Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, **2020, 9(3), 359-365**
Published Online March 2020 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2020.93043

Hans汉斯

Pulse Vaccination Control of an SIR Epidemic Model with Distributed Delays

Dan Zhang, Yurong Zhang, Biyun Xu, Zhichun Yang

Mathematical Science, Chongqing Normal University, Chongqing
Email: yangzhch@126.com

Received: Feb. 29th, 2020; accepted: Mar. 13th, 2020; published: Mar. 20th, 2020

Abstract

This paper investigates a class of an SIR epidemic model with pulse vaccination and distributed delays. By using the impulsive comparison theory and analysis technique, we obtain the sufficient conditions on existence and global asymptotic stability of disease-free periodic solution. Furthermore, the permanence of the model is also studied.

Keywords

Epidemic Model, Pulse Vaccination, Distributed Delays, Periodic Solution, Permanence

具分布时滞的SIR传染病模型的脉冲免疫控制

张　丹，张玉蓉，许碧云，杨志春

重庆师范大学数学科学学院，重庆
Email: yangzhch@126.com

收稿日期：2020年2月29日；录用日期：2020年3月13日；发布日期：2020年3月20日

摘　要

论文主要研究一类具有脉冲免疫控制和有界分布时滞的SIR传染病模型的动力学行为。首先，利用脉冲型比较原理和分析技巧，获得系统的灭绝性，即无病周期解的存在性及其全局稳定性，然后，利用线性分布时滞微分方程性质，获得系统持久性的充分条件。

关键词

传染病模型，脉冲免疫，分布时滞，周期解，持续性

文章引用: 张丹, 张玉蓉, 许碧云, 杨志春. 具分布时滞的 SIR 传染病模型的脉冲免疫控制[J]. 应用数学进展, 2020, 9(3): 359-365. DOI: 10.12677/aam.2020.93043

1. 引言

传染病动力学主要通过建立相应的数学模型，研究传染病的传播规律进而开展传染病的预防和控制，特别是对于像麻疹、乙肝、结核等传染病来说，采用脉冲免疫接种是一种非常有效的控制策略。Auger 等人[1]首先提出脉冲免疫接种的控制措施，随后被应用到不同类型的传染病模型中，并获得了不少有意义的成果。文[2]研究一类 SIR 传染病模型的脉冲免疫控制，分析了系统的周期解及稳定性，并发现混沌复杂行为；文[3]研究了脉冲免疫接种 SIRS 模型的一致持续生存和周期解，并得到正周期解存在的分支参数。文[4]研究了一类具有 $\beta I(1+vI)S$ 传染率的脉冲免疫接种 SIRS 模型，得到了无病周期解的全局稳定性和系统一致持续生存性。文[5]研究了饱和发生率的 SIRS 脉冲模型，并与不带有接种的模型进行比较，得到选择适当的接种周期才会对疾病的消除有显著作用。文[6]建立并分析一类具有饱和接触率、隔离项和脉冲预防接种的 SIQRS 传染病模型，给出无病周期解全局渐近稳定的阈值条件。文[7]研究脉冲预防接种的 SEIR 传染病模型，给出无病周期解的稳定性。近年来，考虑到传染病的潜伏期和治疗的滞后因素，脉冲接种传染病模型的时滞效应已引起不少学者关注。文[8]建立了脉冲接种下的双时滞的 SIRS 模型并给出系统稳定性与持久性，文[9]给出一类时滞的脉冲接种 SEIRS 传染病模型的阈值动力学行为，文[10]建立平行感染期的时滞传染病模型的脉冲免疫控制策略。但是，这些脉冲接种传染病模型对分布时滞情形结果较少，而模型的分布时滞效应研究是有现实意义的[11] [12]。

本文考虑一类新的具有脉冲免疫接种和分布时滞的 SIR 传染病模型：

$$\begin{cases} S'(t)=\mu-\beta\int_0^{\tau} f(u)S(t-u)I(t-u)\mathrm{d}u-\mu S(t), t\neq nT \\ I'(t)=\beta\int_0^{\tau} f(u)S(t-u)I(t-u)\mathrm{d}u-\mu I(t)-\gamma I(t), t\neq nT \\ R'(t)=\gamma I(t)-\mu R(t), t\neq nT \\ S(t^+)=(1-p)S(t), t=nT \\ I(t^+)=I(t), t=nT \\ R(t^+)=R(t)+pR(t), t=nT \end{cases} \tag{1}$$

其中 $S(t)$，$I(t)$，$R(t)$ 为易感者、感染者和移出者的比例，μ 是种群出生率和死亡率，γ 是染病者进入移出者的速率，$\beta\int_0^{\tau} f(u)S(t-u)I(t-u)\mathrm{d}u$ 是分布时滞传染率，τ 是传染病潜伏期，$f(t)$ 是非负核函数且满足 $\int_0^{\tau} f(u)\mathrm{d}u=1$，$\int_0^{\tau} uf(u)\mathrm{d}u<+\infty$，$T$ 是脉冲免疫接种周期，p 是脉冲接种比率。

本文主要利用脉冲型比较原理和分析技巧，并借助线性分布时滞微分方程的渐近性质，获得系统的灭绝性，即无病周期解的存在性及其全局稳定性，并获得系统持久性的充分条件。

2. 基本准备

我们记 $N(t)=S(t)+I(t)+R(t)$。容易得到，$N'(t)=\mu-\mu N(t)$，即 $\lim_{t\to\infty} N(t)=1$。我们不妨设 $S(t)+I(t)+R(t)=1$，为此我们考虑系统解的不变集为：

$$\Omega=\left\{(S,I,R)\in R^3 \middle| 0\le S,I,R\le 1, \text{且} S+I+R=1\right\}.$$

将 $R(t)=1-\left(S(t)+I(t)\right)$ 代入系统(1)，我们主要研究下列二维时滞系统：

$$\begin{cases} S'(t)=\mu-\beta\int_0^\tau f(u)S(t-u)I(t-u)\mathrm{d}u-\mu S(t),t\neq nT \\ I'(t)=\beta\int_0^\tau f(u)S(t-u)I(t-u)\mathrm{d}u-\mu I(t)-\gamma I(t),t\neq nT \\ S(t^+)=(1-p)S(t),t=nT \\ I(t^+)=I(t),t=nT \end{cases} \tag{2}$$

设系统初始函数为：$\left(\phi_1(\theta),\phi_2(\theta)\right)\in C_+=C\left([-T,0],R_+^2\right),\phi_i(\theta)>0(i=1,2)$。不失生物意义，我们只考虑系统(2)的解所在区域：$D=\left\{(S,I)\middle|S,I\geq 0,S+I\leq 1\right\}$。

根据线性脉冲微分方程的解的表示，我们不难得到：

引理 1：设线性脉冲系统：$\begin{cases} x'(t)=a-bx(t),t\neq nT \\ x(t^+)=(1-p)x(t),t=nT \end{cases}$ 其中 $a>0,b>0,0<p<1$，则系统存在全局渐近稳定的 T 周期正解：

$$x^*(t)=\frac{a}{b}\left[1-\frac{p\mathrm{e}^{-b(t-nT)}}{1-(1-p)\mathrm{e}^{-bT}}\right],nT<t\leq(n+1)T.$$

类似于文[11]定理 3 的证明，我们有

引理 2：设具有分布时滞的线性微分方程

$$x'(t)=a\int_0^\tau f(s)x(t-s)\mathrm{d}s-bx(t),$$

如果 $0<a<b$，则 $x(t)=0$ 是全局渐近稳定的。

3. 系统的灭绝性和持久性

为了考虑系统(2)中感染种群的灭绝性，我们让 $I(t)=0$，有

$$\begin{cases} S'(t)=\mu-\mu S(t),t\neq nT, \\ S(t^+)=(1-p)S(t),t=nT. \end{cases}$$

根据引理 1 可知，系统无病周期解为

$$S^*(t)=1-\frac{p\mathrm{e}^{-\mu(t-nT)}}{1-(1-p)\mathrm{e}^{-\mu T}},t\in\left(nT,(n+1)T\right]. \tag{3}$$

我们首先得到无病周期解的全局吸引性。

定理 1：如果

$$R_1:=\frac{\beta\left(1-\mathrm{e}^{-\mu T}\right)}{\left[1-(1-p)\mathrm{e}^{-\mu T}\right][\gamma+\mu]}<1,$$

那么系统(2)的无病周期解 $\left(S^*(t),0\right)$ 是全局吸引的。

证明：由系统(2)的第一个方程得

$$\begin{cases} S'(t)\leq\mu-\mu S(t),t\neq nT \\ S(t^+)=(1-p)S(t),t=nT \end{cases}$$

设辅助微分方程为

$$\begin{cases} S_1'(t) = \mu - \mu S_1(t), t \neq nT \\ S_1(t^+) = (1-p)S_1(t), t = nT \end{cases} \tag{4}$$

由脉冲微分方程的比较定理，可知 $S(t) \le S_1(t)$，其中 $S_1(t)$ 为满足方程(4)具初值 $S_1(0^+) = S(0^+)$ 的解。利用引理 1，有则当 $t \to \infty$ 时，$S_1(t) \to S^*(t)$，这里 $S^*(t)$ 为(4)的全局吸引的正周期解。注意到

$$S^*(t) \le \frac{1-\mathrm{e}^{-\mu T}}{1-(1-p)\mathrm{e}^{-\mu T}} := \sigma,$$

那么对 $\forall \varepsilon_1 > 0, \exists T_1 > 0$，使得当 $t > T_1$ 时，有 $S(t) \le \sigma + \varepsilon_1$。又由系统(2)的第二个方程得

$$I'(t) \le \beta(\sigma + \varepsilon_1)\int_0^\tau f(u)I(t-u)\mathrm{d}u - \mu I(t) - \gamma I(t).$$

令

$$I_1'(t) = \beta(\sigma + \varepsilon_1)\int_0^\tau f(u)I_1(t-u)\mathrm{d}u - \mu I_1(t) - \gamma I_1(t).$$

利用脉冲型比较定理有 $I(t) \le I_1(t)$，其中初值 $I_1(s) = I(s) = \phi_2(s), s \in [-\tau, 0]$。由 $R_1 < 1$ 和 ε_1 任意小，不难看出 $\beta(\sigma + \varepsilon_1) < \gamma + \mu$。根据引理 2，有 $\lim\limits_{t\to\infty} I_1(t) = 0$ 成立。再由 $I(t)$ 非负性知 $I(t) \to 0, t \to \infty$。从而对 $\forall \varepsilon > 0$，存在 $T_2 > 0$，使得 $t > T_2$ 时，有 $I(t) < \varepsilon$。注意到

$$\int_0^\tau f(u)\mathrm{d}u = 1,\ \ S^*(t) = 1 - \frac{p\mathrm{e}^{-\mu(t-nT)}}{1-(1-p)\mathrm{e}^{-\mu T}} \le \frac{1-\mathrm{e}^{-\mu T}}{1-(1-p)\mathrm{e}^{-\mu T}} := \theta > 0.$$

利用系统(2)的第一个方程可知，当 $t > T_2$ 时

$$\begin{cases} S'(t) \ge \mu(1-\varepsilon) + \beta\theta\varepsilon + \mu\rho\varepsilon - \mu S(t), t \neq nT \\ S(t^+) = (1-p)S(t), t = nT \\ S(0^+) = S(0) \end{cases}$$

可得 $S(t) \ge S_2(t)$，其中 $S_2(t)$ 为满足下列方程的周期解

$$\begin{cases} S_2'(t) = \mu(1-\varepsilon) + \beta\theta\varepsilon + \mu\rho\varepsilon - \mu S_2(t), t \neq nT \\ S_2(t^+) = (1-p)S_2(t), t = nT \\ S_2(0^+) = S(0) \end{cases}$$

再次利用引理 1，可知当 $t \to \infty$ 时，我们有

$$S_2(t) \to \tilde{S}(t) = \frac{\mu(1-\varepsilon) + \beta\theta\varepsilon + \mu\rho\varepsilon}{\mu}\left[1 - \frac{p\mathrm{e}^{-\mu(t-kT)}}{1-(1-p)\mathrm{e}^{-\mu T}}\right], nT < t \le (n+1)T.$$

对任意小的 ε_2，当 t 充分大时，我们有

$$S^*(t) + \varepsilon_1 \le S(t) \le \tilde{S}(t) - \varepsilon_2$$

让 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon \to 0, t \to \infty$，可得 $S(t) \to \tilde{S}(t) \to S^*(t)$。从而得无病周期解全局吸引性。证毕。

下面，我们将研究系统(2)的持久性。

定理 2：系统(2)是持久的，如果下面条件成立

$$R_2=\frac{\beta(1-p)\left(1-\mathrm{e}^{-\mu T}\right)}{\left[1-(1-p)\mathrm{e}^{-\mu T}\right][\gamma+\mu]}>1.$$

证明：假设 $X(t)=\left(S(t),I(t)\right)$ 是系统(2)满足初始条件 $X\left(0^+\right)=\left(S\left(0^+\right),I\left(0^+\right)\right)$ 的任意一个正解。我们首先将证明 $S(t)$ 有正的下确界，由系统(2)的第一、三个方程，得

$$\begin{cases}S'(t)\ge\mu-(\beta+\mu)S(t),t\ne nT\\ S\left(t^+\right)=(1-p)S(t),t=nT\end{cases}$$

对 $\forall\varepsilon_0>0,\exists T_0>0$，使得当 $t>T_0$ 时，有 $S(t)\ge S_0^*(t)-\varepsilon$，其中 $S_0^*(t)$ 为下述系统

$$\begin{cases}S_0'(t)=\mu-(\beta+\mu)S_0(t),t\ne nT\\ S_0^+(t)=(1-p)S_0(t),t=nT\end{cases}$$

全局吸引的正周期解。$S_0^*(t)$ 在 $[0,T]$ 上的最小值为

$$S_0^*(0)=\frac{\mu(1-p)\left(1-\mathrm{e}^{-(\beta+\mu)T}\right)}{(\beta+\mu)\left[1-(1-p)\mathrm{e}^{-(\beta+\mu)T}\right]}.$$

从而，当 $t>T_0$ 时，有

$$S(t)\ge S_0^*(0)-\varepsilon_0=\frac{\mu(1-p)\left(1-\mathrm{e}^{-(\beta+\mu)T}\right)}{(\beta+\mu)\left[1-(1-p)\mathrm{e}^{-(\beta+\mu)T}\right]}-\varepsilon_0:=m_s>0.$$

故 $\liminf\limits_{t\to\infty}S(t)\ge m_s$。

下面我们将证明 $I(t)$ 有正的下确界。否则，对于任意充分小的 $\delta>0$，存在 $N>0$，使得 $I(t)$ 满足：(i) $t\ge NT$ 时，使得 $I(t)<\delta$ 成立；(ii) $t\ge NT$ 时，使得 $I(t)$ 关于 δ 振荡。

如果(i)成立，那么

$$\begin{cases}S'(t)\ge\mu-\beta S(t)\delta-\mu S(t),t\ne nT\\ S\left(t^+\right)=(1-p)S(t),t=nT\end{cases}$$

利用比较原理和引理 1

$$\begin{cases}S_3'(t)\ge\mu-\beta S_3(t)\delta-\mu S_3(t),t\ne nT\\ S_3\left(t^+\right)=(1-p)S_3(t),t=nT\end{cases}$$

根据引理 1，得上面系统的全局稳定周期正解 $S_3^*(t)$，它在 $[0,T]$ 上的最小值为

$$S_3^*(0)=\frac{\mu(1-p)\left(1-\mathrm{e}^{-(\beta\delta+\mu)T}\right)}{(\beta\delta+\mu)\left[1-(1-p)\mathrm{e}^{-(\beta\delta+\mu)T}\right]}.$$

从而，对任意给定 $\varepsilon\ll1$，当 $t\ge T_1$ 时(T_1 为充分大的常数)，有

$$S(t)\ge S_3^*(0)-\varepsilon=\frac{\mu(1-p)\left(1-\mathrm{e}^{-(\beta\delta+\mu)T}\right)}{(\beta\delta+\mu)\left[1-(1-p)\mathrm{e}^{-(\beta\delta+\mu)T}\right]}-\varepsilon:=\omega>0.$$

构造函数：

$$W(t)=I(t)+\beta\int_0^{\tau} f(u)\int_{t-u}^{t} S(\theta)I(\theta)\mathrm{d}\theta\mathrm{d}u.$$

根据方程(2)，我们计算$V(t)$导数

$$\begin{aligned}W'(t)&=I'(t)+\beta\int_0^{\tau} f(u)\big(S(t)I(t)-S(t-s)I(t-s)\big)\mathrm{d}u\\&=\beta\int_0^{\tau} f(u)S(t)I(t)\mathrm{d}u-[\gamma+\mu]I(t)\\&=[\gamma+\mu]\left[\frac{\beta S(t)\int_0^{\tau} f(u)\mathrm{d}u}{\gamma+\mu}-1\right]I(t)\\&=[\gamma+\mu]\left[\frac{\beta S(t)}{\gamma+\mu}-1\right]I(t)\end{aligned}\tag{5}$$

将$S(t)\ge\omega$代入得

$$W'(t)\ge[\gamma+\mu]\left[\frac{\beta\omega}{\gamma+\mu}-1\right]I(t).$$

令$m=\min\limits_{t\in[T_1,T_1+\tau]}I(t)>0$，则对于所有$t>T_2$，$I(t)\ge m$成立。否则存在$T_2>0$，使得当$t\in[T_1,T_1+\tau+T_2]$时，有$I(t)\ge I^l m$且$I(T_1+\tau+T_2)=m, I'(T_1+\tau+T_2)\le 0$。由系统(2)有

$$I'(T_1+\tau+T_2)\ge[\gamma+\mu]\left[\frac{\beta\omega}{\gamma+\mu}-1\right]I^l>0$$

矛盾。故对于所有$t>T_2$，有$I(t)\ge I^l>0$。由于$R_2>1$，且ε,δ任意小，我们不妨设$\frac{\beta\omega}{\gamma+\mu}>1$，那么

$$W'(t)\ge[\gamma+\mu]\left[\frac{\beta\omega}{\gamma+\mu}-1\right]I^l>0,$$

从而这与$W(t)$的有界性矛盾。故情况(i)不成立。

若(ii)成立，即$I(t)$在δ_1处震荡，即存在无穷序列$t_1<t_2<\cdots<t_{2k-1}<t_{2k}<t_{2k+1}<\cdots$有：

$$I(t_{2k-1})=I(t_{2k})=\delta, I(t)<\delta+\varepsilon, t\in[t_{2k-1},t_{2k}];\tag{7}$$

$$I(t_{2k})=I(t_{2k+1})=\delta, I(t)\ge\delta, t\in[t_{2k},t_{2k+1}].\tag{8}$$

如果$\sup\limits_k\{t_{2k}-t_{2k}\}=\infty$，即对任意大的$l>0$，存在$k$，使得

$$I(t)<\delta+\varepsilon, t\in[t_{2k-1},t_{2k-1}+l]\subset[t_{2k-1},t_{2k}],$$

利用情形(i)的证明思路，不难得到矛盾。因此，$L:=\sup\limits_k\{t_{2k}-t_{2k+1}\}<\infty$，注意到

$$I'(t)\ge-[\gamma+\mu]I(t), t\ge 0.$$

那么对任意k，有：

$$I(t)\ge I(t_{2k-1})\mathrm{e}^{-[\gamma+\mu](t-t_{2k-1})}\ge\delta\mathrm{e}^{-[\gamma+\mu]L}, t\in[t_{2k-1},t_{2k}].$$

再结合(8)式，我们有$I(t)\ge\delta\mathrm{e}^{-[\gamma+\mu]L}, t\ge t_1$。这与系统解不存在正的下确界矛盾。

注意到上述δ的选取与系统(2)的正解选取无关。故存在充分大的t和δ_0使得$I(t)\ge\delta_0$成立。因此，当$R_2>1$时，系统(2)是持久的。

致　谢

本文受国家自然科学基金面上项目(No.11971081)、重庆市基础与前沿研究计划一般项目(No.cstc2018jcyjax0144)、重庆市研究生科研创新项目(No.CYS19290)资助。

参考文献

[1] Agur, Z., Cojocaru, L., Mazor, G., Anderson, R.M. and Danon, Y.L. (1993) Pulse Mass Mealses Vaccination across Age Cohorts. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, **90**, 11698-11702. https://doi.org/10.1073/pnas.90.24.11698

[2] Zeng, G., Chen, L. and Sun, L. (2005) Complexity of an SIR Epidemic Dynamical Model with Impulsive Vaccination Control. *Chaos*, *Solitons & Fractals*, **26**, 495-505. https://doi.org/10.1016/j.chaos.2005.01.021

[3] 庞国平, 陈兰荪. 具饱和传染率的脉冲免疫接种 SIRS 模型[J]. 系统科学与数学, 2007, 27(4): 563-572.

[4] 赵文才, 孟新柱, 张子叶. 一类具有传染率 $\beta I(1+\nu I)S$ 的脉冲免疫接种 SIRS 模型[J]. 数学的实践与认识, 2009, 39(12): 80-85.

[5] 章培军, 李维德, 朱凌峰. SIRS 传染病模型的连续接种与脉冲接种的比较[J]. 兰州大学学报(自然科学版), 2011, 74(1): 82-86.

[6] 赵明, 吕显瑞. 具有饱和接触率的 SIQRS 预防接种模型的控制策略[J]. 吉林大学学报: 理学版, 2016, 54(2): 171-176.

[7] D' Onofrio, A. (2002) Stability Properties of Pulse Vaccination Strategy in SEIR Epidemic Model. *Mathematical Biosciences*, **179**, 57-72. https://doi.org/10.1016/S0025-5564(02)00095-0

[8] 刘伟华, 李冬梅. 脉冲接种下的双时滞的 SIRS 模型的稳定性与持久性[J]. 哈尔滨理工大学学报, 2015(4): 11-15.

[9] Bai, Z. (2015) Threshold Dynamics of a Time-Delayed SEIRS Model with Pulse Vaccination. *Mathematical Biosciences*, **269**, 178-185. https://doi.org/10.1016/j.mbs.2015.09.005

[10] Pei, Y., Li, S. and Gao, S. (2017) Pulse Vaccination of an Epidemic Model with Two Parallel Infectious Stages and Time Delays. *Mathematics and Computers in Simulation*, **142**, 51-61. https://doi.org/10.1016/j.matcom.2017.04.005

[11] Beretta, E. and Takeuchi, Y. (1995) Global Stability of an SIR Epidemic Model with Distributed Time Delay. *Journal of Mathematical Biology*, **33**, 250-260. https://doi.org/10.1007/BF00169563

[12] Beretta, E., Hara, T. and Ma, W. (2001) Global Asymptotic Stability of an SIR Epidemic Model with Distributed Time Delay. *Nonlinear Analysis*: *Theory*, *Methods and Applications*, **47**, 4107-4115. https://doi.org/10.1016/S0362-546X(01)00528-4