Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, 2021, 10(11), 3668-3672
Published Online November 2021 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2021.1011388

Hans汉斯

代数曲面对应多项式的质公因子存在性研究

张　敬，宋文建，崔利宏

辽宁师范大学，辽宁 大连

收稿日期：2021年10月5日；录用日期：2021年10月26日；发布日期：2021年11月8日

摘　要

Bezout定理在证明二元插值适定结点组构造方法时起到了重要的作用，但不能直接简单推广至三维空间，该文针对这个问题以平面中的相关理论为参照，以代数曲面与多项式相关理论为基础，对何时代数曲面对应多项式有质公因子进行了研究，给出了判断空间代数曲面对应多项式是否有质公因子的一种方法。

关键词

代数曲面，多项式，不可约公因子，结式

Research on Existence of Common Prime Factors of Polynomial Corresponding to Algebraic Surface

Jing Zhang, Wenjian Song, Lihong Cui

Liaoning Normal University, Dalian Liaoning

Received: Oct. 5th, 2021; accepted: Oct. 26th, 2021; published: Nov. 8th, 2021

Abstract

Bezout's theorem plays an important role in proving the constructive methods of properly posed set of nodes for binary interpolation, but it cannot be directly extended to three-dimensional space. In order to address this problem, this paper investigated relevant theories on the plane, explored relevant theories of algebraic surfaces and polynomials to explain the instances during which polynomial corresponding to algebraic surface can have common prime factors, and proposed a method to judge whether the polynomial corresponding to algebraic surface has common prime factors.

文章引用：张敬，宋文建，崔利宏．代数曲面对应多项式的质公因子存在性研究[J]．应用数学进展，2021，10(11): 3668-3672. DOI: 10.12677/aam.2021.1011388

Keywords

Algebraic Surface, Polynomial, Irreducible Common Factor, Resultant

1. 引言

插值问题是计算数学研究中的一个重要问题，如今一元多项式插值理论日渐成熟，但仅有一元多项式的插值理论是不够的，在实际生活中许多时候会碰到多元插值的问题，比如在计算机辅助几何设计中就涉及许多的多元多项式插值问题。遗憾的是多元多项式插值理论并不能由一元多项式插值理论进行直接地推广，甚至插值结点选取不好都会导致插值问题无解，即构成不适定插值问题[1]，这点与一元多项式插值有很大的不同，也导致如何选取多元多项式插值的插值结点成为多元多项式插值理论的重要部分[2]。

在选取多元多项式插值的插值结点相关理论中，Bezout 定理发挥了重要的作用，其给出了平面上的代数曲线对应的多项式有质公因子的判定方法[3]，用它可以证明许多在平面构造适定结点组的方法[4] [5] [6]，但目前三维空间代数曲面对应多项式何时有质公因子的相关研究还不够多，该文给出了一种判断三维空间代数曲面对应多项式是否有质公因子的判定方法。

2. 基本定义以及定理

本文主要研究空间 $\mathbb{R}^3$ 上的无重复分量代数曲面所对应的多项式是否存在质公因子的问题，为此引入以下概念与定理。

定义 1：(三维空间的代数曲面)

若 $p(x,y,z)$ 是一个三元 n 次多项式，则把 $\mathbb{R}^3$ 上所有满足方程

$$p(x,y,z)=0$$

的点所构成的集合，即 $\{(x,y,z)|P(x,y,z)=0\}$，称为与 $p(x,y,z)=0$ 相应的 n 次代数曲面，并且将其简称为 n 次代数曲面 $p(x,y,z)$。

定义 2：(数域 *P* 上多元多项式的整除)

设 $p_1(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 与 $p_2(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 是数域 P 上的两个 n 元多项式，若存在数域 P 上的 n 元多项式 $h(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 使得 $p_1(x_1,x_2,\cdots,x_n)=h(x_1,x_2,\cdots,x_n)p_2(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，则称 $p_2(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 整除 $p_1(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，记作 $p_2(x_1,x_2,\cdots,x_n)|p_1(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，否则称 $p_2(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 不整除 $p_1(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，记作 $p_2(x_1,x_2,\cdots,x_n)\nmid p_1(x_1,x_2,\cdots,x_n)$。

定义 3：(数域 *P* 上三元多项式的可约性)

如果数域 P 上次数≥1 的三元 n 次多项式 $p(x,y,z)$ 可以写作两个次数大于等于 1 的实系数多项式的乘积，则称多项式 $p(x,y,z)$ 是可约的，同时也称 n 次代数曲面 $p(x,y,z)$ 是可约的，否则则称多项式 $p(x,y,z)$ 是不可约的，同时称 n 次代数曲面 $p(x,y,z)$ 是不可约的。

定义 4：(质因子，不可约因子)

给定三元 n 次多项式 $p(x,y,z)$，若 $q(x,y,z)$ 是 $p(x,y,z)$ 的因子，且满足 $q(x,y,z)$ 不可约，则称

$q(x,y,z)$ 是 $p(x,y,z)$ 的质因子，也称 $q(x,y,z)$ 是 $p(x,y,z)$ 的不可约因子。值得注意的是，由可约性定义可知，零多项式与零次多项式不会构成质因子。

定义 5：(无重复分量代数曲面)

给定 n 次代数曲面 $p(x,y,z)$，如果多项式 $p(x,y,z)$ 的分解式中没有重数大于等于 2 的重因子，则称 n 次代数曲面 $p(x,y,z)$ 是无重复分量代数曲面，我们主要研究无重复分量代数曲面。

定理 1：(多元多项式整除性质)

设在 $P[x,y,z]$ 中 $p(x,y,z)$ 不可约，且对 $g(x,y,z)$ 和 $h(x,y,z)$ 有 $p(x,y,z)\mid g(x,y,z)h(x,y,z)$，则 $p(x,y,z)\mid g(x,y,z)$ 或 $p(x,y,z)\mid h(x,y,z)$。该定理的证明可以参见文献[7]。

定理 2：(Bezout 定理)

若 m 次代数曲线 $p_1(x,y)$ 和 n 次代数曲线 $p_2(x,y)$ 交点个数多于 mn，则一定有次数既不超过 m 也不超过 n 的非零次多项式 $q(x,y)$ 存在，使得

$$p_1(x,y)=q(x,y)\gamma_1(x,y)$$

$$p_2(x,y)=q(x,y)\gamma_2(x,y)$$

式中，$\gamma_1(x,y)$，$\gamma_2(x,y)$ 分别为次数小于 m 和 n 的二元实系数多项式。其证明过程可参见文献[8]，由证明过程可知一定存在 $p_1(x,y)$ 的质因子 $q(x,y)$ 满足定理条件。

定理 3 的引理：(三维空间无重复分量代数曲面对应的多项式性质)

给定三元 n 次无重复分量代数曲面 $p_1(x,y,z)$，与三元 m 次无重复分量代数曲面 $p_2(x,y,z)$ 与多项式 $h(x,y,z)$，若其满足 $p_1(x,y,z)\mid h(x,y,z)p_2(x,y,z)$ 且 $p_1(x,y,z)\nmid h(x,y,z)$，则 $p_1(x,y,z)$ 存在质因子 $q(x,y,z)$ 满足 $q(x,y,z)\mid p_2(x,y,z)$，即存在 $\gamma_2(x,y,z)$ 满足 $q(x,y,z)\gamma_2(x,y,z)=p_2(x,y,z)$。

定理 3：(三维空间无重复分量代数曲面对应的多项式存在质公因子的判定定理)

给定 $\mathbb{R}^3$ 上的三元 n 次无重复分量代数曲面 $p_1(x,y,z)$ 与三元 m 次无重复分量代数曲面 $p_2(x,y,z)$，其中

$$p_1(x,y,z)=a_0(x,y)+a_1(x,y)z+\cdots+a_n(x,y)z^n$$

$$p_2(x,y,z)=b_0(x,y)+b_1(x,y)z+\cdots+b_m(x,y)z^m$$

若 $p_1(x,y,z)$ 与 $p_2(x,y,z)$ 关于 z 的结式为 0，则必有 $p_1(x,y,z)$ 的一个次数既不超过 m 也不超过 n 的质因子 $q(x,y,z)$ 满足

$$p_1(x,y,z)=q(x,y,z)\gamma_1(x,y,z)$$

$$p_2(x,y,z)=q(x,y,z)\gamma_2(x,y,z)$$

式子中的 $\gamma_1(x,y,z)$，$\gamma_2(x,y,z)$ 分别为次数小于 n 和 m 的三元实系数多项式。

3. 引理与判定定理的证明

引理的证明：

证明：以下将 $p_1(x,y,z)$ 简记为 p_1，$p_2(x,y,z)$ 简记为 p_2，$h(x,y,z)$ 简记为 h。

若 p_1 不可约，由于 $p_1\nmid h$，所以由定理 1 可知 $p_1\mid p_2$，p_1 即是所求的质因子。

若 p_1 可约，且由于 p_1 所对应的曲面是无重复分量代数曲面，所以 $p_1=q_1q_2\cdots q_k$，其中 $q_i\,(i=1,2,\cdots,k)$ 为不可约多项式，现证明 $q_1,q_2,\cdots,q_k$ 不全整除 h。

如果 $q_1 \nmid h$，则找到不整除 h 的 $q_1, q_2, \cdots, q_k$ 中的多项式。

若 $q_1 \mid h$，则存在 g_1 满足 $h = q_1 g_1$。

如果 $q_2 \nmid h$，则找到不整除 h 的 $q_1, q_2, \cdots, q_k$ 中的多项式。

若 $q_2 \mid h$，则 $q_2 \mid q_1 g_1$，若 $q_2 \mid q_1$，则或与 p_1 对应代数曲面是无重复分量代数曲面相矛盾，或与 q_1 不可约矛盾，从而 $q_2 \nmid q_1$，由于 q_2 为不可约多项式，且 $q_2 \mid q_1 g_1$，所以 $q_2 \mid g_1$，从而存在 g_2 满足 $h = q_1 q_2 g_2$。

如果 $q_3 \nmid h$，则找到不整除 h 的 $q_1, q_2, \cdots, q_k$ 中的多项式。

若 $q_3 \mid h$，则 $q_3 \mid q_1 q_2 g_2$，若 $q_3 \mid q_1 q_2$，则或与 p_1 对应代数曲面是无重复分量代数曲面相矛盾，或与 q_1, q_2 都不可约矛盾，从而 $q_3 \nmid q_1 q_2$，由于 q_3 为不可约多项式，所以存在 g_3 满足 $h = q_1 q_2 q_3 g_3$。

…

这样一直进行下去，则要么找到不整除 h 的 $q_1, q_2, \cdots, q_k$ 中的多项式，要么一直进行，直到讨论 q_k 是否整除 h，此时 $q_k \nmid h$，这是由于若 $q_k \mid h$，则 $q_k \mid q_1 q_2 q_3 \cdots q_{k-1} g_{k-1}$，此时若 $q_k \mid q_1 q_2 q_3 \cdots q_{k-1}$，则或与 p_1 对应代数曲面是无重复分量代数曲面相矛盾，或与 $q_1, q_2, \cdots, q_k$ 都不可约矛盾，由此可知 $q_k \mid g_{k-1}$，所以存在 g_k 满足 $g_{k-1} = q_k g_k$，由此 $h = q_1 q_2 q_3 \cdots q_k g_k$，即 $h = p_1 g_k$，这与已知的 $p_1 \nmid h$ 相矛盾，从而 $q_k \nmid h$。

由上可知存在 $q_i \in \{q_1, q_2, \cdots, q_k\}$ 满足 $q_i \nmid h$，又因为 $p_1 \mid hp_2$ 即 $q_1 q_2 \cdots q_k \mid hp_2$ 从而得到 $q_i \mid hp_2$，因为 q_i 是不可约因子，且由此可知 $q_i \mid p_2$。

综上所述，无论 p_1 是否可约，都能找到一个质因子 q_i，满足 $q_i \mid p_2$，即存在 γ_2 满足 $q_i \gamma_2 = p_2$，证毕。

判定定理的证明：

证明：由于 $p_1(x,y,z)$ 与 $p_2(x,y,z)$ 关于 z 的结式：

$$S(x,y) = \begin{vmatrix} a_0(x,y) & a_1(x,y) & a_2(x,y) & \cdots & a_n(x,y) & & & \\ & a_0(x,y) & a_1(x,y) & a_2(x,y) & \cdots & a_n(x,y) & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & & \ddots & \\ & & & a_0(x,y) & a_1(x,y) & a_2(x,y) & \cdots & a_n(x,y) \\ b_0(x,y) & b_1(x,y) & b_2(x,y) & \cdots & b_m(x,y) & & & \\ & b_0(x,y) & b_1(x,y) & b_2(x,y) & \cdots & b_m(x,y) & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & & \ddots & \\ & & & b_0(x,y) & b_1(x,y) & b_2(x,y) & \cdots & b_m(x,y) \end{vmatrix} = 0$$

所以其各行关于 x 和 y 的所有有理分式所做成的域是线性相关的，由线性相关的定义可以知道，存在 $n+m$ 个不全为零的有理分式 $\alpha_1(x,y)$，$\alpha_2(x,y)$，$\alpha_3(x,y)$，…，$\alpha_m(x,y)$，$-\beta_1(x,y)$，$-\beta_2(x,y)$，$-\beta_3(x,y)$，…，$-\beta_n(x,y)$，其满足分别乘结式对应行列式的第 1 到第 $n+m$ 行后再相加为零向量。将 $a_i(x,y)$ 简记为 a_i，其中 $i = 1,2,3,n$，$b_j(x,y)$ 简记为 b_j，其中 $j = 1,2,3,m$，可以得到

$$\begin{cases} p_1 = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_n z^n \\ zp_1 = a_0 z + a_1 z^2 + \cdots + a_{n-1} z^n + a_n z^{n+1} \\ \qquad \vdots \\ z^{m-1} p_1 = a_0 z^{m-1} + a_1 z^m + \cdots + a_m z^{n+m-1} \\ p_2 = b_0 + b_1 z + b_2 z^2 + \cdots + b_n z^m \\ zp_2 = b_0 z + b_1 z^2 + \cdots + b_{n-1} y^m + b_n z^{m+1} \\ \qquad \vdots \\ z^{n-1} p_2 = b_0 z^{n-1} + b_1 z^n + \cdots + b_n z^{n+m-1} \end{cases} \tag{1}$$

将(1)式的第 1 行，第 2 行一直到第 $n+m$ 行分别乘 $\alpha_1(x,y)$，$\alpha_2(x,y)$，$\alpha_3(x,y)$，…，$\alpha_m(x,y)$，$-\beta_1(x,y)$，

$-\beta_2(x,y)$，$-\beta_3(x,y)$，$\cdots$，$-\beta_n(x,y)$后再相加后得到

$$\left(\alpha_1+\alpha_2 z+\alpha_3 z^2+\cdots+\alpha_m z^{m-1}\right)p_1 \equiv \left(\beta_1+\beta_2 z+\beta_3 z^2+\cdots+\beta_m z^{n-1}\right)p_2 \tag{2}$$

记

$$\varphi(x,y,z)=\alpha_1(x,y)+\alpha_2(x,y)z+\alpha_3(x,y)z^2+\cdots+\alpha_m(x,y)z^{m-1} \tag{3}$$

$$\psi(x,y,z)=\beta_1(x,y)+\beta_2(x,y)z+\beta_3(x,y)z^2+\cdots+\beta_m(x,y)z^{n-1} \tag{4}$$

设$H(x,y)$是$n+m$个不全为零的有理分式$\alpha_1(x,y)$，$\alpha_2(x,y)$，$\alpha_3(x,y)$，$\cdots$，$\alpha_m(x,y)$，$-\beta_1(x,y)$，$-\beta_2(x,y)$，$-\beta_3(x,y)$，$\cdots$，$-\beta_n(x,y)$的公分母，则将(3)、(4)代入(2)后，(2)式等号两边同时乘$H(x,y)$后即可去掉$\varphi(x,y,z)$与$\psi(x,y,z)$中的分母，使其变为多项式，进一步得到

$$H(x,y)\varphi(x,y,z)p_1(x,y,z)=H(x,y)\psi(x,y,z)p_2(x,y,z) \tag{5}$$

由(5)式可知$p_1(x,y,z)\mid H(x,y)\psi(x,y,z)p_2(x,y,z)$，由于$p_1(x,y,z)$关于$z$的次数为$n$，$H(x,y)\psi(x,y,z)$关于 z 的次数为$n-1$，所以$p_1(x,y,z)\nmid H(x,y)\psi(x,y,z)$，由引理可知$p_1(x,y,z)$存在一个不可约因子$q(x,y,z)$，其满足$q(x,y,z)\mid p_2(x,y,z)$，所以存在多项式$\gamma_1(x,y,z)$，$\gamma_2(x,y,z)$，其次数分别小于 n 和 m，且满足

$$p_1(x,y,z)=q(x,y,z)\gamma_1(x,y,z)$$

$$p_2(x,y,z)=q(x,y,z)\gamma_2(x,y,z)$$

证毕。

致　谢

该论文之所以能够完成，首先要感谢我的导师崔利宏教授，有了导师的指点才有了这篇论文基本的方向，也感谢导师在课下对我和宋文建的耐心指导，对于我们研究了很久还是不懂的问题，老师总是耐心给予解答。导师生动易懂的讲解与严谨求实的研究精神对我产生了很大的影响。在此，我向我的导师表达深深的谢意。同时也非常感谢评审的各位专家在百忙之中审阅并提出重要意见，我在此表示衷心的感谢！

参考文献

[1] 崔利宏. 多元 Lagrange 插值与 Kergin 插值[M]. 大连: 辽宁师范大学出版社, 2018: 6-7.

[2] 梁学章. 关于多元函数的插值与逼近[D]: [硕士学位论文]. 长春: 吉林大学, 1965.

[3] 余震果, 李丽, 李婷, 崔利宏. 关于多元插值适定性问题研究[J]. 吉林师范大学学报(自然科学版), 2011(2): 17-25

[4] 梁学章. 关于多元函数的插值与逼近[J]. 高等学校计算数学学报, 1979(1): 123-124

[5] De Boor, C. and Ron, A. (1990) On Multivariate Polynomial Interpolation. *Constructive Approximation*, **6**, 287-302. https://doi.org/10.1007/BF01890412

[6] Liang, X.Z., Wang, R.H., Cui, L.H., *et al.* (2006) Some Researches on Trivariate Lagrange Interpolation. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, **195**, 192-205. https://doi.org/10.1016/j.cam.2005.03.083

[7] 樊凯. 关于多元多项式可除性的讨论[J]. 武汉教育学院学报, 1997, 27(1): 1-8.

[8] 梁学章, 李强. 多元逼近[M]. 北京: 国防工业出版社, 2005: 22-24.