Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, **2020, 9(5), 742-751**
Published Online May 2020 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2020.95088

Hans汉斯

New Criteria for $\mathcal{H}$-Tensors and Its Application

Dongjian Bai*, **Yumei Xu, Nian Wu**

College of Data Science and Information Engineering, Guizhou Minzu University, Guiyang Guizhou
Email: *wangf5123@126.com

Received: May 1st, 2020; accepted: May 14th, 2020; published: May 21st, 2020

Abstract

$\mathcal{H}$-tensors have wide applications in science and engineering, but it is difficult to determine whether a given tensor is an $\mathcal{H}$-tensor or not in practice. In this paper, we give some practical conditions for $\mathcal{H}$-tensors by constructing different positive diagonal matrices and applying some techniques of inequalities. As an application, some sufficient conditions of the positive definiteness for an even-order real symmetric tensor are given. Advantages of results obtained are illustrated by numerical examples.

Keywords

$\mathcal{H}$-Tensors, Real Symmetric Tensors, Irreducible, Nonzero Elements Chain, Positive Definiteness

$\mathcal{H}$-张量的新判定及其应用

柏冬健*，**徐玉梅，吴　念**

贵州民族大学数据科学与信息工程学院，贵州　贵阳
Email: *wangf5123@126.com

收稿日期：2020年5月1日；录用日期：2020年5月14日；发布日期：2020年5月21日

摘　要

$\mathcal{H}$-张量在科学和工程实际中具有重要应用，但在实际中要判定$\mathcal{H}$-张量是比较困难的。通过构造不同的正对角阵，结合不等式的放缩技巧，给出了一些比较实用的新判别条件。作为应用，给出了判定偶数阶实对称张量正定性的条件，相应数值算例说明了新结果的有效性。

*通讯作者。

文章引用: 柏冬健, 徐玉梅, 吴念. $\mathcal{H}$-张量的新判定及其应用[J]. 应用数学进展, 2020, 9(5): 742-751.
DOI: 10.12677/aam.2020.95088

关键词

$\mathcal{H}$-张量，实对称张量，不可约，非零元素链，正定性

1. 引言

张量是矩阵的高阶推广，广泛出现在图像处理、自动控制、医疗成像、超图论、高阶统计、弹性材料研究和数据分析等学科和工程中。近年来，很多专家和学者都对其进行了广泛探讨[1]-[17]。本文在文[13]的基础上，继续讨论$\mathcal{H}$-张量的判定问题，得到了一些新的判定条件。同时，利用新得到的$\mathcal{H}$-张量的判定条件，给出了偶数阶实对称张量，即偶次齐次多项式正定性的判定方法。最后，给出了一些数值算例来说明新结果的有效性。

2. 预备知识

记$\mathbb{C}(\mathbb{R})$为复(实)数域，$[n]:=\{1,2,\cdots,n\}$。一个复(实)m阶n维张量$\mathcal{A}=(a_{i_1i_2\cdots i_m})$由$n^m$个复(实)元素构成[1] [2] [3] [4] [5]，其中

$$a_{i_1i_2\cdots i_m}\in\mathbb{C}(\mathbb{R}),\ i_j\in[n],\ j\in[m].$$

显然，2阶张量即为矩阵。此外，张量$\mathcal{A}=(a_{i_1i_2\cdots i_m})$被称为对称的[6] [7]，若

$$a_{i_1i_2\cdots i_m}=a_{\pi(i_1i_2\cdots i_m)},\ \forall\pi\in\Pi_m,$$

其中Π_m为m个指标的置换群。若$a_{i_1i_2\cdots i_m}\geq 0$，那么称张量$\mathcal{A}=(a_{i_1i_2\cdots i_m})$为非负张量。

定义2.1 [8]：张量$\mathcal{I}=(\delta_{i_1i_2\cdots i_m})$被称作单位张量，其中

$$\delta_{i_1i_2\cdots i_m}=\begin{cases}1, & i_1=i_2=\cdots=i_m\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

定义2.2 [6]：给定一个m阶n维张量$\mathcal{A}=(a_{i_1i_2\cdots i_m})$，若存在一个复数$\lambda$和一个非零复向量$x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}\in\mathbb{C}^n$，满足

$$\mathcal{A}x^{m-1}=\lambda x^{[m-1]},$$

那么称λ为张量$\mathcal{A}$的特征值，x为张量$\mathcal{A}$的关于特征值λ的特征向量，其中$\mathcal{A}x^{m-1}$和$x^{[m-1]}$的第i个分量分别为

$$\left(\mathcal{A}x^{m-1}\right)_i=\sum_{i_2,\cdots,i_m\in[n]}a_{ii_2\cdots i_m}x_{i_2}\cdots x_{i_m},\ \left(x^{[m-1]}\right)_i=x_i^{m-1}.$$

记m阶n次齐次多项式$f(x)$为

$$f(x)=\sum_{i_1,\cdots,i_m\in[n]}a_{i_1i_2\cdots i_m}x_{i_1}\cdots x_{i_m},\tag{1}$$

其中$x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}\in\mathbb{R}^n$。当$m$为偶数时，$f(x)$是正定的，若

$$f(x) > 0,\ \forall x \in \mathbb{R}^n,\ x \neq 0.$$

式(1)中的齐次多项式 $f(x)$ 可以表示为 m 阶 n 维对称张量 $\mathcal{A}$ 与 x^m 的乘积[9]，如下

$$f(x) = \mathcal{A}x^m = \sum_{i_1,\cdots,i_m \in [n]} a_{i_1 i_2 \cdots i_m} x_{i_1} \cdots x_{i_m}, \tag{2}$$

当 $f(x)$ 是正定时，对称张量 $\mathcal{A}$ 也是正定的。

定义 2.3 [10]：设 $\mathcal{A} = \left(a_{i_1 i_2 \cdots i_m}\right)$ 为 m 阶 n 维张量，如果对任意的 $i \in [n]$，

$$\left|a_{ii\cdots i}\right| \geq \sum_{\substack{i_2,\cdots,i_m \in [n] \\ \delta_{ii_2\cdots i_m}=0}} \left|a_{ii_2\cdots i_m}\right|, \tag{3}$$

则称 $\mathcal{A}$ 是对角占优张量。若对于任意的 $i \in [n]$，

$$\left|a_{ii\cdots i}\right| > \sum_{\substack{i_2,\cdots,i_m \in [n] \\ \delta_{ii_2\cdots i_m}=0}} \left|a_{ii_2\cdots i_m}\right|, \tag{4}$$

则称 $\mathcal{A}$ 是严格对角占优张量。

定义 2.4 [11]：m 阶 n 维张量 $\mathcal{A} = \left(a_{i_1 i_2 \cdots i_m}\right)$ 与矩阵 $X = diag(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 的乘积可表示为：

$$\mathcal{B} = \left(b_{i_1\cdots i_m}\right) = \mathcal{A}X^{m-1},\ b_{i_1 i_2\cdots i_m} = a_{i_1 i_2\cdots i_m} x_{i_2} x_{i_3} \cdots x_{i_m},\ i_j \in [n],\ j \in [m].$$

假设 Λ 表示 $[n]$ 的任意非空子集，令

$$\Lambda^{m-1} := \left\{ i_2 i_3 \cdots i_m : i_j \in \Lambda, j = 2,3,\cdots,m \right\},$$

$$[n] \setminus \Lambda^{m-1} := \left\{ i_2 i_3 \cdots i_m : i_2 i_3 \cdots i_m \in [n]^{m-1} \text{ 且 } i_2 i_3 \cdots i_m \notin \Lambda^{m-1} \right\}.$$

给定一个 m 阶 n 维张量 $\mathcal{A} = \left(a_{i_1 i_2 \cdots i_m}\right)$，令

$$R_i(\mathcal{A}) = \sum_{\substack{i_2,\cdots,i_m \in [n] \\ \delta_{ii_2\cdots i_m}=0}} \left|a_{ii_2\cdots i_m}\right| = \sum_{i_2,\cdots,i_m \in [n]} \left|a_{ii_2\cdots i_m}\right| - \left|a_{ii\cdots i}\right|,$$

$$\Lambda_1 := \left\{ i \in [n] : 0 < \left|a_{ii\cdots i}\right| = R_i(\mathcal{A}) \right\},\ \Lambda_2 = \left\{ i \in [n] : 0 < \left|a_{ii\cdots i}\right| < R_i(\mathcal{A}) \right\},$$

$$\Lambda_3 = \left\{ i \in [n] : \left|a_{ii\cdots i}\right| > R_i(\mathcal{A}) \right\},\ \Lambda_0^{m-1} = \Lambda^{m-1} \setminus \left(\Lambda_2^{m-1} \cup \Lambda_3^{m-1} \right).$$

引理 2.1 [12]：若 $\mathcal{A}$ 为严格对角占优张量，则 $\mathcal{A}$ 为 $\mathcal{H}$-张量。

引理 2.2 [13]：设 $\mathcal{A} = \left(a_{i_1 i_2 \cdots i_m}\right)$ 为 m 阶 n 维张量。若 $\mathcal{A}$ 是不可约的，

$$\left|a_{ii\cdots i}\right| \geq R_i(\mathcal{A}),\ \forall i \in [n],$$

且至少有一个 i 使得严格不等式成立，则 $\mathcal{A}$ 为 $\mathcal{H}$-张量。

引理 2.3 [13]：设 $\mathcal{A} = \left(a_{i_1 i_2 \cdots i_m}\right)$ 为 m 阶 n 维张量。如果存在一个正对角矩阵 X，使得 $\mathcal{A}X^{m-1}$ 是 $\mathcal{H}$-张量，则 $\mathcal{A}$ 为 $\mathcal{H}$-张量。

引理 2.4 [14]：设 $\mathcal{A} = \left(a_{i_1 i_2 \cdots i_m}\right)$ 为 m 阶 n 维张量。若

(i) $\left|a_{ii\cdots i}\right| \geq R_i(\mathcal{A})$， $\forall i \in [n]$，

(ii) $\Lambda_3 = \left\{ i \in [n] : \left|a_{ii\cdots i}\right| > R_i(\mathcal{A}) \right\} \neq \varnothing$，

(iii) $\forall i \notin \Lambda_3$，从 i 到 j 存在一个非零元素链使得 $j \in \Lambda_3$，

则 $\mathcal{A}$ 为 $\mathcal{H}$-张量。

3. 主要结果

为了叙述方便，引入以下符号：对 $\forall i \in \Lambda_2$，记

$$\alpha_i = \sum_{i_2 i_3 \cdots i_m \in \Lambda_0^{m-1}} \left|a_{i i_2 \cdots i_m}\right| + \sum_{\substack{i_2 \cdots i_m \in \Lambda_2^{m-1} \\ \delta_{i i_2 \cdots i_m}=0}} \left|a_{i i_2 \cdots i_m}\right|, \quad \beta_i = \sum_{i_2 i_3 \cdots i_m \in \Lambda_3^{m-1}} \left|a_{i i_2 \cdots i_m}\right|,$$

$$x_i = \begin{cases} \dfrac{\left|a_{ii\cdots i}\right| - \alpha_i}{\beta_i}, & \left|a_{ii\cdots i}\right| > \alpha_i, \\ \dfrac{\left|a_{ii\cdots i}\right| - \beta_i}{\alpha_i}, & \left|a_{ii\cdots i}\right| > \beta_i, \\ \dfrac{\left|a_{ii\cdots i}\right|}{R_i(\mathcal{A})}, & \left|a_{ii\cdots i}\right| \le \min\{\alpha_i, \beta_i\}. \end{cases} \qquad \delta = \max_{i \in \Lambda_2}(x_i)$$

再记

$$r = \max_{i \in \Lambda_3} \left(\frac{\delta \left(\sum_{i_2 i_3 \cdots i_m \in \Lambda_0^{m-1}} \left|a_{i i_2 \cdots i_m}\right| + \sum_{i_2 i_3 \cdots i_m \in \Lambda_2^{m-1}} \left|a_{i i_2 \cdots i_m}\right| \right)}{\left|a_{ii\cdots i}\right| - \sum_{\substack{i_2 \cdots i_m \in \Lambda_3^{m-1} \\ \delta_{i i_2 \cdots i_m}=0}} \left|a_{i i_2 \cdots i_m}\right|} \right),$$

$$P_{i,r}(\mathcal{A}) = \delta \left(\sum_{i_2 \cdots i_m \in \Lambda_0^{m-1}} \left|a_{i i_2 \cdots i_m}\right| + \sum_{i_2 \cdots i_m \in \Lambda_2^{m-1}} \left|a_{i i_2 \cdots i_m}\right| \right) + r \sum_{\substack{i_2 \cdots i_m \in \Lambda_3^{m-1} \\ \delta_{i i_2 \cdots i_m}=0}} \left|a_{i i_2 \cdots i_m}\right| \quad (i \in \Lambda_3),$$

$$h = \max_{i \in \Lambda_3} \left(\frac{\delta \left(\sum_{i_2, i_3, \cdots, i_m \in \Lambda_0^{m-1}} \left|a_{i i_2 \cdots i_m}\right| + \sum_{i_2 i_3 \cdots i_m \in \Lambda_2^{m-1}} \left|a_{i i_2 \cdots i_m}\right| \right)}{P_{i,r}(\mathcal{A}) - \sum_{\substack{i_2 \cdots i_m \in \Lambda_3^{m-1} \\ \delta_{i i_2 \cdots i_m}=0}} \max_{j \in \{i_2, i_3, \cdots, i_m\}} \frac{P_{j,r}(\mathcal{A})}{\left|a_{jj\cdots j}\right|} \left|a_{i i_2 \cdots i_m}\right|} \right).$$

易知 $0 \le r < 1$，且对任意的 $i \in \Lambda_3$，

$$r\left|a_{ii\cdots i}\right| \ge \delta \left(\sum_{i_2 \cdots i_m \in \Lambda_0^{m-1}} \left|a_{i i_2 \cdots i_m}\right| + \sum_{i_2 \cdots i_m \in \Lambda_2^{m-1}} \left|a_{i i_2 \cdots i_m}\right| \right) + r \sum_{\substack{i_2 \cdots i_m \in \Lambda_3^{m-1} \\ \delta_{i i_2 \cdots i_m}=0}} \left|a_{i i_2 \cdots i_m}\right| = P_{i,r}(\mathcal{A}),$$

从而有 $0 \le \dfrac{P_{i,r}(A)}{\left|a_{ii\cdots i}\right|} \le r < 1, \forall i \in \Lambda_3$。注意到

$$\frac{\delta \left(\sum_{i_2 i_3 \cdots i_m \in \Lambda_0^{m-1}} \left|a_{i i_2 \cdots i_m}\right| + \sum_{i_2 i_3 \cdots i_m \in \Lambda_2^{m-1}} \left|a_{i i_2 \cdots i_m}\right| \right)}{P_{i,r}(\mathcal{A}) - \sum_{\substack{i_2 \cdots i_m \in \Lambda_3^{m-1} \\ \delta_{i i_2 \cdots i_m}=0}} \max_{j \in \{i_2, i_3, \cdots, i_m\}} \frac{P_{j,r}(\mathcal{A})}{\left|a_{jj\cdots j}\right|} \left|a_{i i_2 \cdots i_m}\right|} = \frac{P_{i,r}(\mathcal{A}) - r \sum_{\substack{i_2 \cdots i_m \in \Lambda_3^{m-1} \\ \delta_{i i_2 \cdots i_m}=0}} \left|a_{i i_2 \cdots i_m}\right|}{P_{i,r}(\mathcal{A}) - \sum_{\substack{i_2 \cdots i_m \in \Lambda_3^{m-1} \\ \delta_{i i_2 \cdots i_m}=0}} \max_{j \in \{i_2, i_3, \cdots, i_m\}} \frac{P_{j,r}(\mathcal{A})}{\left|a_{jj\cdots j}\right|} \left|a_{i i_2 \cdots i_m}\right|} \le 1.$$

故 $0 \le h \le 1$，进而由 h 的定义可知，对于任意 $i \in \Lambda_3$，有

$$hP_{i,r}(\mathcal{A}) \ge \delta \left(\sum_{i_2 \cdots i_m \in \Lambda_0^{m-1}} \left|a_{i i_2 \cdots i_m}\right| + \sum_{i_2 \cdots i_m \in \Lambda_2^{m-1}} \left|a_{i i_2 \cdots i_m}\right| \right) + \sum_{\substack{i_2 \cdots i_m \in \Lambda_3^{m-1} \\ \delta_{i i_2 \cdots i_m}=0}} \max_{j \in \{i_2, i_3, \cdots, i_m\}} \frac{hP_{j,r}(\mathcal{A})}{\left|a_{jj\cdots j}\right|} \left|a_{i i_2 \cdots i_m}\right|. \tag{5}$$

定理 3.1： 设 $\mathcal{A}=\left(a_{i_1i_2\cdots i_m}\right)$ 为 m 阶 n 维张量。若对任意的 $i\in\Lambda_2$，$\mathcal{A}$ 满足

$$\left|a_{ii\cdots i}\right|x_i>\delta\left(\sum_{i_2\cdots i_m\in\Lambda_0^{m-1}}\left|a_{ii_2\cdots i_m}\right|+\sum_{\substack{i_2\cdots i_m\in\Lambda_2^{m-1}\\ \delta_{ii_2\cdots i_m}=0}}\left|a_{ii_2\cdots i_m}\right|\right)+\sum_{i_2\cdots i_m\in\Lambda_3^{m-1}}\max_{j\in\{i_2,i_3,\cdots,i_m\}}\frac{hP_{j,r}(\mathcal{A})}{\left|a_{jj\cdots j}\right|}\left|a_{ii_2\cdots i_m}\right|, \tag{6}$$

且对 $\forall i\in\Lambda_1$，存在 $i_2i_3\cdots i_m\in\Lambda_3^{m-1}$，使得 $a_{ii_2\cdots i_m}\neq 0$，则 $\mathcal{A}$ 是 $\mathcal{H}$-张量。

证明： 由(6)式知，对对任意的 $i\in\Lambda_2$，

$$\left|a_{ii\cdots i}\right|x_i>\delta\left(\sum_{i_2\cdots i_m\in\Lambda_0^{m-1}}\left|a_{ii_2\cdots i_m}\right|+\sum_{\substack{i_2\cdots i_m\in\Lambda_2^{m-1}\\ \delta_{ii_2\cdots i_m}=0}}\left|a_{ii_2\cdots i_m}\right|\right)+\sum_{i_2\cdots i_m\in\Lambda_3^{m-1}}\max_{j\in\{i_2,i_3,\cdots,i_m\}}\frac{hP_{j,r}(\mathcal{A})}{\left|a_{jj\cdots j}\right|}\left|a_{ii_2\cdots i_m}\right|.$$

令

$$T_i\equiv\frac{\left|a_{ii\cdots i}\right|x_i-\delta\left(\sum_{i_2\cdots i_m\in\Lambda_0^{m-1}}\left|a_{ii_2\cdots i_m}\right|+\sum_{\substack{i_2\cdots i_m\in\Lambda_2^{m-1}\\ \delta_{ii_2\cdots i_m}=0}}\left|a_{ii_2\cdots i_m}\right|\right)-\sum_{i_2\cdots i_m\in\Lambda_3^{m-1}}\max_{j\in\{i_2,i_3,\cdots,i_m\}}\frac{hP_{j,r}(\mathcal{A})}{\left|a_{jj\cdots j}\right|}\left|a_{ii_2\cdots i_m}\right|}{\sum_{i_2\cdots i_m\in\Lambda_3^{m-1}}\left|a_{ii_2\cdots i_m}\right|}. \tag{7}$$

当 $\sum_{i_2\cdots i_m\in\Lambda_3^{m-1}}\left|a_{ii_2\cdots i_m}\right|=0$ 时，记 $T_i=+\infty$。由(7)式知 $T_i>0\left(\forall i\in\Lambda_2\right)$，且

$$0\le\frac{hP_{j,r}(\mathcal{A})}{\left|a_{jj\cdots j}\right|}<1\left(\forall j\in\Lambda_3\right),$$

从而必有充分小的正数 ε，使 $0<\varepsilon<\min_{i\in\Lambda_2}T_i\le+\infty$，且 $\max_{j\in\Lambda_3}\left\{\frac{hP_{j,r}(\mathcal{A})}{\left|a_{jj\cdots j}\right|}+\varepsilon\right\}<1$。

构造正对角矩阵 $D=diag\left(d_1,d_2,\cdots,d_n\right)$，记 $\mathcal{B}=\mathcal{A}X^{m-1}=\left(b_{i_1i_2\cdots i_m}\right)$，其中

$$d_i=\begin{cases}(\delta)^{\frac{1}{m-1}}, & i\in\Lambda_1,\\ (x_i)^{\frac{1}{m-1}}, & i\in\Lambda_2,\\ \left(\frac{hP_{i,r}(A)}{\left|a_{ii\cdots i}\right|}+\varepsilon\right)^{\frac{1}{m-1}}, & i\in\Lambda_3.\end{cases}$$

(a) 对 $\forall i\in\Lambda_1$，存在 $i_2i_3\cdots i_m\in\Lambda_3^{m-1}$，使得 $a_{ii_2\cdots i_m}\neq 0$，且对任意 $j\in\Lambda_3$，总可以取到充分小的正数 ε，使得 $0<\frac{hP_{j,r}(\mathcal{A})}{\left|a_{jj\cdots j}\right|}+\varepsilon\le r<\delta<1$，则

$$\begin{aligned}R_i(\mathcal{B})&\le\delta\left(\sum_{\substack{i_2\cdots i_m\in\Lambda_0^{m-1}\\ \delta_{ii_2\cdots i_m}=0}}\left|a_{ii_2\cdots i_m}\right|+\sum_{i_2\cdots i_m\in\Lambda_2^{m-1}}\left|a_{ii_2\cdots i_m}\right|\right)+\sum_{i_2\cdots i_m\in\Lambda_3^{m-1}}\left|a_{ii_2\cdots i_m}\right|\left(\varepsilon+\max_{j\in\{i_2i_3\cdots i_m\}}\frac{hP_{j,r}(\mathcal{A})}{\left|a_{jj\cdots j}\right|}\right)\\&<\delta\left(\sum_{\substack{i_2\cdots i_m\in\Lambda_0^{m-1}\\ \delta_{ii_2\cdots i_m}=0}}\left|a_{ii_2\cdots i_m}\right|+\sum_{i_2,\cdots,i_m\in\Lambda_2^{m-1}}\left|a_{ii_2\cdots i_m}\right|+\sum_{i_2,\cdots,i_m\in\Lambda_3^{m-1}}\left|a_{ii_2\cdots i_m}\right|\right)=\delta R_i(\mathcal{A})=\left|a_{ii\cdots i}\right|\delta=\left|b_{ii\cdots i}\right|.\end{aligned}$$

(b) 对 $\forall i \in \Lambda_2$，由 (7)式知

$$R_i(\mathcal{B}) \le \delta\left(\sum_{i_2\cdots i_m \in \Lambda_0^{m-1}} \left|a_{ii_2\cdots i_m}\right| + \sum_{\substack{i_2\cdots i_m \in \Lambda_2^{m-1} \\ \delta_{ii_2\cdots i_m}=0}} \left|a_{ii_2\cdots i_m}\right|\right) + \sum_{i_2\cdots i_m \in \Lambda_3^{m-1}} \left|a_{ii_2\cdots i_m}\right|\left(\varepsilon + \max_{j\in\{i_2,i_3,\cdots,i_m\}} \frac{hP_{j,r}(\mathcal{A})}{\left|a_{jj\cdots j}\right|}\right)$$

$$= \varepsilon \sum_{i_2\cdots i_m \in \Lambda_3^{m-1}} \left|a_{ii_2\cdots i_m}\right| + \delta\left(\sum_{i_2\cdots i_m \in \Lambda_0^{m-1}} \left|a_{ii_2\cdots i_m}\right| + \sum_{\substack{i_2\cdots i_m \in \Lambda_2^{m-1} \\ \delta_{ii_2\cdots i_m}=0}} \left|a_{ii_2\cdots i_m}\right|\right) + h\sum_{i_2\cdots i_m \in \Lambda_3^{m-1}} \max_{j\in\{i_2,i_3,\cdots,i_m\}} \frac{P_{j,r}(\mathcal{A})}{\left|a_{jj\cdots j}\right|}\left|a_{ii_2\cdots i_m}\right|$$

$$< T_i \sum_{i_2\cdots i_m \in \Lambda_3^{m-1}} \left|a_{ii_2\cdots i_m}\right| + \mu\left(\sum_{i_2\cdots i_m \in \Lambda_0^{m-1}} \left|a_{ii_2\cdots i_m}\right| + \sum_{\substack{i_2\cdots i_m \in \Lambda_2^{m-1} \\ \delta_{ii_2\cdots i_m}=0}} \left|a_{ii_2\cdots i_m}\right|\right) + h\sum_{i_2\cdots i_m \in \Lambda_3^{m-1}} \max_{j\in\{i_2,i_3,\cdots,i_m\}} \frac{P_{j,r}(\mathcal{A})}{\left|a_{jj\cdots j}\right|}\left|a_{ii_2\cdots i_m}\right|$$

$$= \left|a_{ii\cdots i}\right| x_i = \left|b_{ii\cdots i}\right|.$$

(c) 对 $\forall i \in \Lambda_3$，由(5)式知

$$R_i(\mathcal{B}) \le \delta\left(\sum_{i_2\cdots i_m \in \Lambda_0^{m-1}} \left|a_{ii_2\cdots i_m}\right| + \sum_{i_2\cdots i_m \in \Lambda_2^{m-1}} \left|a_{ii_2\cdots i_m}\right|\right) + \sum_{\substack{i_2\cdots i_m \in \Lambda_3^{m-1} \\ \delta_{ii_2\cdots i_m}=0}} \left|a_{ii_2\cdots i_m}\right|\left(\varepsilon + \max_{j\in\{i_2,i_3,\cdots,i_m\}} \frac{hP_{j,r}(\mathcal{A})}{\left|a_{jj\cdots j}\right|}\right)$$

$$= \varepsilon \sum_{\substack{i_2\cdots i_m \in \Lambda_3^{m-1} \\ \delta_{ii_2\cdots i_m}=0}} \left|a_{ii_2\cdots i_m}\right| + \delta\left(\sum_{i_2\cdots i_m \in \Lambda_0^{m-1}} \left|a_{ii_2\cdots i_m}\right| + \sum_{i_2\cdots i_m \in \Lambda_2^{m-1}} \left|a_{ii_2\cdots i_m}\right|\right) + h\sum_{\substack{i_2\cdots i_m \in \Lambda_3^{m-1} \\ \delta_{ii_2\cdots i_m}=0}} \max_{j\in\{i_2,i_3,\cdots,i_m\}} \frac{P_{j,r}(\mathcal{A})}{\left|a_{jj\cdots j}\right|}\left|a_{ii_2\cdots i_m}\right|$$

$$\le \varepsilon \sum_{\substack{i_2\cdots i_m \in \Lambda_3^{m-1} \\ \delta_{ii_2\cdots i_m}=0}} \left|a_{ii_2\cdots i_m}\right| + hP_{i,r}(\mathcal{A}) < \varepsilon\left|a_{ii\cdots i}\right| + hP_{i,r}(\mathcal{A}) = \left|b_{ii\cdots i}\right|.$$

综上所述，$\left|b_{ii\cdots i}\right| > R_i(\mathcal{B})(\forall i \in [n])$，即 $\mathcal{B}$ 是严格对角占优的。由引理 2.1 知 $\mathcal{B}$ 是 $\mathcal{H}$-张量，进而由引理 2.3 知 $\mathcal{A}$ 是 $\mathcal{H}$-张量。

定理 3.2： 设 $\mathcal{A} = \left(a_{i_1 i_2\cdots i_m}\right)$ 为 m 阶 n 维张量， $\mathcal{A}$ 不可约，若对任意的 $i \in \Lambda_2$，

$$\left|a_{ii\cdots i}\right| x_i \ge \delta\left(\sum_{i_2\cdots i_m \in \Lambda_0^{m-1}} \left|a_{ii_2\cdots i_m}\right| + \sum_{\substack{i_2\cdots i_m \in \Lambda_2^{m-1} \\ \delta_{ii_2\cdots i_m}=0}} \left|a_{ii_2\cdots i_m}\right|\right) + \sum_{i_2\cdots i_m \in \Lambda_3^{m-1}} \max_{j\in\{i_2,i_3,\cdots,i_m\}} \frac{hP_{j,r}(A)}{\left|a_{jj\cdots j}\right|}\left|a_{ii_2\cdots i_m}\right|, \tag{8}$$

且(8)中至少有一个严格不等式成立，则 $\mathcal{A}$ 是 $\mathcal{H}$-张量。

证明： 类似定理 3.1 的证明方法。由于 $\mathcal{A}$ 是不可约的，则

$$\delta\left(\sum_{i_2\cdots i_m \in \Lambda_0^{m-1}} \left|a_{ii_2\cdots i_m}\right| + \sum_{\substack{i_2\cdots i_m \in \Lambda_2^{m-1} \\ \delta_{ii_2\cdots i_m}=0}} \left|a_{ii_2\cdots i_m}\right|\right) \ne 0,\ \ \forall i \in \Lambda_3.$$

构造正对角矩阵 $D = diag(d_1, d_2, \cdots, d_n)$，其中

$$d_i = \begin{cases} (\delta)^{\frac{1}{m-1}}, & i \in \Lambda_1, \\ (x_i)^{\frac{1}{m-1}}, & i \in \Lambda_2, \\ \left(\dfrac{hP_{i,r}(A)}{\left|a_{ii\cdots i}\right|} + \varepsilon\right)^{\frac{1}{m-1}}, & i \in \Lambda_3. \end{cases}$$

令 $\mathcal{B}=\mathcal{A}X^{m-1}=\left(b_{i_1i_2\cdots i_m}\right)$，则 $\mathcal{B}$ 不可约。类似于定理 3.1 的证明，可得 $\left|b_{ii\cdots i}\right|\ge R_i\left(\mathcal{B}\right)\left(\forall i\in[n]\right)$，且对 $\forall i\in\Lambda_2$，(8)中至少有一个严格不等式成立，即存在一个 $i_0\in\Lambda_2$，使得 $\left|b_{i_0i_0\cdots i_0}\right|>R_{i_0}\left(\mathcal{B}\right)$。由引理 2.2 知 $\mathcal{B}$ 是 $\mathcal{H}$-张量，进而由引理 2.3 知 $\mathcal{A}$ 也是 $\mathcal{H}$-张量。

定理 3.3： 设 $\mathcal{A}=\left(a_{i_1i_2\cdots i_m}\right)$ 为 m 阶 n 维张量。若对任意的 $i\in\Lambda_2$，

$$\left|a_{ii\cdots i}\right|x_i\ge\delta\left(\sum_{i_2\cdots i_m\in\Lambda_0^{m-1}}\left|a_{ii_2\cdots i_m}\right|+\sum_{\substack{i_2\cdots i_m\in\Lambda_2^{m-1}\\ \delta_{ii_2\cdots i_m}=0}}\left|a_{ii_2\cdots i_m}\right|\right)+\sum_{i_2\cdots i_m\in\Lambda_3^{m-1}}\max_{j\in\{i_2,i_3,\cdots,i_m\}}\frac{hP_{j,r}\left(\mathcal{A}\right)}{\left|a_{jj\cdots j}\right|}\left|a_{ii_2\cdots i_m}\right|,$$

$$K\left(\mathcal{A}\right)=\Bigg[i\in\Lambda_2:\left|a_{ii\cdots i}\right|x_i>\delta\left(\sum_{i_2\cdots i_m\in\Lambda_0^{m-1}}\left|a_{ii_2\cdots i_m}\right|+\sum_{\substack{i_2\cdots i_m\in\Lambda_2^{m-1}\\ \delta_{ii_2\cdots i_m}=0}}\left|a_{ii_2\cdots i_m}\right|\right)$$
$$+\sum_{i_2\cdots i_m\in\Lambda_3^{m-1}}\max_{j\in\{i_2,i_3,\cdots,i_m\}}\frac{hP_{j,r}\left(\mathcal{A}\right)}{\left|a_{jj\cdots j}\right|}\left|a_{ii_2\cdots i_m}\right|\Bigg]\ne\varnothing,$$

且对 $\forall i\in[n]\setminus K$，存在从 i 到 j 的非零元素链使得 $k\in K\ne\varnothing$，则 $\mathcal{A}$ 是 $\mathcal{H}$-张量。

证明： 构造正对角矩阵 $D=diag\left(d_1,d_2,\cdots,d_n\right)$，记 $\mathcal{B}=\mathcal{A}X^{m-1}=\left(b_{i_1i_2\cdots i_m}\right)$，其中

$$d_i=\begin{cases}\left(\delta\right)^{\frac{1}{m-1}}, & i\in\Lambda_1,\\ \left(x_i\right)^{\frac{1}{m-1}}, & i\in\Lambda_2,\\ \left(\dfrac{hP_{i,r}\left(\mathcal{A}\right)}{\left|a_{ii\cdots i}\right|}\right)^{\frac{1}{m-1}}, & i\in\Lambda_3.\end{cases}$$

类似于的定理 3.1 的证明，可得 $\left|b_{ii\cdots i}\right|\ge R_i\left(\mathcal{B}\right)\left(\forall i\in[n]\right)$，至少存在一个 $i\in\Lambda_2$，使得 $\left|b_{ii\cdots i}\right|>R_i\left(\mathcal{B}\right)$。另外，如果 $\left|b_{ii\cdots i}\right|=R_i\left(\mathcal{B}\right)$，那么 $i\in[n]\setminus K$。假设 $\mathcal{A}$ 中存在一个从 i 到 j 非零元素链使得 $k\in K$，那么 $\mathcal{B}$ 中也存在从 i 到 j 的非零元素链使得 k 满足 $\left|b_{kk\cdots k}\right|>R_k\left(\mathcal{B}\right)$。因此，$\mathcal{B}$ 满足引理 2.4 的条件，所以 $\mathcal{B}$ 是 $\mathcal{H}$-张量，进而由引理 2.3 知 $\mathcal{A}$ 是 $\mathcal{H}$-张量。

例 3.1： 给定 $\mathcal{A}=\left[A(1,:,:),A(2,:,:),A(3,:,:)\right]$，其中

$$A(1,:,:)=\begin{pmatrix}12&1&0\\1&6&0\\1&0&12\end{pmatrix},\ A(2,:,:)=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&10&2\\0&2&2\end{pmatrix},\ A(3,:,:)=\begin{pmatrix}0&0&0\\1&1&0\\0&0&8\end{pmatrix}.$$

由张量 $\mathcal{A}$ 的元素得到

$$\left|a_{111}\right|=12,\quad R_1=21,\quad\left|a_{222}\right|=10,\quad R_2=7,\quad\left|a_{333}\right|=8,\quad R_3=2,$$

所以 $\Lambda_1=\varnothing,\Lambda_2=\{1\},\Lambda_3=\{2,3\}$。计算得

$$\alpha_1=3+0=3,\quad\beta_1=12+6=18,$$

$$x_1=\frac{12-3}{18}=\frac{1}{2},\quad\delta=\frac{1}{2},\quad r_{i=2}=\frac{\frac{1}{2}(0+1)}{10-6}=\frac{1}{8},\quad r_{i=3}=\frac{\frac{1}{2}(1+0)}{8-1}=\frac{1}{14},$$

$$P_{2,r}\left(A\right)=\frac{1}{2}(0+1)+\frac{1}{8}\times6=\frac{5}{4},\quad P_{3,r}\left(A\right)=\frac{1}{2}(1+0)+\frac{1}{8}\times1=\frac{5}{8},$$

$$\frac{P_{2,r}(A)}{|a_{222}|}=\frac{\frac{5}{4}}{10}=\frac{1}{8},\quad \frac{P_{3,r}(A)}{|a_{333}|}=\frac{\frac{5}{8}}{8}=\frac{5}{64},\quad h_{i=2}=\frac{\frac{1}{2}(0+1)}{\frac{5}{4}-\frac{1}{8}\times 6}=1,\quad h_{i=3}=\frac{\frac{1}{2}(1+0)}{\frac{5}{8}-\frac{1}{8}\times 1}=1.$$

当 $i=1$ 时，有

$$\begin{aligned}&\delta\left(\sum_{kl\in\Lambda_0^2}|a_{1kl}|+\sum_{\substack{kl\in\Lambda_2^2\\ \delta_{1kl}=0}}|a_{1kl}|\right)+h\sum_{kl\in\Lambda_3^2}\max_{j\in\{k,l\}}\frac{P_{j,r}(A)}{|a_{jjj}|}|a_{1kl}|\\ &=\frac{1}{2}(3+0)+1\times\frac{1}{8}\times(12+6)=\frac{15}{4}<6=12\times\frac{1}{2}=|a_{111}|x_1.\end{aligned}$$

所以张量 $\mathcal{A}$ 满足本文定理 3.1 的条件，故 $\mathcal{A}$ 是 $\mathcal{H}$-张量。但

$$\sum_{\substack{kl\in[n]^2\setminus\Lambda_3^2\\ \delta_{1kl}=0}}|a_{1kl}|+\sum_{kl\in\Lambda_3^2}\max_{j\in\{k,l\}}\frac{R_j(A)}{|a_{jj\cdots j}|}|a_{1kl}|=3+\frac{7}{10}\times(12+6)=\frac{78}{5}>12=|a_{111}|.$$

因此，$\mathcal{A}$ 不满足[15]中定理 1.1 的条件。

4. 应用

在这一节中，基于 $\mathcal{H}$-张量的准则，我们提出了偶数阶实对称张量正定的一些新条件(多元形式的正定)。首先，我们给出以下引理：

引理 4.1 [13]：设 m 阶 n 维张量 $\mathcal{A}=\left(a_{i_1i_2\cdots i_m}\right)$ 为偶数阶实对称张量，对任意的 $i\in[n]$ 都满足 $a_{ii\cdots i}>0$。如果 $\mathcal{A}$ 是 $\mathcal{H}$-张量，则 $\mathcal{A}$ 是正定的。

根据引理 4.1，定理 3.1~3.3，得到以下结果：

定理 4.1： 设 m 阶 n 维张量 $\mathcal{A}=\left(a_{i_1i_2\cdots i_m}\right)$ 为偶数阶实对称张量，对任意的 $i\in[n]$ 都满足 $a_{ii\cdots i}>0$。如果 $\mathcal{A}$ 满足下列条件之一：

i) 定理 3.1 的所有条件；

ii) 定理 3.2 的所有条件；

iii) 定理 3.3 的所有条件；

则 $\mathcal{A}$ 是正定的。

例 4.1： 设四次齐次多项式

$$f(x)=Ax^4=15x_1^4+23x_2^4+26x_3^4+18x_4^4+12x_1^2x_2x_3-12x_2x_3^2x_4-24x_1x_2x_3x_4,$$

其中 $\mathcal{A}=\left(a_{i_1i_2\cdots i_m}\right)$ 是一个 4 阶 4 维的实对称张量，且

$$a_{1111}=15,\ a_{2222}=23,\ a_{3333}=26,\ a_{4444}=18,$$

$$a_{1123}=a_{1132}=a_{1213}=a_{1312}=a_{1231}=a_{1321}=1,$$

$$a_{2113}=a_{2131}=a_{2311}=a_{3112}=a_{3121}=a_{3211}=1,$$

$$a_{2334}=a_{2343}=a_{2433}=a_{4233}=a_{4323}=a_{4332}=-1,$$

$$a_{3234}=a_{3243}=a_{3324}=a_{3342}=a_{3423}=a_{3432}=-1,$$

$$a_{1234}=a_{1243}=a_{1324}=a_{1342}=a_{1423}=a_{1432}=-1,$$

$$a_{2134}=a_{2143}=a_{2314}=a_{2341}=a_{2413}=a_{2431}=-1,$$

$$a_{3124}=a_{3142}=a_{3214}=a_{3241}=a_{3412}=a_{3421}=-1,$$
$$a_{4123}=a_{4132}=a_{4213}=a_{4231}=a_{4312}=a_{4321}=-1,$$

其余的 $a_{i_1i_2i_3i_4}=0$。计算得

$$a_{1111}=15<18=R_1(\mathcal{A}),$$
$$a_{4444}\left(a_{1111}-R_1(\mathcal{A})+|a_{1444}|\right)=-54<0=R_4(\mathcal{A})|a_{1444}|.$$

因此，$\mathcal{A}$ 既不是严格对角占优张量也不是拟双严格对角占优张量，所以不能用[16]的定理 3 和[17]的定理 4 来判定 $\mathcal{A}$ 的正定性。但是，可以证明 $\mathcal{A}$ 满足本文定理 3.1 的条件。因为

$$|a_{1111}|=10,\ \ R_1=12,\ \ |a_{2222}|=23,\ \ R_2=12,\ \ |a_{3333}|=26,\ \ R_3=15,\ \ |a_{4444}|=18,\ \ R_4=9,$$

所以 $\Lambda_1=\varnothing,\Lambda_2=\{1\},\Lambda_3=\{2,3,4\}$。计算得

$$\alpha_1=6+0=6,\quad \beta_1=6,\quad x_1=\frac{10-6}{6}=\frac{2}{3},\quad \delta=\frac{2}{3},$$

$$r_{i=2}=\frac{\frac{2}{3}(9+0)}{23-3}=\frac{3}{10},\quad r_{i=3}=\frac{\frac{2}{3}(9+0)}{26-6}=\frac{3}{10},\quad r_{i=4}=\frac{\frac{2}{3}(6+0)}{18-3}=\frac{4}{15},\quad r=\frac{3}{10},$$

$$P_{2,r}(A)=\frac{2}{3}(9+0)+\frac{3}{10}\times 3=\frac{69}{10},\quad P_{3,r}(A)=\frac{2}{3}(9+0)+\frac{3}{10}\times 6=\frac{39}{5},$$

$$P_{4,r}(A)=\frac{2}{3}(6+0)+\frac{3}{10}\times 3=\frac{49}{10},\quad \frac{P_{2,r}(A)}{|a_{2222}|}=\frac{\frac{69}{10}}{23}=\frac{3}{10},$$

$$\frac{P_{3,r}(A)}{|a_{3333}|}=\frac{\frac{39}{5}}{26}=\frac{3}{10},\quad \frac{P_{4,r}(A)}{|a_{4444}|}=\frac{\frac{49}{10}}{18}=\frac{49}{180},$$

$$h_{i=2}=\frac{\frac{2}{3}(9+0)}{\frac{69}{10}-\frac{3}{10}\times 3}=1,\quad h_{i=3}=\frac{\frac{2}{3}(9+0)}{\frac{39}{5}-\frac{3}{10}\times 6}=1,\quad h_{i=4}=\frac{\frac{2}{3}(6+0)}{\frac{49}{10}-\frac{3}{10}\times 3}=1.$$

所以可得，当 $i=1$ 时，

$$\delta\left(\sum_{jko\in\Lambda_0^3}|a_{1jko}|+\sum_{\substack{jko\in\Lambda_2^3\\ \delta_{1jko}=0}}|a_{1jko}|\right)+h\sum_{jko\in\Lambda_3^3}\max_{l\in\{j,k,o\}}\frac{P_{l,r}(A)}{|a_{llll}|}|a_{1jko}|$$
$$=\frac{2}{3}(6+0)+1\times\frac{3}{10}\times 6=\frac{29}{5}<\frac{20}{3}=10\times\frac{2}{3}=|a_{1111}|x_1.$$

根据定理 4.1，张量 $\mathcal{A}$ 是正定的，即 $f(x)$ 是正定的。

5. 结论

本文讨论了 $\mathcal{H}$-张量的判定问题，得到了几个新的判定不等式，并给出了其在偶数阶实对称张量，即偶次齐次多项式正定性判定中的应用。数值算例表明了本文所得结论的有效性。

致 谢

感谢审稿老师和编辑老师提出了宝贵意见。

基金项目

贵州省科学技术基金(20181079, 20191161)，贵州民族大学自然科学基金(GZMU[2019]YB08)。

参考文献

[1] Chang, K.C., Pearson, K. and Zhang, T. (2008) Perron-Frobenius Theorem for Nonnegative Tensors. *Communications in Mathematical Sciences*, **6**, 507-520. https://doi.org/10.4310/CMS.2008.v6.n2.a12

[2] Lathauwer, L.D., Moor, B.D. and Vandewalle, J. (2000) On the Best Rank-1 and Rank-(R1,R2,RN) Approximation of Higher-Order Tensors. *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications*, **21**, 1324-1342. https://doi.org/10.1137/S0895479898346995

[3] Liu, Y.J., Zhou, G.L. and Ibrahim, N.F. (2010) An Always Convergent Algorithm for the Largest Eigenvalue of an Irreducible Nonnegative Tensor. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, **235**, 286-292. https://doi.org/10.1016/j.cam.2010.06.002

[4] Ng, M., Qi, L.Q. and Zhou, G.L. (2010) Finding the Largest Eigenvalue of a Nonnegative Tensor. *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications*, **31**, 1090-1099. https://doi.org/10.1137/09074838X

[5] Zhang, T. and Golub, G.H. (2001) Rank-One Approximation to Higher-Order Tensors. *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications*, **23**, 534-550. https://doi.org/10.1137/S0895479899352045

[6] Qi L. (2005) Eigenvalues of a Real Supersymmetric Tensor. *Journal of Symbolic Computation*, **40**, 1302-1324. https://doi.org/10.1016/j.jsc.2005.05.007

[7] Kofidis, E. and Regalia, P.A. (2002) On the Best Rank-1 Approximation of Higher-Order Supersymmetric Tensors. *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications*, **23**, 863-884. https://doi.org/10.1137/S0895479801387413

[8] Yang, Y.N. and Yang, Q.Z. (2011) Further Results for Perron-Frobenius Theorem for Nonnegative Tensors II. *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications*, **32**,1236-1250. https://doi.org/10.1137/100813671

[9] Ni, Q., Qi, L. and Wang, F. (2008) An Eigenvalue Method for Testing Positive Definiteness of a Multivariate Form. *IEEE Transactions on Automatic Control*, **53**, 1096-1107. https://doi.org/10.1109/TAC.2008.923679

[10] Zhang, L.P., Qi, L.Q. and Zhou, G.L. (2014) M-Tensors and Some Applications. *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications*, **35**, 437-542. https://doi.org/10.1137/130915339

[11] Kannana, M.R., Mondererb, N.S. and Bermana, A. (2015) Some Properties of Strong H-Tensors and General H-Tensors. *Linear Algebra & Its Applications*, **476**, 42-55. https://doi.org/10.1016/j.laa.2015.02.034

[12] Ding, W., Qi, L.Q. and Wei, Y.M. (2013) M-tensors and Nonsingular M-Tensors. *Linear Algebra and Its Applications*, **439**, 3264-3278. https://doi.org/10.1016/j.laa.2013.08.038

[13] Li, C.Q., Wang, F., Zhao, J.X., *et al*. (2014) Criterions for the Positive Definiteness of Real Supersymmetric Tensors. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, **255**, 1-14. https://doi.org/10.1016/j.cam.2013.04.022

[14] , F. and Sun, D.S. (2016) New Criteria for H-Tensors and an Application. *Journal of Inequalities and Applications*, **96**, 1-12. https://doi.org/10.1186/s13660-016-1041-0

[15] Li, Y.T., Liu, Q.L. and Qi, L.Q. (2017) Programmable Criteria for Strong H-Tensors. *Numerical Algorithms*, **74**, 199-221. https://doi.org/10.1007/s11075-016-0145-4

[16] Qi, L.Q. and Song, Y.S. (2014) An Even Order Symmetric B-Tensor Is Positive Definite. *Linear Algebra and Its Applications*, **457**, 303-312. https://doi.org/10.1016/j.laa.2014.05.026

[17] Li, C.Q. and Li, Y.T. (2015) Double B-Tensors and Quasi-Double B-Tensors. *Linear Algebra and Its Applications*, **466**, 343-356. https://doi.org/10.1016/j.laa.2014.10.027