Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, 2021, 10(10), 3337-3342
Published Online October 2021 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2021.1010350

Hans汉斯

矩阵广义迹与映射之间的关系研究

武真真[1]，**刘兴祥**[2*]

[1]东明县职业中等专业学校，山东 菏泽
[2]延安大学数学与计算机科学学院，陕西 延安

收稿日期：2021年9月15日；录用日期：2021年10月8日；发布日期：2021年10月18日

摘 要

研究了矩阵广义迹与映射之间的关系。结合矩阵的基本运算，将方阵的迹与映射之间的关系，推广到一般矩阵和两个特殊矩阵(Hadamard积、Kronecker积)的广义迹与映射之间的关系。

关键词

矩阵的广义迹，Hadamard积，Kronecker积，映射

Research on the Relationship between Generalized Trace of Matrix and Mapping

Zhenzhen Wu[1], **Xingxiang Liu**[2*]

[1]Dongming Vocational Secondary School, Heze Shandong
[2]College of Mathematics and Computer Science, Yan'an University, Yan'an Shaanxi

Received: Sep. 15th, 2021; accepted: Oct. 8th, 2021; published: Oct. 18th, 2021

Abstract

The relationship between generalized trace of matrix and mapping is studied. The basic operations of the matrix are combined. The relationship between trace of matrix and mapping is extended to that of generalized trace of general matrix, generalized trace of Hadamarad product and Kronecker product of special matrix and mapping.

*通讯作者。

文章引用: 武真真, 刘兴祥. 矩阵广义迹与映射之间的关系研究[J]. 应用数学进展, 2021, 10(10): 3337-3342.
DOI: 10.12677/aam.2021.1010350

Keywords

Matrix Generalized Trace, Hadamard Product, Kronecker Product, Mapping

1. 引言

矩阵运算之间的关系是矩阵研究中的一个重要内容，而矩阵的迹运算在定义推广之后的研究显得十分重要。本文结合矩阵的基本运算，在方阵的迹与映射关系的基础上探究了一般矩阵的广义迹与映射之间的关系，并讨论了特殊矩阵 Hadamard 积和 Kronecker 积的广义迹与映射之间的关系。

2. 预备知识

定义 1 [1]设 $A=\left(a_{ij}\right)_{m\times n}$，则将 $\sum_{i=1}^{\min(m,n)} a_{ii}$ 称为矩阵 A 的广义迹，记作 $tr\left(A\right)$。

定义 2 [2]设 $A=\left(a_{ij}\right)_{m\times n}$，$B=\left(b_{ij}\right)_{m\times n}$，称 $C=\left(c_{ij}\right)_{m\times n}$ 为 A 与 B 的 Hadamard 积，其中 $c_{ij}=a_{ij}\times b_{ij}$，记作 $C=A\circ B$。

定义 3 [2]设 $A=\left(a_{ij}\right)_{m\times n}$，$B=\left(b_{ij}\right)_{s\times t}$，有

$$C=\left(c_{ij}\right)_{ms\times nt}=A\otimes_L B=\begin{bmatrix} a_{11}B & a_{12}B & \cdots & a_{1n}B \\ a_{21}B & a_{22}B & \cdots & a_{2n}B \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}B & a_{m2}B & \cdots & a_{mn}B \end{bmatrix},$$

称 $C=\left(c_{ij}\right)_{m\times n}$ 为 A 与 B 的左 Kronecker 积，记作：$C=A\otimes_L B$。

定义 4 [2]设 $A=\left(a_{ij}\right)_{m\times n}$，$B=\left(b_{ij}\right)_{s\times t}$，有

$$D=\left(d_{ij}\right)_{ms\times nt}=A_R\otimes B=\begin{bmatrix} b_{11}A & b_{12}A & \cdots & b_{1t}A \\ b_{21}A & b_{22}A & \cdots & b_{2t}A \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{s1}A & b_{s2}A & \cdots & b_{st}A \end{bmatrix},$$

称 $D=\left(d_{ij}\right)_{ms\times nt}$ 为 A 与 B 的右 Kronecker 积，记作：$D=A_R\otimes B$。

定义 5 [3]设 V_1,V_2 是数域 F 上的线性空间，若对 V_1 中任意两个向量 α,β 和任意的 $k\in F$，都有

$$f\left(\alpha+\beta\right)=f\left(\alpha\right)+f\left(\beta\right),$$

$$f\left(k\alpha\right)=kf\left(\alpha\right)。$$

则称 f 是 V_1 到 V_2 的一个映射。

3. 主要结论

引理[4]如果定义 $f:M_n\left(F\right)\to F$ 是一个映射，且满足以下的条件：

1) $\forall A,B\in M_n\left(F\right)$，有 $f\left(A+B\right)=f\left(A\right)+f\left(B\right)$；

2) $\forall A\in M_{n\times n}(F)$，数 $k\in F$ ，有 $f(kA)=kf(A)$；

3) $\forall A,B\in M_n(F)$，有 $f(AB)=f(BA)$；

4) $f(E_n)=n$；

则 $f(A)=trA$ 对 $\forall A\in M_n(F)$ 都成立。

证明： 设 E_{ij} 为 n 阶的基础矩阵，由条件(3)知 $f(E_{ii})=f(E_{ij}E_{ji})=f(E_{ji}E_{ij})=f(E_{jj})$，所以 $f(E_{ii})=1$.

另一方面，当 $i\neq j$，$E_{ij}=E_{ik}E_{kj}$，则 $f(E_{ik}E_{kj})=f(E_{ki}E_{jk})=f(0)=0$。

又由条件(1)和条件(4)知：

$$f(E_n)=f(E_{11}+E_{22}+\cdots+E_{nn})=f(E_{11})+f(E_{22})+\cdots+f(E_{nn})=n\text{。}$$

由上述可知，如果设 $A=(a_{ij})_{n\times n}$，由条件(2)可得

$$f(A)=f\left(\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}a_{ij}E_{ij}\right)=\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}a_{ij}f(E_{ij})=\sum_{i=1}^{n}a_{ii}=trA\text{。}$$

综上可证：$f(A)=trA$ 对 $\forall A\in M_n(F)$ 都成立。

定理 1 如果定义 $f:M_{m\times n}(F)\to F$ 是一个映射，且满足以下的条件：

1) $\forall A,B\in M_{m\times n}(F)$，有 $f(A+B)=f(A)+f(B)$；

2) $\forall A\in M_{m\times n}(F)$，数 $k\in F$ ，有 $f(kA)=kf(A)$；

3) $\forall A\in M_{m\times n}(F)$、$\forall B\in M_{n\times m}(F)$，有 $f(AB)=f(BA)$；

4) $f\left(\begin{bmatrix}E_{\min(m,n)} & O_{\min(m,n)\times[n-\min(m,n)]}\\ O_{[m-\min(m,n)]\times\min(m,n)} & O_{[m-\min(m,n)]\times[n-\min(m,n)]}\end{bmatrix}\right)=\min(m,n)$；

则 $f(A)=trA$ 对 $\forall A\in M_{m\times n}(F)$ 都成立。

证明： 设 E_{ij} 为 $\min(m,n)$ 阶的基础矩阵，O_{ij} 为 $\min(m,n)\times[n-\min(m,n)]$ 阶或 $[m-\min(m,n)]\times\min(m,n)$ 阶零矩阵，由条件(3)知：$f(E_{ii})=f(E_{ij}E_{ji})=f(E_{ji}E_{ij})=f(E_{jj})$，所以 $f(E_{ii})=1$。

另一方面，当 $i\neq j$，$E_{ij}=E_{ik}E_{kj}$，则 $f(E_{ik}E_{kj})=f(E_{ki}E_{jk})=f(0)=0$。

又由条件(1)和条件(4)知：

当 $m=n$ 时，

$$\begin{aligned}&f\left(\begin{bmatrix}E_{\min(m,n)} & O_{\min(m,n)\times[n-\min(m,n)]}\\ O_{[m-\min(m,n)]\times\min(m,n)} & O_{[m-\min(m,n)]\times[n-\min(m,n)]}\end{bmatrix}\right)\\&=f(E_m)=f(E_{11}+E_{22}+\cdots+E_{mm})=f(E_{11})+f(E_{22})+\cdots+f(E_{mm})=m.\end{aligned}$$

当 $m<n$ 时，

$$\begin{aligned}&f\left(\begin{bmatrix}E_{\min(m,n)} & O_{\min(m,n)\times[n-\min(m,n)]}\\ O_{[m-\min(m,n)]\times\min(m,n)} & O_{[m-\min(m,n)]\times[n-\min(m,n)]}\end{bmatrix}\right)\\&=f\left(\left[E_m,O_{m\times(n-m)}\right]\right)=f\left(\left[E_{11},O_{m\times(n-m)}\right]+\left[E_{22},O_{m\times(n-m)}\right]+\cdots+\left[E_{mm},O_{m\times(n-m)}\right]\right)\\&=f\left(\left[E_{11},O_{m\times(n-m)}\right]\right)+f\left(\left[E_{22},O_{m\times(n-m)}\right]\right)+\cdots+f\left(\left[E_{mm},O_{m\times(n-m)}\right]\right)=m.\end{aligned}$$

当 $m>n$ 时，

$$f\left(\begin{bmatrix} E_{\min(m,n)} & O_{\min(m,n)\times[n-\min(m,n)]} \\ O_{[m-\min(m,n)]\times\min(m,n)} & O_{[m-\min(m,n)]\times[n-\min(m,n)]} \end{bmatrix}\right)$$
$$=f\left(\begin{bmatrix} E_n \\ O_{(m-n)\times n} \end{bmatrix}\right)=f\left(\begin{bmatrix} E_{11} \\ O_{(m-n)\times n} \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} E_{22} \\ O_{(m-n)\times n} \end{bmatrix}+\cdots+\begin{bmatrix} E_{nn} \\ O_{(m-n)\times n} \end{bmatrix}\right)$$
$$=f\left(\begin{bmatrix} E_{11} \\ O_{(m-n)\times n} \end{bmatrix}\right)+f\left(\begin{bmatrix} E_{22} \\ O_{(m-n)\times n} \end{bmatrix}\right)+\cdots+f\left(\begin{bmatrix} E_{nn} \\ O_{(m-n)\times n} \end{bmatrix}\right)=n.$$

综上可得：$f\left(\begin{bmatrix} E_{\min(m,n)} & O_{\min(m,n)\times[n-\min(m,n)]} \\ O_{[m-\min(m,n)]\times\min(m,n)} & O_{[m-\min(m,n)]\times[n-\min(m,n)]} \end{bmatrix}\right)=\min(m,n)$。

由上述可知，如果设 $A=(a_{ij})_{m\times n}$，由条件(2)可得

当 $m=n$ 时，

$$f(A)=f\left(\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{m}a_{ij}E_{ij}\right)=\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{m}a_{ij}f(E_{ij})=\sum_{i=1}^{m}a_{ii}=trA.$$

当 $m<n$ 时，

$$f(A)=f\left(\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{m}a_{ij}E_{ij}+\sum_{j=m+1}^{n}\sum_{i=1}^{m}a_{ij}O_{ij}\right)$$
$$=\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}a_{ij}f(E_{ij})+\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=n+1}^{m}a_{ij}f(O_{ij})=\sum_{i=1}^{m}a_{ii}+0=trA;$$

当 $m>n$ 时，

$$f(A)=f\left(\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}a_{ij}E_{ij}+\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=n+1}^{m}a_{ij}O_{ij}\right)$$
$$=\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}a_{ij}f(E_{ij})+\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=n+1}^{m}a_{ij}f(O_{ij})=\sum_{i=1}^{n}a_{ii}+0=trA.$$

综上可证：$f(A)=trA$ 对 $\forall A\in M_{m\times n}(F)$ 都成立。

定理 2 如果定义 $f:M_{m\times n}(F)\to F$ 是一个映射，且满足以下的条件：

1) $\forall A,B,C\in M_{m\times n}(F)$，有 $f(A\circ C+B\circ C)=f(A\circ C)+f(B\circ C)$；

2) $\forall A,B\in M_{m\times n}(F)$，数 $k\in F$，有 $f(kA\circ B)=kf(A\circ B)$；

3) $\forall A,B\in M_{m\times n}(F)$、$\forall D\in M_{n\times m}(F)$，有 $f[(A\circ B)D]=f[D(A\circ B)]$；

4) $f\left(A\circ\begin{bmatrix} E_{\min(m,n)} & O_{\min(m,n)\times[n-\min(m,n)]} \\ O_{[m-\min(m,n)]\times\min(m,n)} & O_{[m-\min(m,n)]\times[n-\min(m,n)]} \end{bmatrix}\right)=\sum_{i=1}^{\min(m,n)}a_{ii}$；

则 $f(A\circ B)=tr(A\circ B)$ 对 $\forall A,B\in M_{m\times n}(F)$ 都成立。

证明： 设 E_{ij} 为 $\min(m,n)$ 阶的基础矩阵，O_{ij} 为 $\min(m,n)\times[n-\min(m,n)]$ 阶或 $[m-\min(m,n)]\times\min(m,n)$ 阶零矩阵，由条件(3)知：$f(E_{ii})=f(E_{ij}E_{ji})=f(E_{ji}E_{ij})=f(E_{jj})$，所以 $f(E_{ii})=1$。

另一方面，当 $i\neq j$，$E_{ij}=E_{ik}E_{kj}$，则 $f(E_{ik}E_{kj})=f(E_{ki}E_{jk})=f(0)=0$。

又由条件(1)和条件(4)知：

当 $m=n$ 时，

$$
\begin{aligned}
& f\left(A\circ\begin{bmatrix} E_{\min(m,n)} & O_{\min(m,n)\times[n-\min(m,n)]} \\ O_{[m-\min(m,n)]\times\min(m,n)} & O_{[m-\min(m,n)]\times[n-\min(m,n)]} \end{bmatrix}\right) \\
&= f\left(A\circ E_m\right) = f\left(A\circ E_{11}+A\circ E_{22}+\cdots+A\circ E_{mm}\right) \\
&= f\left(A\circ E_{11}\right)+f\left(A\circ E_{22}\right)+\cdots+f\left(A\circ E_{mm}\right)=\sum_{i=1}^{m}a_{ii}.
\end{aligned}
$$

当 $m<n$ 时，

$$
\begin{aligned}
& f\left(A\circ\begin{bmatrix} E_{\min(m,n)} & O_{\min(m,n)\times[n-\min(m,n)]} \\ O_{[m-\min(m,n)]\times\min(m,n)} & O_{[m-\min(m,n)]\times[n-\min(m,n)]} \end{bmatrix}\right) \\
&= f\left(A\circ\left[E_m,O_{m\times(n-m)}\right]\right)= f\left(A\circ\left[E_{11},O_{m\times(n-m)}\right]+A\circ\left[E_{22},O_{m\times(n-m)}\right]+\cdots+A\circ\left[E_{mm},O_{m\times(n-m)}\right]\right) \\
&= f\left(A\circ\left[E_{11},O_{m\times(n-m)}\right]\right)+f\left(A\circ\left[E_{22},O_{m\times(n-m)}\right]\right)+\cdots+f\left(A\circ\left[E_{mm},O_{m\times(n-m)}\right]\right)=\sum_{i=1}^{m}a_{ii}.
\end{aligned}
$$

当 $m>n$ 时，

$$
\begin{aligned}
& f\left(A\circ\begin{bmatrix} E_{\min(m,n)} & O_{\min(m,n)\times[n-\min(m,n)]} \\ O_{[m-\min(m,n)]\times\min(m,n)} & O_{[m-\min(m,n)]\times[n-\min(m,n)]} \end{bmatrix}\right) \\
&= f\left(A\circ\begin{bmatrix} E_n \\ O_{(m-n)\times n}\end{bmatrix}\right)= f\left(A\circ\begin{bmatrix} E_{11} \\ O_{(m-n)\times n}\end{bmatrix}+A\circ\begin{bmatrix} E_{22} \\ O_{(m-n)\times n}\end{bmatrix}+\cdots+A\circ\begin{bmatrix} E_{nn} \\ O_{(m-n)\times n}\end{bmatrix}\right) \\
&= f\left(A\circ\begin{bmatrix} E_{11} \\ O_{(m-n)\times n}\end{bmatrix}\right)+f\left(A\circ\begin{bmatrix} E_{22} \\ O_{(m-n)\times n}\end{bmatrix}\right)+\cdots+f\left(A\circ\begin{bmatrix} E_{nn} \\ O_{(m-n)\times n}\end{bmatrix}\right)=\sum_{i=1}^{n}a_{ii}.
\end{aligned}
$$

综上可得：$f\left(A\circ\begin{bmatrix} E_{\min(m,n)} & O_{\min(m,n)\times[n-\min(m,n)]} \\ O_{[m-\min(m,n)]\times\min(m,n)} & O_{[m-\min(m,n)]\times[n-\min(m,n)]} \end{bmatrix}\right)=\sum_{i=1}^{\min(m,n)}\sum_{j=1}^{\min(s,t)}b_{jj}a_{ii}$。

由上述可知，如果设 $A=\left(a_{ij}\right)_{m\times n}$，$B=\left(b_{ij}\right)_{m\times n}$，由条件(2)可得

当 $m=n$ 时，

$$
\begin{aligned}
f\left(A\circ B\right) &= f\left(\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{m}a_{ij}b_{ij}E_{ij}\right)=\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{m}a_{ij}b_{ij}f\left(E_{ij}\right) \\
&= \sum_{i=1}^{m}a_{ii}b_{ii}=tr\left(A\circ B\right).
\end{aligned}
$$

当 $m<n$ 时，

$$
\begin{aligned}
f\left(A\circ B\right) &= f\left(\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{m}a_{ij}b_{ij}E_{ij}+\sum_{j=m+1}^{n}\sum_{i=1}^{m}a_{ij}b_{ij}O_{ij}\right) \\
&= \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}a_{ij}b_{ij}f\left(E_{ij}\right)+\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=n+1}^{m}a_{ij}b_{ij}f\left(O_{ij}\right) \\
&= \sum_{i=1}^{m}a_{ii}b_{ii}+0=tr\left(A\circ B\right);
\end{aligned}
$$

当 $m>n$ 时，

$$\begin{aligned} f(A\circ B) &= f\left(\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}a_{ij}b_{ij}E_{ij}+\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=n+1}^{m}a_{ij}b_{ij}O_{ij}\right) \\ &= \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}a_{ij}b_{ij}f(E_{ij})+\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=n+1}^{m}a_{ij}b_{ij}f(O_{ij}) \\ &= \sum_{i=1}^{n}a_{ii}b_{ii}+0=tr(A\circ B). \end{aligned}$$

综上可证： $f(A\circ B)=tr(A\circ B)$ 对 $\forall A,B\in M_{m\times n}(F)$ 都成立。

定理 3 如果定义 $f:M_{m\times n}(F)\to F$ 是一个映射，且满足以下的条件：

1) $\forall A\in M_{m\times n}(F)$， $B,C\in M_{s\times t}(F)$，有 $f(A\otimes_R B+A\otimes_R C)=f(A\otimes_R B)+f(A\otimes_R B)$；

2) $\forall A\in M_{m\times n}(F)$， $B\in M_{s\times t}(F)$，数 $k\in F$，有 $f(kA\otimes_L B)=kf(A\otimes_L B)$；

3) $\forall A\in M_{m\times n}(F)$， $B\in M_{s\times t}(F)$， $\forall D\in M_{nt\times ms}(F)$，有 $f[(A\otimes_L B)D]=f[D(A\otimes_L B)]$；

4) $f\left((A\otimes_L B)\begin{bmatrix} E_{\min(ms,nt)} & O_{\min(ms,nt)\times[nt-\min(ms,nt)]} \\ O_{[ms-\min(ms,nt)]\times\min(ms,nt)} & O_{[ms-\min(ms,nt)]\times[nt-\min(ms,nt)]} \end{bmatrix}\right)=\sum_{i=1}^{\min(m,n)}\sum_{j=1}^{\min(s,t)}b_{jj}a_{ii}$；

则 $f(A\otimes_L B)=tr(A\otimes_L B)$ 对 $\forall A\in M_{m\times n}(F)$， $B\in M_{s\times t}(F)$ 都成立。

证明过程可以类比定理 1 和定理 2 推出，由于过程较为繁琐，所以在此省略。

推论如果定义 $f:M_{m\times n}(F)\to F$ 是一个映射，且满足以下的条件：

1) $\forall A\in M_{m\times n}(F)$， $B,C\in M_{s\times t}(F)$，有 $f(A_R\otimes B+A_R\otimes C)=f(A_R\otimes B)+f(A_R\otimes C)$；

2) $\forall A\in M_{m\times n}(F)$， $B\in M_{s\times t}(F)$，数 $k\in F$，有 $f(kA_R\otimes B)=kf(A_R\otimes B)$；

3) $\forall A\in M_{m\times n}(F)$， $B\in M_{s\times t}(F)$， $\forall D\in M_{nt\times ms}(F)$，有 $f[(A_R\otimes B)D]=f[D(A_R\otimes B)]$；

4) $f\left((A_R\otimes B)\begin{bmatrix} E_{\min(ms,nt)} & O_{\min(ms,nt)\times[nt-\min(ms,nt)]} \\ O_{[ms-\min(ms,nt)]\times\min(ms,nt)} & O_{[ms-\min(ms,nt)]\times[nt-\min(ms,nt)]} \end{bmatrix}\right)=\sum_{j=1}^{\min(s,t)}\sum_{i=1}^{\min(m,n)}a_{ii}b_{jj}$；

则 $f(A_R\otimes B)=tr(A_R\otimes B)$ 对 $\forall A\in M_{m\times n}(F)$， $B\in M_{s\times t}(F)$ 都成立。

4. 小结

通过研究将矩阵广义迹与映射这两种概念联系起来，说明很多概念之间是有联系的。在这篇文章中主要结合矩阵的基本运算，在方阵与映射关系的基础上，研究了一般矩阵的广义迹和特殊矩阵 Hadamard 积以及 Kronecker 积的广义迹与映射之间的关系。矩阵的广义迹可能与其它内容也是有联系的，有待于以后继续去发现。

基金项目

国家自然科学基金项目(12161086)。

参考文献

[1] 杨楠，刘兴祥，岳育英. m × n 矩阵 k 次广义迹[J]. 河南科学, 2012, 30(2): 149-152.

[2] 刘兴祥，李姣，朱磊，等. 矩阵的两种特殊运算的广义迹及拉伸运算的关系[J]. 河南科学, 2014, 32(1): 7-11.

[3] 张禾瑞，郝鈵新. 高等代数[M]. 北京：高等教育出版社, 2007.

[4] 辛轶. 矩阵广义迹[J]. 宁德师专学报(自然科学版), 2007, 19(1): 4-6.