

Research on Pricing of Multi-Asset Maturity Wealth Management Products under Time-Varying Volatility

Hongmei Dai, Liangqiong Jin

School of Data Science and Information Engineering, Guizhou Minzu University, Guiyang Guizhou
Email: 18084363623@163.com, jinliangqiong@163.com

Received: Apr. 12th, 2020; accepted: Apr. 30th, 2020; published: May 7th, 2020

Abstract

In this paper, under the time-varying volatility model, Monte Carlo simulation is used to study the pricing of a class of multi-asset financial products. In order to further improve Monte Carlo's simulation accuracy and convergence speed, the corresponding variance reduction scheme was constructed using principal component analysis and applied to the pricing of a wealth management product linked to multiple stocks. The results show that this scheme can not only reduce the complexity of simulation, but also improve the pricing accuracy of financial products.

Keywords

Multi Asset Financial Products, Pricing, Variance Reduction, Principal Component Analysis, Monte Carlo Simulation

时变波动率下多资产到期理财产品定价研究

代洪梅, 金良琼

贵州民族大学, 数据科学与信息工程学院, 贵州 贵阳
Email: 18084363623@163.com, jinliangqiong@163.com

收稿日期: 2020年4月12日; 录用日期: 2020年4月30日; 发布日期: 2020年5月7日

摘要

本文在时变波动率模型下, 利用蒙特卡罗模拟研究了一类多资产到期理财产品的定价问题。为了提高蒙特卡罗的模拟精度和收敛速度, 利用主成分分析法构造了对应的方差缩减方案, 并将该方案应用

于一款挂钩多股票的到期理财产品定价中。结果表明, 该方案既可以减小模拟的复杂程度, 又提高了理财产品的定价精度。

关键词

多资产理财产品, 定价, 方差缩减, 主成分分析, 蒙特卡罗模拟

Copyright © 2020 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

时代发展的同时往往伴随着我国个人财富以及个人理财需求的增长, 这使得各种新型金融理财产品层出不穷。对于金融衍生理财产品每个人的定义都有些许不同, 说通俗些, 理财不过就是用合法手段让自己现有的资产增多。多资产到期理财产品属于金融理财产品中的一种, 且占有一定比重, 深受投资者追捧。究其原因, 必然有其定价的合理性, 故而本文研究多资产到期理财产品定价问题。

随着金融衍生产品的不断创新和发展, 挂钩多资产的理财产品也相继问世, 但目前为止, 对挂钩多资产理财产品的定价研究相对较少。2000年, Li 采用 Cholesky 对一款挂钩多资产的结构性理财产品进行了研究, 模拟其违约事件的联合分布[1]。Satyayitdas 在 2001 年对结构性理财产品挂钩的多种风险资产进行了多方位分析, 总结出结构性理财产品的基本原理、设计因素和定价构成等, 这对金融理财产品相关理论研究有着促进作用[2]。随后 2004 年, Cherubini 采用 Copula 函数法对资产组合的风险进行了度量。随着理财产品的发行数量增多, 逐渐有更多的学者研究产品的收益定价情况, 同时进行相对更全面的分析。2010 年, Wallmeier 和 Diethelm 分析了多款多资产债券, 发现产品属于溢价发行, 得到最终收益会比预期收益低的结论[3]。2011 年, 陈金龙和任敏用蒙特卡罗方法对挂钩多资产的保本型结构性产品进行了定价研究[4]。So MKP, Yeung CYT 在 2014 年构造了混合 Copula 模型对香港蓝筹股的相关性进行了研究, 发现股票收益的相关性与依赖于时间的变化[5]。2016 年, 针对想要购买结构性理财产品中的普通投资者, Entrop O, Mckenzie M, Wilkens M 采用混合 Copula 模型对他们所面临的风险调整绩效进行了计量, 发现普通投资者会承担多种风险[6]。2018 年, 方艳等人首先借助混合 Copula 函数对资产间尾部相依性进行拟合, 然后利用蒙特卡罗模拟方法对多资产挂钩的结构性理财产品进行了定价研究, 并且还对比了不同模型的定价结果, 从而进一步丰富我国的理财产品定价模型[7]。

国内外对挂钩多资产的期刊或理财产品研究日趋成熟, 有的是从理财产品设计及风险方面进行研究, 有的是从定价方面进行研究, 但大多都基于 Cholesky 分解和 Copula 模型进行研究。基于此, 本文将主成分分析法融入蒙特卡罗模拟中, 对挂钩多资产的理财产品进行了定价研究。一般而言, 当普通投资者面对眼花缭乱的理财产品时, 他们很难对理财产品的价值进行合理评估, 常常会对其风险和收益的认知出现稍许偏离。因此, 本文希望能为发行银行在产品定价方面提供思路, 为丰富发行银行的理财产品种类提供参考, 为普通投资者选择适合自己的理财产品进行投资作参考。

2. 主成分方差缩减方案

有的学者选择用增加模拟路径的方法试图提高其模拟精度, 但发现, 这样做大大增加了模拟时间, 且对运行设备要求较高。因此, 接下来将采用控制变量技术来达到减小其波动方差的目的。

控制变量技术是一种最简单、且较有效的方法, 其应用更加广泛[9]。假定在求理财产品收益 $F(S)$ 的期望值 $E[F(S)]$ 时, 得到所挂钩的风险资产随机向量 $V_i = (S_1, S_2, \dots, S_d)^T$ 的同时, 还能获取另一个随机向量 $Y = (Y_1, Y_2, \dots, Y_d)^T$ 的样本 Y_i , 并且 $E[Y]$ 是更加容易计算的, 则可以用随机变量 Y 来构造期望值 $E[F(S)]$ 的控制变量 C , 换句话说, 假定 (V_i, Y_i) 具有如下的协方差矩阵

$$\begin{pmatrix} \Sigma_Y & \Sigma_{YV} \\ \Sigma_{YV}^T & \sigma_V^2 \end{pmatrix}$$

其中 Σ_Y 是非奇异的 $d \times d$ 方阵, Σ_{YV}^T 是 $d \times 1$ 向量, σ_V^2 是变量 V 的方差。

2.1. 单一控制变量

本小节论述单一控制变量的构造方法。对任意常数 $b \in R$ 可以构造 $E[X]$ 的一个估计值

$$\bar{V}_N(b) = \bar{V}_N - b(\bar{C}_{kN} - E[C_k]) \quad (1)$$

其中, b 为待定常数, $E[C_k]$ 可求, C_k 是由任意一个 $Y_k, k=1, 2, \dots, d$ 构造的单一控制变量, 即

$$C_k = g(0, \dots, 0, Y_k, 0, \dots, 0) \quad (2)$$

其中, $k=1, 2, \dots, d$, 显然 $\bar{V}_N(b)$ 是 \bar{V}_n 的无偏估计, 有最优系数

$$b^* = \frac{\text{cov}(C_k, V)}{\text{var}(C_k)} = \frac{\text{cov}(Y_k, V)}{\text{var}(Y_k)} = \frac{\rho_{Y_k V} \sigma_V}{\sigma_{Y_k}} \quad (3)$$

其中, $\text{cov}(C_k, V)$ 和 $\text{var}(C_k)$ 的值一般难以求得, 故需要估计 $(C_i, V_i), i=1, 2, \dots, N$, 然后可以得到 $\text{cov}(C_k, V)$ 和 $\text{var}(C_k)$ 的估计值

$$\text{var}(\bar{V}_n) = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (V_i - \bar{V}_n)^2 \quad (4)$$

$$\text{cov}(C, V) = \sum_{i=1}^n \frac{(Y_i - \bar{Y})(V_i - \bar{V})}{n-1} \quad (5)$$

$$b_n^* = \frac{\sum_{i=1}^n (Y_i - \bar{Y})(V_i - \bar{V})}{\sum_{i=1}^n (Y_i - \bar{Y})^2} \quad (6)$$

其中, n 是控制变量模拟次数, N 是蒙特卡罗总模拟次数, 一般 $n \ll N$ 。考虑控制变量估计值 $\bar{V}_N(b)$ 的最小方差

$$\text{var}(\bar{V}_N(b^*)) = (1 - R_{C_k V}^2) \text{var}(\bar{V}_N) = (1 - R_{Y_k V}^2) \text{var}(\bar{V}_N) \quad (7)$$

原变量的方差

$$\text{var}(\bar{V}_N) = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (V_i - \bar{V}_N)^2 \quad (8)$$

从而可以获取方差缩减指数

$$\frac{\text{var}(\bar{V}_n)}{\text{var}(\bar{V}_N(b))} = \frac{1}{1 - \rho_{C_k V}^2} = \frac{1}{1 - \rho_{Y_k V}^2} \quad (9)$$

其中, $\rho_{C_k V}$ 是相关系数, 可以看出, 方差缩减指数的大小依赖于控制向量 C_k 和原始变量 V 之间的相关系数。同时, 方差缩减指数越大, 意味着方差缩减效果越好。

2.2. 复合控制变量

控制变量不但可以由一个随机变量 Y_k 构造, 还可由多个随机变量共同构造, 即

$$C^k = (Y_1, Y_2, \dots, Y_k)^T, k \leq d \quad (10)$$

相同地, 对任意固定的向量 $b \in R^d$ 构造 $E[X]$ 的估计值

$$\bar{V}_N^k(b) = \bar{V}_N - b^T (\bar{C}_N^k - E[C^k]) \quad (11)$$

其中, b 为待定常向量, $E[C^k]$ 可求, 同单一控制变量一元, 可以得到最优系数

$$b_k^* = \Sigma_{C^k}^{-1} \Sigma_{C^k V} \quad (12)$$

这里, $\Sigma_{C^k V}$ 为 d 维向量, 第 j 个元素为

$$\frac{1}{N-1} \left[\sum_{i=1}^N C_i^{k(j)} V_i - n \bar{C}^k \bar{V} \right]$$

$\Sigma_{C^k}^{-1}$ 为 $d \times d$ 矩阵, 第 jk 个元素为

$$\frac{1}{N-1} \left[\sum_{i=1}^N C_i^{k(j)} C_i^{k(k)} - n \bar{C}^{k(j)} \bar{C}^{k(k)} \right]$$

仍从方差缩小的角度考虑蒙特卡罗模拟效果, 计算 $\bar{X}_N^k(b)$ 的最小方差

$$\text{var}(\bar{V}_N^k(b_k^*)) = \sigma_V^2 - \Sigma_{CV}^T \Sigma_Y^{-1} \Sigma_{CV} = \text{var}(\bar{V}_N) (1 - R_{C^k V}^2) \quad (13)$$

其中

$$R_{C^k V}^2 = \Sigma_{C^k V}^T \Sigma_Y^{-1} \Sigma_{C^k V} / \text{var}(\bar{V}_N) \quad (14)$$

容易获取方差缩减指数为

$$\frac{\text{var}(\bar{V}_N)}{\text{var}(\bar{V}_N^k(b_k^*))} = \frac{1}{1 - R_{C^k V}^2} \quad (15)$$

可以看出, 方差缩减指数对控制向量 C_k 和原始变量 X 之间的平方复相关系数 $R_{C^k V}^2$ 高度敏感。

特别地, 当复合控制变量 C^k 的各个分量 Y_1, Y_2, \dots, Y_k 独立时, 此时协方差矩阵 Σ_V 恰好为对角矩阵, 此时平方复相关系数简化为

$$R_{C^k V}^2 = \rho_{Y_1 V}^2 + \rho_{Y_2 V}^2 + \dots + \rho_{Y_k V}^2, k = 1, 2, \dots, d \quad (16)$$

其中 $\rho_{Y_i V}$ 是变量 Y_i 与 V 的相关系数。

因此, 在理财产品定价中, 若想达到更加良好的缩减方差效果, 需要选取多个与之相关性更高的变量来控制模拟方差, 又因为控制变量之间不相关时方差控制效果更加良好, 所以本文利用主成分分析方法提取控制变量, 进行蒙特卡罗模拟。

2.3. 主成分控制变量

本节利用主成分方法构造控制变量。对风险资产向量

$$V = (S_1, S_2, \dots, S_d)^T$$

假设其协方差矩阵为 Σ_V , 显然 Σ_V 是一个半正定对称矩阵, 从而存在谱分解

$$\Sigma_V = U \Lambda U^T$$

其中

$$\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$$

是特征值 λ_i 组成的对角矩阵, 且 $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n \geq 0$ 。此外, $U = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ 是一个正交矩阵, u_i 是特征向量。于是, 风险资产向量 V 的主成分变换为

$$Y = U^T V \quad (17)$$

多资产理财产品收益函数 $F(S)$ 各有不同, 一般可以由理财产品说明书得到, 当风险资产 V 进行主成分变换后, 理财产品收益 $F(S)$ 变为 $g(Y)$, 则理财产品定价等价于

$$E[F(S)] = E[g(Y)] = E[g(Y_1, Y_2, \dots, Y_n)] \quad (18)$$

显然, 式(17)定义的主成分 Y 具有零均值。 Y 的第 i 个分量 $Y_i = u_i^T V$ 称为第 i 个主成分。

进一步, 对于挂钩多资产的理财产品进行定价, 本文利用主成分方法构造了两种方差缩小方案:

方案一: 将第 k 个主成分 Y_k 构造为第 k 个单一控制变量

$$C_k = (0, \dots, 0, Y_k, 0, \dots, 0), \quad k = 1, 2, \dots, d \quad (19)$$

方案二: 将前 k 个主成分 Y_1, Y_2, \dots, Y_k 共同构造复合控制变量

$$C^k = (Y_1, Y_2, \dots, Y_k), \quad k = 1, 2, \dots, d \quad (20)$$

主成分分析具体处理步骤如下:

- 1) 提取主成分
- 2) 获取风险资产向量 V 的协方差矩阵 Σ_V
- 3) 计算特征值与特征向量

根据特征方程 $|\Sigma_V - \Lambda I| = 0$, 其中 I 是单位矩阵, 可得到其特征值组成的对角矩阵 Λ 与特征向量正交矩阵 $U = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ 。

- 4) 写出主成分表达式

根据特征值, 特征向量, 可写出主成分表达式。

3. 多资产区间理财产品定价

3.1. 相关假设

对多资产区间理财产品进行定价研究之前, 需要先做如下假设:

假设 1 市场是完全的, 所有资产是完全可以无限细分, 且没有卖空限制。

假设 2 在衍生证券生命期内, 无风险利率采用连续复利的方式计算考虑我国区间理财产品大多期限较短的实际情况, 因此假定利率为固定利率。

假设 3 市场是无套利的[8]。

假设 4 股票价格均遵循时变 Black-Scholes 模型, 即

$$dS_t = \mu_t S_t dt + \sigma_t S_t dW_t$$

其中 W_t 表示标准布朗运动, 波动率 σ_t 和股票期望收益率 μ_t 都是时间的函数。假定 $\hat{\sigma}_t$ 为波动率 σ_t 的矩估计, 则波动率 σ_t 的二阶原点矩为

$$\hat{\sigma}_t = \frac{\hat{s}}{\sqrt{\Delta_t}}$$

这里 \hat{s} 是风险资产价格的对数差分序列 u_i 的标准差, 换句话说

$$\hat{s} = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (u_i - \bar{u})^2}$$

$$u_i = \ln \left(\frac{S_i}{S_{i-1}} \right)$$

其中, $i = 1, 2, \dots, T$ [10]。

3.2. 理财产品定价

在风险中性世界中, 风险资产的状态变量 $V = (S_{1,T}, S_{2,T}, \dots, S_{d,T})^T$ 在到期日具有相关性的基础随机过程如下

$$\begin{cases} dS_{1,T} = rS_{1,T}dt + \sigma_1 S_{1,T}dW_1 \\ dS_{2,T} = rS_{2,T}dt + \sigma_2 S_{2,T}dW_2 \\ \vdots \\ dS_{i,T} = rS_{i,T}dt + \sigma_i S_{i,T}dW_i \end{cases} \quad (21)$$

其中, $i = 1, 2, \dots, d$, r 为无风险利率, W_i 为标准布朗运动。资产两两之间的相关系数为 ρ_{ij} , 即 $dW_i \cdot dW_j = \rho_{ij}dt$, $j = 1, 2, \dots, d$, 协方差矩阵为 Σ_V

$$\Sigma_V = \text{diag}(\sigma) U \text{diag}(\sigma), \quad \sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_i)^T \quad (22)$$

根据前述条件及伊藤引理, 式(21)可以转换成以下形式

$$\begin{cases} S_{1,T} = S_{1,0} \exp \left[\left(r - \frac{\sigma_1^2}{2} \right) T + \sigma_1 \varepsilon_1 \sqrt{T} \right] \\ S_{2,T} = S_{2,0} \exp \left[\left(r - \frac{\sigma_2^2}{2} \right) T + \sigma_2 \varepsilon_2 \sqrt{T} \right] \\ \vdots \\ S_{i,T} = S_{i,0} \exp \left[\left(r - \frac{\sigma_i^2}{2} \right) T + \sigma_i \varepsilon_i \sqrt{T} \right] \end{cases} \quad (23)$$

其中, $\{\varepsilon_i, i = 1, 2, \dots, d\}$ 是相互独立的标准正态随机变量。

下一步, 进行主成分转换, 可以通过几何布朗运动过程的协方差矩阵分解成特征值和特征向量

$$\Sigma_V = U \Lambda U^T \quad (24)$$

其中, 特征值矩阵

$$\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$$

特征向量矩阵

$$U = (u_1, u_2, \dots, u_n)$$

则风险资产向量 X 的主成分变换为

$$Y = U^T V$$

由式(23)和式(25)可知

$$\sigma_i = u_{i1}\sqrt{\lambda_1} + u_{i2}\sqrt{\lambda_2} + \cdots + u_{ii}\sqrt{\lambda_i}$$

那么, Y_1, Y_2, \dots, Y_n 线性无关, 则式(23)可变换为

$$\begin{cases} Y_{1,T} = Y_{1,0} \exp \left[\left(r - \frac{\sigma_1^2}{2} \right) \cdot T + \left(u_{11}\varepsilon_1\sqrt{\lambda_1 T} + u_{21}\varepsilon_2\sqrt{\lambda_2 T} + \cdots + u_{i1}\varepsilon_i\sqrt{\lambda_i T} \right) \right] \\ Y_{2,T} = Y_{2,0} \exp \left[\left(r - \frac{\sigma_2^2}{2} \right) \cdot T + \left(u_{12}\varepsilon_1\sqrt{\lambda_1 T} + u_{22}\varepsilon_2\sqrt{\lambda_2 T} + \cdots + u_{i2}\varepsilon_i\sqrt{\lambda_i T} \right) \right] \\ \vdots \\ Y_{i,T} = Y_{i,0} \left[\left(r - \frac{\sigma_i^2}{2} \right) \cdot T + \left(u_{i1}\varepsilon_1\sqrt{\lambda_1 T} + u_{2i}\varepsilon_2\sqrt{\lambda_2 T} + \cdots + u_{ii}\varepsilon_i\sqrt{\lambda_i T} \right) \right] \end{cases} \quad (25)$$

其中, $i=1,2,\dots,d$, 分别代表第 i 个成分。

3.3. 主成分蒙特卡罗模拟算法

基于以上分析, 主成分蒙特卡罗模拟算法设计步骤如下:

步骤 1: 进行主成分转换

① 首先, 在 **R** 软件中, 将五支股票的收盘价数据进行 **KMO** 检验, 看数据是否适合进行主成分分析, 若适合则进行下一步。

② 根据特征值及碎石图判断需要提前的主成分个数。

③ 计算特征值对应的特征向量矩阵。

④ 得到风险资产的主成分表达式。

步骤 2: 计算收益

首先, 生成独立的标准正态随机变量 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_i (i=1,2,\dots,d)$, d 是风险资产个数, 根据式(4.23)算出每个风险资产到期时的价格, $S_{1T}, S_{2T}, \dots, S_{dT}$, 再根据理财产品收益方式说明, 得到收益函数 $F(S)$, 计算其收益。

步骤 3: 构造控制变量

根据式(25)求得 $Y_{1T}, Y_{2T}, \dots, Y_{dT}$, 再根据公式(2)及公式(10), 可以构造单一控制变量及复合控制变量

$$C_k = g(0, \dots, 0, Y_k, 0, \dots, 0), \quad C^k = g(Y_1, \dots, Y_k, 0, \dots, 0)$$

其中 Y_k 为第 k 个主成分。

步骤 4: 计算最优系数

根据公式(6)计算最优系数 b_n^* ; 公式(12)计算最优系数 b_k^* 。

步骤 5: 计算理财产品价格

首先, 得到传统蒙特卡罗估计价格

$$\bar{V}_N = e^{-rT} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N F(S)^{(i)}$$

其次, 得到主成分控制变量蒙特卡罗估计价格

$$\bar{V}_N(b) = \bar{V}_N - b(\bar{C}_{kN} - E[C_k])$$

$$\bar{V}_N^k(b) = \bar{V}_N - b^T (\bar{C}_N^k - E[C^k])$$

4. 实证分析

为更清晰对比主成分蒙特卡罗的模拟效果, 本节选取的理财产品为中国银行发行的中银进取系列某款理财产品, 该理财产品业务自 2010 年以来均有发行, 其挂钩的是五只港股股票, 该理财产品信息如表 1 所示:

Table 1. Financial product manual
表 1. 理财产品说明书

产品名称	中银进取系列		
产品类型	保本浮动收益型		
投资及理财收益币种	人民币		
观察期	一年		
挂钩指标	名称	定盘价格	
	中国神华(1088.HK)		
	建设银行(0939.HK)		
	中国铁建(1186.HK)	以香港股票交易所公布的该股票收市价为准, 括号中为该支股票在香港股票交易所的代码	
	华能国际(0902.HK)		
大唐发电(0991.HK)			
起点认购金额	5 万元		
收益计算方式	产品到期时, 分别计算五支股票的股价表现绝对值, 将计算出来的五个绝对值中最小的绝对值乘以参与率, 具体计算公式, 即客户的最后理财收益率具体计算公式如下: 到期产品理财收益率(港币) = 50% * min 期末股价/期初股价-1		

4.1. 提取主成分

考察表 1 中所述五支股票的主成分。将五支股票收盘价的一年期历史数据进行 KMO 检验, KMO 值为 0.73, 大于 0.7, 表明数据可以进行主成分分析。为了进一步提取主成分的个数, 首先, 获得其特征值和碎石图如图 1 所示:

$$\lambda_1 = 2.4530, \lambda_2 = 1.1208, \lambda_3 = 0.6002, \lambda_4 = 0.4253, \lambda_5 = 0.4007$$

第一个特征值和第二个特征值均大于 1, 结合碎石图综合来看, 可以提取前两个成分作为主成分。接下来, 计算特征值对应的特征向量组成的矩阵

$$U = \begin{pmatrix} -0.4812 & 0.3289 \\ -0.5146 & 0.2127 \\ -0.4011 & 0.4458 \\ -0.3582 & -0.6700 \\ -0.4631 & -0.4461 \end{pmatrix} = (u_1, u_2)$$

从而可以得到主成分表达式

$$Y_{1T} = Y_{1t} \exp \left[\left(r - \frac{\sigma_1^2}{2} \right) \cdot T + \left(u_{11}\varepsilon_1\sqrt{\lambda_1 T} + u_{21}\varepsilon_2\sqrt{\lambda_2 T} + \dots + u_{i1}\varepsilon_i\sqrt{\lambda_i T} \right) \right]$$

$$Y_{2T} = Y_{2t} \exp \left[\left(r - \frac{\sigma_2^2}{2} \right) \cdot T + \left(u_{12}\varepsilon_1\sqrt{\lambda_1 T} + u_{22}\varepsilon_2\sqrt{\lambda_2 T} + \dots + u_{i2}\varepsilon_i\sqrt{\lambda_i T} \right) \right]$$

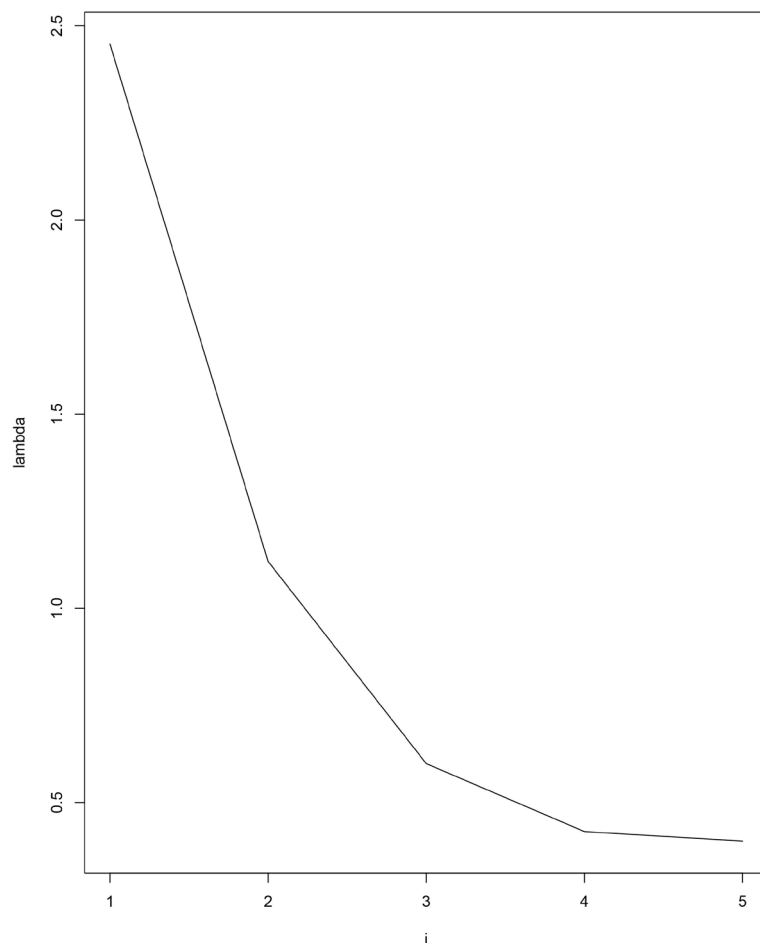


Figure 1. Stock data gravel chart
图 1. 股票数据碎石图

由以上分析, 本节构造三个独立的控制变量

$$C_1 = (Y_1), \quad C_2 = (Y_2), \quad C^3 = (Y_1, Y_2)$$

4.2. 蒙特卡罗模拟算法

本节进行控制变量情形下的理财产品价值的蒙特卡罗模拟。依据主成分蒙特卡罗模拟算法的步骤 2, 获取风险资产向量

$$V = (S_{1T}^i, S_{2T}^i, S_{3T}^i, S_{4T}^i, S_{5T}^i)^T$$

其中 $i=1, 2, \dots, N$, N 表示蒙特卡罗模拟的总次数。

再根据理财产品收益方式说明, 得到该理财产品收益函数如下:

$$F(S) = \begin{cases} F & S_{i,T} = S_{i,0} \\ F \left[1 + 50\% \times \min \left| \frac{S_{i,T}}{S_{i,0}} - 1 \right| \right] & S_{i,T} \neq S_{i,0} \end{cases} \quad (27)$$

其中, $i=1, 2, \dots, d$, $S_{i,T}$ 为理财产品挂钩的第 i 个风险资产期末价格, $S_{i,0}$ 为期初价格。构造相应的控制变量

$$C_1^i = Y_1, \quad C_2^i = Y_2, \quad C^{3,i} = (Y_1, Y_2)$$

根据主成分蒙特卡罗模拟算法步骤 4 计算最优系数 b_1, b_2, b_{12} , 再依照步骤 5 即可得到传统蒙特卡罗估计价格

$$\bar{V}_N = e^{-rT} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N F(S)^{(i)}$$

以及主成分控制变量蒙特卡罗估计价格

$$\bar{V}_{N,1} = \bar{V}_N - b_1 (\bar{C}_{1N} - E[C_1])$$

$$\bar{V}_{N,2} = \bar{V}_N - b_2 (\bar{C}_{2N} - E[C_2])$$

$$\bar{V}_{N,3} = \bar{V}_N - b_{12} (\bar{C}_{1N} - E[C_1], \bar{C}_{2N} - E[C_2])$$

依据上述三个公式, 表 2 展示了 10,000 次模拟总次数下的理财产品价格。

Table 2. Standard mc and control variable mc simulated price comparison

表 2. 标准 mc 与控制变量 mc 模拟价格对比

	\bar{V}_n	$\bar{V}_{N,1}$	$\bar{V}_{N,2}$	$\bar{V}_{N,3}$
价格	48,524.25	47,681.88	47,457.38	47,699.30
方差	12,4881.7	78,737.35	88,824.79	42,680.49

由表 2 不难看出, 复合控制变量蒙特卡罗模拟价格的方差为 42680.49, 是最小的, 其次是由第一主成分构造的单一控制变量蒙特卡罗, 其模拟价格的方差为 78737.35, 均比传统蒙特卡罗模拟价格的方差小很多。

Table 3. Simulate 10,000 times of mc variance reduction index

表 3. 模拟一万次的 mc 方差缩减指数

类型	方差缩减指数
$\bar{V}_{N,1}$	1.558294
$\bar{V}_{N,2}$	1.380146
$\bar{V}_{N,3}$	3.527895

再计算方差缩减指数, 其结果见表 3, 可看出方差缩减指数均大于 1, 即说明控制变量蒙特卡罗模拟可以缩减方差以达到提高精度的目的, 方差指数越大, 说明其方差缩减效果越好。

在单一控制变量中, 用第一主成分构造的控制变量方差缩减指数大于第二主成分构造的控制变量的方差缩减指数, 即 $1.558294 > 1.380146$, 第一主成分往往能更好解释原变量的大部分信息, 与原变量相关性更高, 效果更好。

同时, 也可看出, 由第一主成分和第二主成分共同构造的控制变量指数最大, 为 3.527895, 约为单一控制变量的一倍, 不难看出其方差缩减效果比单一控制变量的效果好一倍之多。故用复合控制蒙特卡罗模拟一万次的估计价格来讨论该理财产品的定价合理性, 其理论价格为

$$\bar{V}_{N,3} = 47699.30$$

溢价率

$$\left(\frac{F - \bar{V}_{N,3}}{F} \right) \times 100\% = 4.6\%$$

该理财产品属于溢价发行, 溢价率为 4.6%, 定价偏高, 意味着投资者若购买此款产品, 则到期时获得的收益会略低于预期收益。

5. 总结

本文研究了多资产区间理财产品的定价问题, 由于挂钩多资产理财产品的设计更加复杂, 从而选择蒙特卡罗模拟进行计算。为了提高模拟精度的同时又释放其挂钩风险资产间的相关性, 将主成分方差控制技术融入蒙特卡罗模拟中。结果表明, 用主成分蒙特卡罗模拟可以更好地缩减方差, 获取更高精度的定价结果, 该方法可以应用到其他类型的多资产理财产品定价中。

基金项目

贵州省科学技术基金项目(No.黔科合J字[2015]2076), 贵州省教育厅青年科技人才成长项目(No.黔教KY字[2016]168)。

参考文献

- [1] Li, D.X. (2000) On Default Correlation: A Copula Function Approach. *Journal of Fixed Income*, **9**, 43-54. <https://doi.org/10.3905/jfi.2000.319253>
- [2] Das, S. and Wiley, J. (2001) Structured Products and Hybrid Securities. *Computer Software*.
- [3] Wallmeier, M. and Diethelm, M. (2010) Market Pricing of Exotic Structured Products: The Case of Multiasset Barrier Reverse Convertibles in Switzerland. *Journal of Derivatives*, **27**, 45-62.
- [4] 陈金龙, 任敏. 多资产的股票挂钩保本型理财产品定价研究[J]. 管理科学学报, 2011, 14(11): 63-70.
- [5] So, M.K.P. and Yeung, C.Y.T. (2014) Vinecopula GARCH Model with Dynamic Conditionnal Dependence. *Computational Statistics and Data Analysis*, **76**. <https://doi.org/10.1016/j.csda.2013.08.008>
- [6] Entrop, O., Mckenzie, M., Wilkens, M., et al. (2016) The Performance of Individual Investors in Structured Financial Products. *Review of Quantitative Finance and Accounting*, **46**, 569-604. <https://doi.org/10.1007/s11156-014-0479-8>
- [7] 方艳, 张元玺, 刘津智, 张洁. 多资产挂钩的区间理财产品定价研究[J]. 复旦学报(自然科学版), 2018, 57(5): 554-579.
- [8] 姜礼尚. 期权定价的数学模型和方法[M]. 第二版. 北京: 高等教育出版, 2008.
- [9] 陈辉. 期权定价的蒙特卡罗模拟方差缩减技术研究[J]. 统计与信息论坛, 2008(7): 86-96.
- [10] 张波, 余超, 毕涛. 高频金融数据建模:理论方法与应用[M]. 北京: 清华大学出版社, 2015.