4 知，在 $G-u_i-u_l$ 中存在一个从 u_m 到 $\{u_{i_1}, u_{i_2}, \cdots, u_{i_{a-1}}\}$ 的 $(a-1)$-扇。类似于情况 1，可以构造 $a-1$ 棵内部不交的 S-斯坦纳树 $T_1, T_2, \cdots, T_{a-1}$。又因为 $\kappa(K_{n_k}) = n_k - 1$，所以可以构造 $n_k - 3$ 棵内部不交的 S-斯坦纳树 $T'_1, T'_2, \cdots, T'_{n_k-3}$。显然，$T_1, T_2, \cdots, T_{a-1}, T'_1, T'_2, \cdots, T'_{n_k-3}, T''_1, T''_2, T''_3$ 是 b 棵内部不交的 S-斯坦纳树。

基金项目

国家自然科学基金（No. 11401181）。

致　谢

作者非常感谢审稿人和编辑的宝贵意见和建议，改善了本文的呈现。

参考文献

[1] Bondy, J.A. and Murty, U.S.R. (2008) Graph Theory, GTM 244. Springer, Berlin.

[2] Chartrand, G., Kapoor, S.F., Lesniak, L. and Lick, D.R. (1984) Generalized Connectivity in Graphs. *Bulletin of the Bombay Mathematical Colloquium*, **2**, 1-6.

[3] Chiue, W.-S. and Shieh, B.-S. (1999) On Connectivity of Cartesian Product of Two Graphs. *Applied Mathematics and Computation*, **102**, 129-137. https://doi.org/10.1016/S0096-3003(98)10041-3

[4] Imrich, W. and Klavžar, S. (2000) Product Graphs. Structure and Recognition. Wiley-Interscience Series in Discrete Mathematics and Optimization, Wiley, New York.

[5] Imrich, W., Klavžar, S. and Rall, D.F. (2008) Topics in Graph Theory. Graphs and Their Cartesian Product. AK Peters, Wellesley.

[6] Klavžar, S. and Spacapan, S. (2008) On the Edge-Connectivity of Cartesian Product Graphs. *Asian-European Journal of Mathematics*, **1**, 93-98.

[7] Sabidussi, G. (1957) Graphs with Given Group and Given Graph-Theoretic Properties. *Canadian Journal of Mathematics*, **9**, 515-525. https://doi.org/10.4153/CJM-1957-060-7

[8] Špacapan, S. (2008) Connectivity of Cartesian Products of Graphs. *Applied Mathematics Letters*, **21**, 682-685. https://doi.org/10.1016/j.aml.2007.06.010

[9] Xu, J. and Yang, C. (2006) Connectivity of Cartesian Product Graphs. *Discrete Mathematics*, **306**, 159-165. https://doi.org/10.1016/j.disc.2005.11.010

[10] Chartrand, G., Okamoto, F. and Zhang, P. (2010) Rainbow Trees in Graphs and Generalized Connectivity. *Networks*, **55**, 360-367.

[11] Li, H. and Wang, J. (2018) The λ_3-Connectivity and κ_3-Connectivity of Recursive Circulants. *Applied Mathematics and Computation*, **339**, 750-757. https://doi.org/10.1016/j.amc.2018.07.065

[12] Li, H., Li, X. and Sun, Y. (2012) The Generalied 3-Connectivity of Cartesian Product Graphs. *Discrete Mathematics and Theoretical Computer Science*, **14**, 43-54.

[13] Li, S., Li, X. and Zhou, W. (2010) Sharp Bounds for the Generalized Connectivity $\kappa_3(G)$. *Discrete Mathematics*, **310**, 2147-2163. https://doi.org/10.1016/j.disc.2010.04.011

[14] Li, X. and Mao, Y. (2014) The Generalized 3-Connectivity of Lexicographic Product Graphs. *Discrete Mathematics and Theoretical Computer Science*, **16**, 339-354.

[15] Li, X., Mao, Y. and Sun, Y. (2014) On the Generalized (Edge-)Connectivity of Graphs. *Australasian Journal of Combinatorics*, **58**, 304-319.

[16] Li, H., Wu, B., Meng, J. and Ma, Y. (2018) Steiner Tree Packing Number and Tree Connectivity. *Discrete Mathematics*, **341**, 1945-1951. https://doi.org/10.1016/j.disc.2018.03.021

[17] Li, H., Ma, Y., Yang, W. and Wang, Y. (2017) The Generalized 3-Connectivity of Graph Products. *Applied Mathematics and Computation*, **295**, 77-83. https://doi.org/10.1016/j.amc.2016.10.002

[18] Li, X. and Mao, Y. (2016) Generalized Connectivity of Graphs. In: *Springer Briefs in Math*, Springer, New York. https://doi.org/10.1007/978-3-319-33828-6

[19] Dirac, G.A. (1960) In abstrakten graphen vorhandene vollstandige 4-graphen und ihre unterteilungen. *Mathematische Nachrichten*, **22**, 61-85. https://doi.org/10.1002/mana.19600220107

[20] Lin, S. and Zhang, Q. (2017) The Generalized 4-Connectivity of Hypercubes. *Discrete Applied Mathematics*, **220**, 60-67. https://doi.org/10.1016/j.dam.2016.12.003