Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, 2020, 9(3), 277-284
Published Online March 2020 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2020.93033

Exact Solutions of the General Variable Coefficient Kdv-Burgers Equation

Ping Zhang[1], Feng Luo[2], Yuhuai Sun[3]

[1]The Engineering & Technical College of Chengdu University of Technology, Leshan Sichuan
[2]Leshan Vocational & Technical College, Leshan Sichuan
[3]Sichuan Normal University, Chengdu Sichuan
Email: zhangping5633@sina.com

Received: Feb. 21st, 2020; accepted: Mar. 4th, 2020; published: Mar. 11th, 2020

Abstract

In this paper, taking the generalized variable coefficient Kdv-Burgers equation as an example, the specific process of solving the exact solution of nonlinear partial differential equation by the expansion method of three auxiliary differential equations is introduced, and some three soliton solutions of the equation are obtained. These new soliton solutions include: hyperbolic function form solution, trigonometric function form solution, mixed action solution of hyperbolic function and exponential function, mixed action solution of trigonometric function and hyperbolic function, mixed action solution of trigonometric function and rational function, etc. Because of the arbitrariness of coefficients, the three auxiliary equations expansion method can construct more exact solutions of partial differential equations with variable coefficients.

Keywords

Expansion Method of Three Auxiliary Differential Equations, Generalized Variable Coefficient Kdv-Burgers Equation, Homogeneous Equilibrium Method, Exact Solution

广义变系数Kdv-Burgers方程的精确解

张　萍[1]，罗　缝[2]，孙峪怀[3]

[1]成都理工大学工程技术学院，四川 乐山
[2]乐山职业技术学院，四川 乐山
[3]四川师范大学，四川 成都
Email: zhangping5633@sina.com

收稿日期：2020年2月21日；录用日期：2020年3月4日；发布日期：2020年3月11日

文章引用: 张萍, 罗缝, 孙峪怀. 广义变系数 Kdv-Burgers 方程的精确解[J]. 应用数学进展, 2020, 9(3): 277-284.
DOI: 10.12677/aam.2020.93033

摘　要

本文以广义变系数Kdv-Burgers方程为例，介绍了三辅助微分方程展开法求非线性偏微分方程精确解的具体过程，并且由此得到了该方程的一些三孤子解，这些新的孤子解包含了：双曲函数形式解、三角函数形式解、双曲函数与指数函数混合作用解、三角函数与双曲函数混合作用解，三角函数与有理函数混合作用解等等。由于系数的任意性，使得三辅助方程展开法能够构造更多的变系数偏微分方程的精确解。

关键词

三辅助微分方程展开法，广义变系数Kdv-Burgers方程，齐次平衡法，精确解

1. 引言

随着科学技术的飞快发展，非线性偏微分方程的精确解广泛地应用于物理、数学、非线性光学、生物工程、通信、流体力学等领域，如非线性光学中对于光孤子的研究，使得暗孤子和亮孤子在光纤光学中被广泛应用；流体力学中，对于木星的红斑现象的解释等等。

人们在研究液体内含有气泡的流动、弹性管内液体的流动等问题的过程中，常常将这些问题的控制方程归结于变系数 Kdv-Burgers 方程[1] [2]，形如：

$$u_t + auu_x + bu_{xx} + u_{xxx} = 0 \tag{1}$$

其中 $ab \neq 0$，a 表示耗散项系数，b 表示色散项系数。如果考虑更多的实际物理条件时，耗散项和色散项都与时间有关。本文主要研究系数与时间有关的广义变系数 Kdv-Burgers 方程[3] [4] [5]：

$$u_t + \alpha(t)uu_x + \beta(t)u_{xx} + \gamma(t)u_{xxx} = 0 \tag{2}$$

这里的 $\alpha(t)$，$\beta(t)$，$\gamma(t)$ 为关于 t 的函数，其中 $\alpha(t)$ 表示耗散项系数，$\beta(t)$ 表示色散项系数，$\gamma(t)$ 表示对流项系数。

徐[6]使用新的三辅助微分方程展开法得到了变系数(2 + 1)维 Nizhnik-Novikov-Vesselov 方程的一些新的三孤子解，本文将以广义变系数 Kdv-Burgers 方程为例，来介绍新的三辅助微分方程展开法求非线性偏微分方程精确解的过程，从而获得它的一些新的精确解。

2. 三辅助方程展开法

步骤 1： 下列非线性偏微分方程

$$H\left(u, u_t, u_x, u_{xt}, u_{tt}, u_{xx}, \cdots\right) = 0 \tag{3}$$

假设方程(3)有如下形式的解：

$$u(x,t) = a_0(x,t) + \sum_{k=1}^{n} \sum_{i+j+l=k} a_{ijl}(x,t)\phi^i(\xi)\left(\frac{G'(\theta)}{G(\theta)}\right)^j\left(\frac{F'(\eta)}{F(\eta)}\right)^l \tag{4}$$

其中$a_0(x,t), a_{ijl}(x,t)$是关于t的待定函数，通过齐次平衡法[7]平衡方程(3)可以确定正整数n的取值。

步骤 2： 辅助微分方程中的$\phi(\xi)$、$G(\theta)$和$F(\eta)$则满足下列三个常微分辅助方程：

$$\phi'(\xi) = A + B\phi(\xi) + C\phi^2(\xi) \tag{5}$$

$$G''(\theta) + \lambda G'(\theta) + \mu G(\theta) = 0 \tag{6}$$

$$F(\eta)F''(\eta) = QF^2(\eta) + RF(\eta)F'(\eta) + P(F'(\eta))^2 \tag{7}$$

其中A,B,P,Q,R,λ,μ为任意常数，$C \neq 0, \xi = k_1 x + \lambda_1(t), \theta = k_2 x + \lambda_2(t), \eta = k_3 x + \lambda_3(t)$，$k_1,k_2,k_3$为待定系数，$\lambda_1(t),\lambda_2(t),\lambda_3(t)$为关于$t$的待定函数。

步骤 3： 借助方程(5)、(6)和(7)，将方程(4)代入到(3)中，此时，通过计算便可以得到一个关于$\phi^i(\xi)\left(\frac{G'(\theta)}{G(\theta)}\right)^j\left(\frac{F'(\eta)}{F(\eta)}\right)^l (i,j,l=0,1,2,\cdots)$的多项式，令这个多项式的每一项幂系数为零，得到一个关于k_1，k_2，k_3，$\lambda_1(t)$，$\lambda_2(t)$，$\lambda_3(t)$，$a_0(x,t)$和$a_{ijl}(x,t)(i,j,l=0,1,2,\cdots)$的线性方程组，借助计算机软件 Maple 求解线性方程组，可以得到k_1，k_2，k_3，$\lambda_1(t)$，$\lambda_2(t)$，$\lambda_3(t)$，$a_0(x,t)$，$a_{ijl}(x,t)(i,j,l=0,1,2,\cdots)$的取值。

步骤 4： 将所求得的k_1，k_2，k_3，$\lambda_1(t)$，$\lambda_2(t)$，$\lambda_3(t)$，$a_0(x,t)$，$a_{ijl}(x,t)(i,j,l=0,1,2,\cdots)$的值和方程(5)、(6)、(7)的解代入到(4)中，从而得到方程(3)的解。

方程(5)、(6)、(7)的解，见表 1~3。

Table 1. The solutions of Equation (5) with $\Delta = B^2 - 4AC$

表 1. 方程(5)的解，其中$\Delta = B^2 - 4AC$

序号.	$\phi(\xi)$	条件
1	$-\frac{B+\sqrt{\Delta}}{2C}\tanh\left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2}\xi\right)$	$\Delta > 0$
2	$-\frac{B+\sqrt{\Delta}}{2C}\coth\left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2}\xi\right)$	$\Delta > 0$
3	$-\frac{B-\sqrt{-\Delta}}{2C}\tan\left(\frac{\sqrt{-\Delta}}{2}\xi\right)$	$\Delta < 0$
4	$-\frac{B-\sqrt{-\Delta}}{2C}\cot\left(\frac{\sqrt{-\Delta}}{2}\xi\right)$	$\Delta < 0$
5	$-\frac{1}{C\xi + H_1}$	$A = B = 0, C \neq 0$

Table 2. The $\frac{G'(\theta)}{G(\theta)}$-solutions of Equation (6) with $\Delta_1 = \lambda^2 - 4\mu$

表 2. 方程(6)的形如$\frac{G'(\theta)}{G(\theta)}$解，其中$\Delta_1 = \lambda^2 - 4\mu$

序号.	$\frac{G'(\theta)}{G(\theta)}$	条件
1	$-\frac{\lambda}{2} + \frac{\sqrt{\Delta_1}}{2}\frac{c_1\sinh\left(\frac{\sqrt{\Delta_1}}{2}\theta\right) + c_2\cosh\left(\frac{\sqrt{\Delta_1}}{2}\theta\right)}{c_2\sinh\left(\frac{\sqrt{\Delta_1}}{2}\theta\right) + c_1\cosh\left(\frac{\sqrt{\Delta_1}}{2}\theta\right)}$	$\Delta_1 > 0$

Continued

2	$-\frac{\lambda}{2}+\frac{\sqrt{-\Delta_1}}{2}\frac{-c_1\sin\left(\frac{\sqrt{-\Delta_1}}{2}\theta\right)+c_2\cos\left(\frac{\sqrt{-\Delta_1}}{2}\theta\right)}{c_2\sin\left(\frac{\sqrt{-\Delta_1}}{2}\theta\right)+c_1\cos\left(\frac{\sqrt{-\Delta_1}}{2}\theta\right)}$	$\Delta_1<0$
3	$-\frac{\lambda}{2}+\frac{c_2}{c_1+c_2\theta}$	$\Delta_1=0$

Table 3. The $\frac{F'(\eta)}{F(\eta)}$-solutions of Equation (7) with $\Delta_2=Q(P-1)$ and $\Delta_3=R^2+4Q-4PQ$

表 3. 方程(7)的形如 $\frac{F'(\eta)}{F(\eta)}$ 解，其中 $\Delta_2=Q(P-1),\Delta_3=R^2+4Q-4PQ$

序号.	$\frac{F'(\eta)}{F(\eta)}$	条件
1	$\frac{R}{2(1-P)}+\frac{R\sqrt{\Delta_3}}{2(1-P)}\frac{c_3\exp\left(\frac{\sqrt{\Delta_3}}{2}\eta\right)+c_4\exp\left(-\frac{\sqrt{\Delta_3}}{2}\eta\right)}{c_3\exp\left(\frac{\sqrt{\Delta_3}}{2}\eta\right)-c_4\exp\left(-\frac{\sqrt{\Delta_3}}{2}\eta\right)}$	$R\neq0,\Delta_3\geq0$
2	$\frac{R}{2(1-P)}+\frac{R\sqrt{-\Delta_3}}{2(1-P)}\frac{ic_3\cos\left(\frac{\sqrt{-\Delta_3}}{2}\eta\right)-c_4\sin\left(-\frac{\sqrt{-\Delta_3}}{2}\eta\right)}{ic_3\sin\left(\frac{\sqrt{-\Delta_3}}{2}\eta\right)+c_4\cos\left(-\frac{\sqrt{-\Delta_3}}{2}\eta\right)}$	$R\neq0,\Delta_3<0$
3	$\frac{\sqrt{\Delta_2}}{1-P}\frac{c_3\cos\left(\sqrt{\Delta_2}\eta\right)+c_4\sin\left(\sqrt{\Delta_2}\eta\right)}{c_3\sin\left(\sqrt{\Delta_2}\eta\right)-c_4\cos\left(\sqrt{\Delta_2}\eta\right)}$	$R=0,\Delta_2\geq0$
4	$\frac{\sqrt{-\Delta_2}}{1-P}\frac{ic_3\cosh\left(\sqrt{-\Delta_2}\eta\right)-c_4\sinh\left(\sqrt{-\Delta_2}\eta\right)}{ic_3\sinh\left(\sqrt{-\Delta_2}\eta\right)-c_4\cosh\left(\sqrt{-\Delta_2}\eta\right)}$	$R=0,\Delta_2<0$

3. 广义变系数 Kdv-Burgers 方程的解

下面用此方法来求解广义变系数 Kdv-Burgers 方程的三孤子解，通过齐次平衡法[7]平衡方程(2)中的 uu_x 和 u_{xxx}，有 $n=2$，为了简化计算，假设方程(2)有如下形式的解：

$$u(x,t)=a_0(t)+a_1(t)\phi(\xi)+a_2(t)\frac{G'(\theta)}{G(\theta)}+a_3(t)\frac{F'(\eta)}{F(\eta)} \tag{8}$$

借助辅助微分方程(5)、(6)和(7)，将方程(8)代入到方程(2)中，此时，通过计算可得到一组关于 $\phi^i(\xi)\left(\frac{G'(\theta)}{G(\theta)}\right)^j\left(\frac{F'(\eta)}{F(\eta)}\right)^j(i,j,l=0,1,2,3)$ 的多项式，令每一项幂系数为零，得到一个关于 $a_0(t),a_1(t),a_2(t),a_3(t),\lambda_1(t),\lambda_2(t),\lambda_3(t),k_1,k_2$ 和 k_3 的线性方程组，借助 Maple 求解此方程组，可得到：

$$k_1=k_1,k_2=k_2,k_3=k_3$$

$$\alpha(t)=\alpha(t),\beta(t)=\beta(t),\gamma(t)=\gamma(t)$$

$$a_0(t)=a_0(t),a_1(t)=-\frac{a_3(t)k_3Q}{k_1A},a_2(t)=\frac{a_3(t)k_3}{k_2},a_3(t)=a_3(t) \tag{9}$$

$$\lambda_1(t)=C_1,\lambda_2(t)=C_2,\lambda_3(t)=C_3$$

将式(9)代入到式(8)中，从而得到广义变系数 Kdv-Burgers 方程的如下形式的解：

情形 1： 当 $\Delta>0$ 且 $\Delta_1>0$ 时，方程(2)有如下形式的解：

(1.1)当 $R\neq 0,\Delta_3\geq 0$ 时：

$$\begin{aligned}u_{1.1}(x,t)=&a_0(t)-\frac{a_3(t)k_3Q}{k_1A}\left(\frac{B+\sqrt{\Delta}}{2C}\tanh\left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2}\xi\right)\right)\\&+\frac{a_3(t)k_3}{k_2}\left(-\frac{\lambda}{2}+\frac{\sqrt{\Delta_1}}{2}\frac{c_1\sinh\left(\frac{\sqrt{\Delta_1}}{2}\theta\right)+c_2\cosh\left(\frac{\sqrt{\Delta_1}}{2}\theta\right)}{c_2\sinh\left(\frac{\sqrt{\Delta_1}}{2}\theta\right)+c_1\cosh\left(\frac{\sqrt{\Delta_1}}{2}\theta\right)}\right)\\&+a_3(t)\left(\frac{R}{2(1-P)}+\frac{R\sqrt{\Delta_3}}{2(1-P)}\frac{c_3\exp\left(\frac{\sqrt{\Delta_3}}{2}\eta\right)+c_4\exp\left(-\frac{\sqrt{\Delta_3}}{2}\eta\right)}{c_3\exp\left(\frac{\sqrt{\Delta_3}}{2}\eta\right)-c_4\exp\left(-\frac{\sqrt{\Delta_3}}{2}\eta\right)}\right)\end{aligned}\tag{10}$$

此时 $u_{1.1}(x,t)$ 为变系数 Kdv-Burgers 方程的双曲函数与指数函数混合形式解。

注： 当 c_1,c_2 为非零常数且满足如下关系时，可得到 $u_{1.1}(x,t)$ 有如下形式的解：

(1.1.1)当 $c_2^2>c_1^2$， $\cosh(\beta)=\frac{c_2}{\sqrt{c_2^2-c_1^2}}$， $\sinh(\beta)=\frac{c_1}{\sqrt{c_2^2-c_1^2}}$ 时：

$$\begin{aligned}u_{1.1.1}(x,t)=&a_0(t)-\frac{a_3(t)k_3Q}{k_1A}\left(\frac{B+\sqrt{\Delta}}{2C}\tanh\left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2}\xi\right)\right)\\&+\frac{a_3(t)k_3}{k_2}\left(-\frac{\lambda}{2}+\frac{\sqrt{\Delta_1}}{2}\coth\left(\frac{\sqrt{\Delta_1}}{2}\theta+\beta\right)\right)\\&+a_3(t)\left(\frac{R}{2(1-P)}+\frac{R\sqrt{\Delta_3}}{2(1-P)}\frac{c_3\exp\left(\frac{\sqrt{\Delta_3}}{2}\eta\right)+c_4\exp\left(-\frac{\sqrt{\Delta_3}}{2}\eta\right)}{c_3\exp\left(\frac{\sqrt{\Delta_3}}{2}\eta\right)-c_4\exp\left(-\frac{\sqrt{\Delta_3}}{2}\eta\right)}\right)\end{aligned}\tag{11}$$

(1.1.2)当 $c_2^2<c_1^2$， $\cosh(\beta)=\frac{c_1}{\sqrt{c_1^2-c_2^2}}$， $\sinh(\beta)=\frac{c_2}{\sqrt{c_1^2-c_2^2}}$ 时：

$$\begin{aligned}u_{1.1.2}(x,t)=&a_0(t)-\frac{a_3(t)k_3Q}{k_1A}\left(\frac{B+\sqrt{\Delta}}{2C}\tanh\left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2}\xi\right)\right)\\&+\frac{a_3(t)k_3}{k_2}\left(-\frac{\lambda}{2}+\frac{\sqrt{\Delta_1}}{2}\tanh\left(\frac{\sqrt{\Delta_1}}{2}\theta+\beta\right)\right)\\&+a_3(t)\left(\frac{R}{2(1-P)}+\frac{R\sqrt{\Delta_3}}{2(1-P)}\frac{c_3\exp\left(\frac{\sqrt{\Delta_3}}{2}\eta\right)+c_4\exp\left(-\frac{\sqrt{\Delta_3}}{2}\eta\right)}{c_3\exp\left(\frac{\sqrt{\Delta_3}}{2}\eta\right)-c_4\exp\left(-\frac{\sqrt{\Delta_3}}{2}\eta\right)}\right)\end{aligned}\tag{12}$$

(1.1.3)当 $c_2=0$， $c_1\neq 0$， $\lambda>0$， $\mu=0$ 时：

$$
\begin{aligned}
u_{1.1.3}(x,t)=&a_0(t)-\frac{a_3(t)k_3Q}{k_1A}\left(\frac{B+\sqrt{\Delta}}{2C}\tanh\left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2}\xi\right)\right)+\frac{a_3(t)k_3}{k_2}\left(-\frac{\lambda}{2}+\frac{\lambda}{2}\tanh\left(\frac{\lambda}{2}\theta\right)\right)\\
&+a_3(t)\left(\frac{R}{2(1-P)}+\frac{R\sqrt{\Delta_3}}{2(1-P)}\frac{c_3\exp\left(\frac{\sqrt{\Delta_3}}{2}\eta\right)+c_4\exp\left(-\frac{\sqrt{\Delta_3}}{2}\eta\right)}{c_3\exp\left(\frac{\sqrt{\Delta_3}}{2}\eta\right)-c_4\exp\left(-\frac{\sqrt{\Delta_3}}{2}\eta\right)}\right)
\end{aligned}
\tag{13}
$$

(1.1.4)当 $c_1=0$， $c_2\neq 0$， $\lambda>0$， $\mu=0$ 时：

$$
\begin{aligned}
u_{1.1.4}(x,t)=&a_0(t)-\frac{a_3(t)k_3Q}{k_1A}\left(\frac{B+\sqrt{\Delta}}{2C}\tanh\left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2}\xi\right)\right)\\
&+\frac{a_3(t)k_3}{k_2}\left(-\frac{\lambda}{2}+\frac{\lambda}{2}\coth\left(\frac{\lambda}{2}\theta\right)\right)\\
&+a_3(t)\left(\frac{R}{2(1-P)}+\frac{R\sqrt{\Delta_3}}{2(1-P)}\frac{c_3\exp\left(\frac{\sqrt{\Delta_3}}{2}\eta\right)+c_4\exp\left(-\frac{\sqrt{\Delta_3}}{2}\eta\right)}{c_3\exp\left(\frac{\sqrt{\Delta_3}}{2}\eta\right)-c_4\exp\left(-\frac{\sqrt{\Delta_3}}{2}\eta\right)}\right)
\end{aligned}
\tag{14}
$$

(1.2)当 $R\neq 0,\Delta_3<0$ 时：

$$
\begin{aligned}
u_{1.2}(x,t)=&a_0(t)-\frac{a_3(t)k_3Q}{k_1A}\left(\frac{B+\sqrt{\Delta}}{2C}\tanh\left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2}\xi\right)\right)\\
&+\frac{a_3(t)k_3}{k_2}\left(-\frac{\lambda}{2}+\frac{\sqrt{\Delta_1}}{2}\frac{c_1\sinh\left(\frac{\sqrt{\Delta_1}}{2}\theta\right)+c_2\cosh\left(\frac{\sqrt{\Delta_1}}{2}\theta\right)}{c_2\sinh\left(\frac{\sqrt{\Delta_1}}{2}\theta\right)+c_1\cosh\left(\frac{\sqrt{\Delta_1}}{2}\theta\right)}\right)\\
&+a_3(t)\left(\frac{R}{2(1-P)}+\frac{R\sqrt{-\Delta_3}}{2(1-P)}\frac{ic_3\cos\left(\frac{\sqrt{-\Delta_3}}{2}\eta\right)-c_4\sin\left(-\frac{\sqrt{-\Delta_3}}{2}\eta\right)}{ic_3\sin\left(\frac{\sqrt{-\Delta_3}}{2}\eta\right)+c_4\cos\left(-\frac{\sqrt{-\Delta_3}}{2}\eta\right)}\right)
\end{aligned}
\tag{15}
$$

(1.3)当 $R=0,\Delta_2\geq 0$ 时：

$$
\begin{aligned}
u_{1.3}(x,t)=&a_0(t)-\frac{a_3(t)k_3Q}{k_1A}\left(\frac{B+\sqrt{\Delta}}{2C}\tanh\left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2}\xi\right)\right)\\
&+\frac{a_3(t)k_3}{k_2}\left(-\frac{\lambda}{2}+\frac{\sqrt{\Delta_1}}{2}\frac{c_1\sinh\left(\frac{\sqrt{\Delta_1}}{2}\theta\right)+c_2\cosh\left(\frac{\sqrt{\Delta_1}}{2}\theta\right)}{c_2\sinh\left(\frac{\sqrt{\Delta_1}}{2}\theta\right)+c_1\cosh\left(\frac{\sqrt{\Delta_1}}{2}\theta\right)}\right)\\
&+a_3(t)\left(\frac{\sqrt{\Delta_2}}{1-P}\frac{c_3\cos\left(\sqrt{\Delta_2}\eta\right)+c_4\sin\left(\sqrt{\Delta_2}\eta\right)}{c_3\sin\left(\sqrt{\Delta_2}\eta\right)-c_4\cos\left(\sqrt{\Delta_2}\eta\right)}\right)
\end{aligned}
\tag{16}
$$

(1.4)当 $R=0,\Delta_2<0$ 时：

$$u_{1.4}(x,t)=a_0(t)-\frac{a_3(t)k_3Q}{k_1A}\left(\frac{B+\sqrt{\Delta}}{2C}\tanh\left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2}\xi\right)\right)+\frac{a_3(t)k_3}{k_2}\left(-\frac{\lambda}{2}+\frac{\sqrt{\Delta_1}}{2}\frac{c_1\sinh\left(\frac{\sqrt{\Delta_1}}{2}\theta\right)+c_2\cosh\left(\frac{\sqrt{\Delta_1}}{2}\theta\right)}{c_2\sinh\left(\frac{\sqrt{\Delta_1}}{2}\theta\right)+c_1\cosh\left(\frac{\sqrt{\Delta_1}}{2}\theta\right)}\right)+a_3(t)\left(\frac{\sqrt{-\Delta_2}}{1-P}\frac{ic_3\cosh\left(\sqrt{-\Delta_2}\eta\right)-c_4\sinh\left(\sqrt{-\Delta_2}\eta\right)}{ic_3\sinh\left(\sqrt{-\Delta_2}\eta\right)-c_4\cosh\left(\sqrt{-\Delta_2}\eta\right)}\right) \tag{17}$$

情形 2： 当 $\Delta<0$ 且 $R=0,\Delta_2\geq 0$ 时，方程(2)有如下形式的解：

(2.1)当 $\Delta_1<0$ 时：

$$u_{2.1}(x,t)=a_0(t)-\frac{a_3(t)k_3Q}{k_1A}\left(\frac{B-\sqrt{-\Delta}}{2C}\cot\left(\frac{\sqrt{-\Delta}}{2}\xi\right)\right)+\frac{a_3(t)k_3}{k_2}\left(-\frac{\lambda}{2}+\frac{\sqrt{-\Delta_1}}{2}\frac{-c_1\sin\left(\frac{\sqrt{-\Delta_1}}{2}\theta\right)+c_2\cos\left(\frac{\sqrt{-\Delta_1}}{2}\theta\right)}{c_2\sin\left(\frac{\sqrt{-\Delta_1}}{2}\theta\right)+c_1\cos\left(\frac{\sqrt{-\Delta_1}}{2}\theta\right)}\right)+a_3(t)\left(\frac{\sqrt{\Delta_2}}{1-P}\frac{c_3\cos\left(\sqrt{\Delta_2}\eta\right)+c_4\sin\left(\sqrt{\Delta_2}\eta\right)}{c_3\sin\left(\sqrt{\Delta_2}\eta\right)-c_4\cos\left(\sqrt{\Delta_2}\eta\right)}\right) \tag{18}$$

(2.2)当 $\Delta_1>0$ 时：

$$u_{2.2}(x,t)=a_0(t)-\frac{a_3(t)k_3Q}{k_1A}\left(\frac{B-\sqrt{-\Delta}}{2C}\cot\left(\frac{\sqrt{-\Delta}}{2}\xi\right)\right)+\frac{a_3(t)k_3}{k_2}\left(-\frac{\lambda}{2}+\frac{\sqrt{\Delta_1}}{2}\frac{c_1\sinh\left(\frac{\sqrt{\Delta_1}}{2}\theta\right)+c_2\cosh\left(\frac{\sqrt{\Delta_1}}{2}\theta\right)}{c_2\sinh\left(\frac{\sqrt{\Delta_1}}{2}\theta\right)+c_1\cosh\left(\frac{\sqrt{\Delta_1}}{2}\theta\right)}\right)+a_3(t)\left(\frac{\sqrt{\Delta_2}}{1-P}\frac{c_3\cos\left(\sqrt{\Delta_2}\eta\right)+c_4\sin\left(\sqrt{\Delta_2}\eta\right)}{c_3\sin\left(\sqrt{\Delta_2}\eta\right)-c_4\cos\left(\sqrt{\Delta_2}\eta\right)}\right) \tag{19}$$

(2.3)当 $\Delta_1=0$ 时：

$$u_{2.3}(x,t)=a_0(t)-\frac{a_3(t)k_3Q}{k_1A}\left(\frac{B-\sqrt{-\Delta}}{2C}\cot\left(\frac{\sqrt{-\Delta}}{2}\xi\right)\right)+\frac{a_3(t)k_3}{k_2}\left(-\frac{\lambda}{2}+\frac{c_2}{c_1+c_2\theta}\right)+a_3(t)\left(\frac{\sqrt{\Delta_2}}{1-P}\frac{c_3\cos\left(\sqrt{\Delta_2}\eta\right)+c_4\sin\left(\sqrt{\Delta_2}\eta\right)}{c_3\sin\left(\sqrt{\Delta_2}\eta\right)-c_4\cos\left(\sqrt{\Delta_2}\eta\right)}\right) \tag{20}$$

由表 1~3 还可以得到更多广义变系数 Kdv-Burgers 方程的精确解，这里就不再一一列出。

其中 $\xi = k_1x + C_1$， $\theta = k_2x + C_2$， $\eta = k_3x + C_3$， C_1， C_2， C_3 为任意常数。

4. 结论

本文以广义变系数 Kdv-Burgers 方程为例，介绍了三辅助方程展开法求解非线性偏微分方程的过程，并且得到了该方程的一些新的三孤子解。这些新解不仅比以前所得的解更加丰富，而且含有更多的函数类型，使得这些孤子新解在物理中有更重要的实际意义。在这些新解中，由于系数的任意性，使得三辅助方程展开法能够构造更多的变系数微分方程的精确解。

参考文献

[1] 王岗伟, 张颖元. 变系数 Kdv-Burgers 方程的精确解[J]. 聊城大学学报, 2011, 24(2): 9-12.

[2] 王燕, 孙福伟. 变系数 Kdv-Burgers 方程的精确解及其 Bäcklund 变换[J]. 北方工业大学学报, 2009, 21(3):45-50.

[3] 刘式达, 刘式适. 湍流的 Kdv-Burgers 模型[J]. 中国科学(A 辑), 1991(9): 938-946.

[4] 史秀珍, 斯仁道尔吉. 变系数 Burgers 方程与 Kdv-Burgers 方程的试探函数解[J]. 内蒙古大学学报(自然科学版), 2012, 43(1): 23-26.

[5] Lü, H.L., Ming, Q.H. and Yu, J.Q. (2013) Exact Solutions of the Generalized Kdv-Burgers Equation. *Journal of Qufu Normal University*, **39**, 33-37.

[6] 徐兰兰, 陈怀堂. 变系数(2 + 1)维 Nizhnik-Novikov-Vesselov 方程的三孤子解[J]. 物理学报, 2013(9): 27-32.

[7] 张国栋, 秦清锋. 齐次平衡法在微分方程中的应用[J]. 中国新技术新产品, 2010(21): 243-244.