

飞机空中加油方案研究

李浩¹, 朱雯雯¹, 卢洋²

¹南京工业大学数理科学学院, 江苏 南京

²南京工业大学计算机科学与技术学院, 江苏 南京

Email: 952656623@qq.com

收稿日期: 2020年8月3日; 录用日期: 2020年8月25日; 发布日期: 2020年9月2日

摘要

本文研究救援飞机采用空中加油的方式来完成救援任务, 分别建立了线性规划模型及多目标规划模型, 所建模型在保证救援飞机完成任务的前提下, 在降低成本和提高成功率方面具有重要的现实意义。保证救援人员能够完成任务的关键是加油量的充足。本文考虑到空中加油机不同的分配和加油方式对飞机加油量的影响, 将加油机分为伴随机和接应机, 并设计了两种方案。又考虑到飞机完成该任务的成本, 建立了以加油机航行距离最短为目标的线性规划模型。用Lingo软件进行求解, 对比两种方案的最优情况得应该按照方案二中2架伴随机和1架接应机的方案。

关键词

线性规划, 多目标规划, Lingo软件

Study on Aircraft In-Flight Refueling Scheme

Hao Li¹, Wenwen Zhu¹, Yang Lu²

¹School of Physical and Mathematical Sciences, Nanjing Tech University, Nanjing Jiangsu

²School of Computer Science and Technology, Nanjing Tech University, Nanjing Jiangsu

Email: 952656623@qq.com

Received: Aug. 3rd, 2020; accepted: Aug. 25th, 2020; published: Sep. 2nd, 2020

Abstract

In this article, the rescue aircraft is studied to complete the rescue mission by in-flight refueling. The linear programming model and the multi-objective programming model are respectively established. The model has important practical significance in reducing the cost and increasing the success rate under the premise of ensuring the rescue aircraft to complete the mission. The key to ensuring that rescuers can get the job done is enough refueling. Considering the influence of different distribution

文章引用: 李浩, 朱雯雯, 卢洋. 飞机空中加油方案研究[J]. 应用数学进展, 2020, 9(9): 1351-1357.

DOI: 10.12677/aam.2020.99160

and refueling methods on the amount of refueling, the air refueling tankers are divided into adjoint aircrafts and response aircrafts, and two schemes are designed. Considering the cost of completing the task, a linear programming model aiming at the shortest flying distance of tanker is established. Lingo software is used to solve the problem, and the optimal situation of the two schemes should be according to the scheme of 2 adjoint machines and 1 auxiliary machine in Scheme 2.

Keywords

Linear Programming, Multi-Objective Programming, Lingo

Copyright © 2020 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

太平洋中部一个小岛上的居民被自然灾害困住了。救援人员需要派遣一架轻型飞机将少量应急药品运送到岛上，并将一名重伤员运送到医疗基地进行救援。岛上有一条无人值守的飞机跑道可以使用，但没有飞机或燃料储备。某种救援飞机从距离该岛 615 海里的基地起飞。飞机在正常负载条件下最大航程 680 海里。为了能够顺利返回，必须进行空中加油。

这种飞机能接受空中加油。经过简单的改装，同类型的飞机还可以执行给合作伙伴飞机提供空中加油的任务，即将自己的燃料提供给伙伴。这种飞机的最大燃料容量是 155 千克。改装空中加油设备后，最大油负荷增加到 170 千克，在最大油负荷情况下却无法承载其他负荷。该基地拥有一支机队和足够的设备，可以在短时间内改装成加油机。因此，需要设计一个可行的空中加油方案，使救援人员能够完成任务。

2. 模型的假设

- 1) 所有飞机均按匀速直线飞行，飞行的速度、单位时间的耗油量均相同且均为常数；
- 2) 飞机在转向、起飞、降落及加油过程的耗油量忽略不计；
- 3) 不考虑飞机质量变化对飞机的影响；
- 4) 每架飞机油箱的最大储油量相同，且每辆飞机均在燃油量最大时起飞；
- 5) 假设所有飞机在空中飞行时不受天气影响；
- 6) 假设飞机的耗油量只与飞机航行的距离有关，与飞机航行速度无关。

3. 名词解释与符号说明

3.1. 名词解释

伴随机和接应机：空中加油分为两个阶段，分别为出航和返航。把在运输飞机出航途中为运输机加油的加油飞机称为伴随机；把在运输飞机返航途中为运输机加油的加油飞机称为接应机。

3.2. 符号说明

- S ——救援飞机在正常负载条件下的最大航程；
 L ——空中加油机在最大油负荷下的最大航程；
 d ——基地与小岛之间的距离；

- A_i ——伴随机给救援飞机的加油点;
 B_i ——接应机给救援飞机的加油点;
 x_i ——救援飞机在加油点加过油之后能航行的距离;
 y_i ——加油点 A_i, B_i 到基地的距离;
 v ——所有飞机的飞行速度。

4. 问题分析

根据题中所述,轻型的救援飞机从距小岛 615 海里的基地向小岛运送物资并将一名重伤员送回医疗基地救治。而该救援飞机在正常负载的条件下最大航程为 680 海里,所以为了能够顺利返航,救援飞机必须接受空中加油。经改造,该类型的飞机可以有原来最大燃料容量为 155 千克的飞机改造成最大油负荷为 170 千克的加油机。因此需要设计一个可行的空中加油方案,使救援人员能够完成任务。

设计的方案中需要考虑加油机的数量和加油的方式,并将加油机分为伴随机和接应机。对此,我们设计了两种加油方式,用 Lingo 软件编写程序,通过建立以所有加油机航程最短为目标的线性规划模型,选择不同数量的伴随机和接应机计算出加油机总的耗油量,综合分析出空中加油的最优方案。

5. 模型的建立与求解

5.1. 模型的准备

按题中所述,救援飞机的最大燃料容量为 155 千克,且飞机在正常负载条件下最大航程 S 为 680 海里,则可求得救援飞机在正常负载下每消耗 1 千克燃油能航行的最大距离为 4.387 海里。而改装空中加油设备后,飞机的最大油负荷增加到 170 千克,则可推测改装后的加油机在最大油负荷的情况下航行的最大距离 L 为 745.806 海里。

5.2. 模型的建立

题中要求设计可行的救援飞行方案,对此我们设计了两个方案,分别建立了以加油机航行路程最短为目标的线性规划模型。

方案一:这个方案采用伴随机和接应机分别只给救援飞机加一次油,机队中的其他加油机再接应合作伙伴飞机提供空中加油的策略。

首先,该模型不考虑飞机加油过程的时间,假设每次加油都是瞬间完成的,其次假设有 m 架伴随机, n 架接应机,按照加油时间的先后分别对 m 架伴随机和 n 架接应机进行编号,飞机编号为 1 至 m 的为伴随机,飞机编号为 $m+1$ 至 $m+n$ 的为接应机,在出航过程中,第 1 架加油机给救援机加油,接着在第 1 架加油机返航途中第 2 架加油机去给第 1 架加油机加油,以此类推,第 k 架加油机给第 $k-1$ 架加油机加油 ($k=2,3,\dots,m$),直到所有加油机可以顺利返回。返航过程类似可得,第 $m+1$ 架加油机给主机加油,第 k 架加油机给第 $k-1$ 架加油机加油 ($k=m+2,\dots,m+n$)。

① 题中要求给出的方案能够使救援飞机完成救援任务,则救援飞机的初始油量与被加油量之和要满足该飞机从基地去小岛,再从小岛回基地的航行,所以满足:

$$S + x_1 + x_{m+n} \geq 2d.$$

② 由于空中加油机的最大燃油量受到限制,所以每架伴随机和接应机的初始的油量减去被加的油量所能航行的距离不能超过空中加油机在最大油负荷下的最大航程($2y_k$ 是第 k 架飞机在此过程中消耗的油量所能航行的距离, x_k 为第 k 架飞机给出的油量所能航行的距离, x_{k+1} 是第 k 架飞机被加的油量所能航行的距离),所以满足:

伴随机:

$$2y_k + x_k - x_{k+1} \leq L (k=1, 2, \dots, m-1).$$

$$2y_m + x_m \leq L.$$

接应机:

$$2y_k + x_k - x_{k+1} \leq L (k=m+1, \dots, m+n-1).$$

$$2y_{m+n} + x_{m+n} \leq L.$$

③ 因为每架飞机的单位时间耗油量是相同的, 且飞机的初始油箱都是满的, 所以空中加油机给救援飞机的加油量不能超过救援飞机消耗的加油量, 故满足:

伴随机:

$$x_1 \leq y_1.$$

$$x_{k+1} \leq 2y_k - y_{k+1} + x_k (k=1, 2, \dots, m-1).$$

接应机:

$$x_{m+1} \leq 2d - y_{m+1} - x_1.$$

$$x_{k+1} \leq 2y_k - y_{k+1} + x_k (k=m+1, \dots, m+n-1).$$

④ 为了确保救援飞机能够完成任务, 所以要考虑到救援飞机在接应机加油前的一瞬间油箱内的油没有耗尽, 故满足:

$$2d - S - x_1 \leq y_{m+1}.$$

⑤ 为了确保加油机能够返航, 所以要分别考虑伴随机和接应机在下一架加油机接应时油箱内燃油留有剩余, 则满足:

$$2y_k - y_{k+1} + x_k \leq L (k=1, 2, \dots, m-1).$$

$$2y_k - y_{k+1} + x_k \leq L (k=m+1, \dots, m+n-1).$$

⑥ 根据实际, 加油机在加油点时给其他飞机加的燃油量不得超过该加油机到达加油点时的剩余燃油量, 则满足:

$$y_k + x_k \leq L (k=1, 2, \dots, m+n).$$

⑦ 根据实际, 加油点均在飞机的航线上, 且飞机均按序号排列, 则满足:

$$d \geq y_1 \geq y_2 \geq \dots \geq y_m.$$

$$d \geq y_{m+1} \geq y_{m+2} \geq \dots \geq y_{m+n}.$$

并且, 飞机的加油量不能超过飞机的最大燃油量, 满足:

$$x_1 \leq S.$$

$$x_{m+1} \leq S.$$

$$x_k \leq L (k=1, 2, \dots, m+n, k \neq 1, k \neq m+1).$$

从而, 目标为加油机航行路程最短的线性规划模型, 目标函数为:

$$\min z = 2 \sum_{i=1}^{m+n} y_i.$$

方案二：此方案中伴随机和救援飞机同时起飞，其中的每架伴随机在行驶到一定距离时(确保能够安全返航)将剩余油量平均分给其他加油机和救援机，然后返航，最后一架伴随机只给救援飞机加油。而所有接应机也是同时起飞，其中的每架接应机在返航前给剩余的所有接应机进行空中加油，直至最后的接应机给救援飞机加油并返航。

首先，该模型不考虑飞机加油过程的时间，假设每次加油都是瞬间完成的，其次假设有 m 架伴随机， n 架接应机，按照返航时间的先后分别对 m 架伴随机和 n 架接应机进行编号，飞机编号为 1 至 m 的为伴随机，飞机编号为 $m+1$ 至 $m+n$ 的为接应机。

① 题中要求给出的方案能够使救援飞机完成救援任务，则救援飞机的初始油量与被加油量之和要满足该飞机从基地去小岛，再从小岛回基地的航行，所以满足：

$$S + \sum_{i=1}^m x_i + x_{m+n} \geq 2d.$$

② 由于空中加油机的最大燃油量受到限制，所以每架伴随机和接应机的初始的油量减去被加的油量所能航行的距离不能超过空中加油机在最大油负荷下的最大航程($2y_k$ 是第 k 架飞机在此过程中消耗的油量所能航行的距离， $(m-k+1)x_k$ 和 $(m-k+n)x_k$ 为第 k 架飞机给出的油量所能航行的距离， $\sum_{i=1}^{k-1} x_i$ 和 $\sum_{i=m+1}^{k-1} x_i$ 是第 k 架飞机被加的油量所能够航行的距离)，所以满足：

伴随机：

$$2y_k + (m-k+1)x_k - \sum_{i=1}^{k-1} x_i \leq L (k=2, \dots, m-1).$$

$$2y_1 + mx_1 \leq L.$$

接应机：

$$2y_k + (m-k+n)x_k - \sum_{i=m+1}^{k-1} x_i \leq L (k=m+2, \dots, m+n-1).$$

$$2y_{m+1} + (n-1)x_{m+1} \leq L.$$

$$2y_{m+n} + x_{m+n} - \sum_{i=m+1}^{m+n-1} x_i \leq L.$$

③ 因为每架飞机的单位时间耗油量是相同的，且飞机的初始油箱都是满的，所以每架飞机被加的油量不能超过消耗的加油量，故满足：

伴随机：

$$\sum_{i=1}^k x_i \leq y_k (k=1, 2, \dots, m).$$

接应机：

$$\sum_{i=m+1}^k x_i \leq y_k (k=m+1, \dots, m+n-1).$$

$$x_{m+n} \leq 2d - y_{m+n} - \sum_{i=1}^m x_i.$$

④ 根据实际，加油点均在飞机的航线上，且飞机均按序号排列，则满足：

$$d \geq y_m \geq \dots \geq y_2 \geq y_1.$$

$$d \geq y_{m+n} \geq \dots \geq y_{m+2} \geq y_{m+1}.$$

并且，飞机的加油量不能超过飞机的最大燃油量，满足：

$$x_k \leq S (k=1, 2, \dots, m).$$

$$x_{m+n} \leq S.$$

⑤ 为了确保救援飞机能够完成任务,所以要考虑到救援飞机在接应机加油前的一瞬间油箱内的油没有耗尽,故满足:

$$2d - S - \sum_{i=1}^m x_i \leq y_{m+n}.$$

从而,目标为加油机航行路程最短的线性规划模型,目标函数为:

$$\min z = 2 \sum_{i=1}^{m+n} y_i.$$

5.3. 模型的求解

用 Lingo 软件求解[1],分别对伴随机和接应机取 1 架至 6 架,求得的目标函数的最优值。方案一的结果如表 1。

Table 1. Range of tankers
表 1. 加油机的航程情况

$n \backslash m$	1	2	3	4	5	6
1		1552.097	2004.194	2456.291	2908.388	3301.743
2		1552.097	2004.194	2456.291	2908.388	3301.743
3		1552.097	2004.194	2456.291	2908.388	3301.743
4		1552.097	2004.194	2456.291	2908.388	3301.743
5		1552.097	2004.194	2456.291	2908.388	3301.743
6		1552.097	2004.194	2456.291	2908.388	3301.743

结果分析:

由图表可知,接应机的数量对结果的影响不大,最优结果中只需 1 架,而随着伴随机数量的增多,加油机的航程也在增加,因此方案一的最优方案取 2 架伴随机,1 架接应机,且第 1 架伴随机给救援飞机的空中加油的加油点距离基地 323.9515 海里,加油量为 73.8419 千克,第 2 架伴随机给第 1 架伴随机空中加油的加油点距离基地 226.0485 海里,加油量为 51.5258 千克,第 1 架接应机给伴随机空中加油的加油点距离基地 226.0485 海里,加油量为 51.5258 千克。第 1 架伴随机与救援飞机同时起飞,第 2 架伴随机在救援飞机起飞后 $\frac{2y_1 - 2y_2}{v}$ 小时起飞,第 1 架接应机救援飞机起飞后 $\frac{2d - 2y_3}{v}$ 小时起飞。

方案二的结果如表 2。

Table 2. Range of tankers
表 2. 加油机的航程情况

$n \backslash m$	1	2	3	4
1		1258.388	1258.388	1258.388
2	1416.776	1258.388	1258.388	1258.388
3	1416.776	1258.388	1258.388	1258.388
4	1416.776	1258.388	1258.388	1258.388

6. 总结

由图表可知, 方案二中加油机航程的最优值只有两种情况, 分别为 2 架伴随机、1 架接应机和 1 架伴随机、2 架接应机, 而根据图表可知当采用 2 架伴随机、1 架接应机时的加油机航程最短, 此时, 第 1 架伴随机给其他飞机加油的加油点距离基地 79.1940 海里, 加油量为 18.0516 千克, 第 2 架伴随机给其他飞机加油的加油点距离基地 301.3980 海里, 加油量为 50.6494 千克, 第 1 架接应机给救援飞机加油的加油点距离基地 248.602 海里, 加油量为 56.6666 千克, 且伴随机和救援飞机同时起飞, 接应机在救援飞机起飞后 $\frac{2d-2y_3}{v}$ 小时起飞。

综合方案一和方案二中加油机航程的最优值, 可得方案二的最优值更小, 因此, 我们给出的方案按方案二中 2 架伴随机、1 架接应机安排。

参考文献

- [1] 赵静, 但琦. 数学模型与数学实验[M]. 北京: 高等教育出版社, 2007.