**Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, 2021, 10(11), 3962-3968**
Published Online November 2021 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2021.1011421

# $G$ 与 $K_2$ 的联图的局部反魔幻着色数

**杨 雪**[1*]，**边 红**[1†]，**于海征**[2]

[1]新疆师范大学，数学科学学院，新疆 乌鲁木齐
[2]新疆大学，数学与信息科学学院，新疆 乌鲁木齐

收稿日期：2021年10月23日；录用日期：2021年11月13日；发布日期：2021年11月24日

## 摘 要

令 $G = (V, E)$ 是具有 $n$ 个点、$m$ 条边的连通简单图。称图 $G$ 是局部反魔幻的，则 $G$ 有一个局部反魔幻标号。图 $G$ 的局部反魔幻标号是一个双射 $f : E \to \{1, 2, \cdots, m\}$，使得对图 $G$ 的任意两个相邻的顶点 $u$ 和 $v$ 都有$\omega(u) \neq \omega(v)$，其中 $\omega(u) = \sum_{e\in E(u)} f(e)$，$E(u)$ 是与点 $u$ 相关联的边的集合。若对图 $G$ 的点 $v$ 着颜色 $\omega(v)$，明显得出 $G$ 的任一个局部反魔幻标号导出图 $G$ 的一个正常点着色。图 $G$ 的局部反魔幻着色数是其局部反魔幻标号中所用的最少颜色数，记为 $\chi_{la}(G)$。给定两个点不交的图 $G$ 和 $H$，图 $G$ 和 $H$的联图，记为 $G \vee H$，是在图 $G$ 和 $H$ 的基础上，再将 $G$ 的每一个点与 $H$ 的每一个点相连而得到的图。本文给出了路 $P_n$，圈 $C_n$，星图 $S_n$以及友谊图 $F_n$与完全图 $K_2$ 的联图的局部反魔幻着色数的确切值。

## 关键词

局部反魔幻标号，局部反魔幻着色数，联图

# The Local Antimagic Chromatic Number of the Join Graphs $G \vee K_2$

**Xue Yang**[1*], **Hong Bian**[1†], **Haizheng Yu**[2]

[1]School of Mathematical Sciences, Xinjiang Normal University, Urumqi Xinjiang

* 第一作者。
† 通讯作者。

文章引用: 杨雪, 边红, 于海征. $G$ 与 $K_2$ 的联图的局部反魔幻着色数[J]. 应用数学进展, 2021, 10(11): 3962-3968.
DOI: 10.12677/aam.2021.1011421

[2]College of Mathematics and System Sciences, Xinjiang University, Urumqi Xinjiang

Received: Oct. $23^{rd}$, 2021; accepted: Nov. $13^{th}$, 2021; published: Nov. $24^{th}$, 2021


## Abstract

**Let $G = (V, E)$ be a connected simple graph with $|V| = n$ and $|E| = m$. A graph $G$ is called local antimagic if $G$ has a local antimagic labeling. A bijection $f : E \to \{1, 2, \cdots, m\}$ is called local antimagic labeling if for any two adjacent vertices $u$ and $v$, we have $\omega(u) \neq \omega(v)$, where $\omega(u) = \sum_{e\in E(u)} f(e)$, and $E(u)$ is the set of edges incident to $u$. Thus any local antimagic labeling induces a proper vertex coloring of $G$, where the vertex $v$ is assigned the color $\omega(v)$. The local antimagic chromatic number, denoted by $\chi_{la}(G)$, is the minimum number of colors taken over all colorings induced by local antimagic labeling of $G$. Let $G$ and $H$ be two vertex disjoint graphs. The join graph of $G$ and $H$, denoted by $G \vee H$, is the graph whose vertex set is $V(G) \cup V(H)$ and its edge set equals $E(G) \cup E(H) \cup \{ab : a \in V(G)$ and $b \in V(H)\}$. In this paper, we give the exact value of the local antimagic chromatic number of the join graph $G \vee K_2$, when $G$ is paths $P_n$, cycles $C_n$, the stars $S_n$, the friendship graphs $F_n$, respectively.**



## Keywords

**Local Antimagic Labeling, Local Antimagic Chromatic Number, Join Graphs**




## 1. 介绍

令 $G = (V, E)$ 是具有 $n$ 个点、$m$ 条边的连通简单图. 在 1990 年, Hartsfield 和 Ringel [1]首次提出图的反魔幻标号的定义, 并提出“一个图 $G$ 称为反魔幻的, 如果图 $G$ 有一个反魔幻标号.”称一个双射 $f : E(G) \to \{1, 2, \cdots, m\}$ 为图 $G$ 的反魔幻标号, 如果 $f$ 满足对于图 $G$ 的任意两个顶点 $u$ 和 $v$ 都有 $\omega(u) \neq \omega(v)$, 其中 $\omega(u) = \sum_{e\in E(u)} f(e)$, $E(u)$ 是与顶点 $u$ 相关联的边的集合.

2017 年, Arumugam 等人 [2]和 Bensmail 等人 [3]基于反魔幻的定义分别独立地提出了一

个比反魔幻标号相对较弱的定义: 局部反魔幻标号. 图 $G$ 的局部反魔幻标号是一个双射 $f$ : $E \to \{1, 2, \cdots, m\}$, 使得对图 $G$ 的任意两个相邻的顶点 $u$ 和 $v$ 都有 $\omega(u) \neq \omega(v)$, 其中 $\omega(u) = \sum_{e\in E(u)} f(e)$, $E(u)$ 是与点 $u$ 相关联的边的集合. 若对图 $G$ 的点 $v$ 着颜色 $\omega(v)$, 显然图 $G$ 的任一个局部反魔幻标号自然地导出图 $G$ 的一个正常点着色. 称图 $G$ 是局部反魔幻的, 则 $G$ 有一个局部反魔幻标号. 同时 Arumugam 等人在文献 [2]中提出了局部反魔幻着色数的定义: 图 $G$ 的局部反魔幻着色数是其局部反魔幻标号中所使用的最少颜色数, 记为 $\chi_{la}(G)$.

给定两个点不交的图 $G$ 和 $H$, 图 $G$ 和 $H$的联图, 记为 $G \vee H$, 是在图 $G$ 和 $H$ 的基础上, 再将 $G$ 的每一个点与 $H$ 的每一个点相连而得到的图. 一个友谊图是任意两个顶点都恰好有一个公共邻点的简单图, 记为 $F_n$, 其中 $n$ 指的是 $F_n$ 中三角形的个数. 在文献 [2]中 Arumugam 等人给出了路 $P_n$、圈 $S_n$、友谊图 $F_n$、完全二部图 $K_{2,n}$等一些特殊图类的局部反魔幻着色数的确切值, 还给出点数至少为 4 的图 $G$ 与 $\overline{K_2}$ 的联图的局部反魔幻着色数的上、下界, 其中 $\overline{K_2}$ 是 $K_2$ 的补图.

2018 年, Lau 等人给出若干图类的局部反魔幻着色数. 在文献 [4]中, 他们首次提出了文献 [2]中 Arumugam 等人关于图 $\chi_{la}(G \vee \overline{K_2})$ 的下界的一个反例, 并给出了特定条件下的图 $\chi_{la}(G \vee \overline{K_n})$ 的局部反魔幻着色数的紧的下界. Lau 等人 [4] 还解决了文献 [2]中 Arumugam 等人提出的问题 3.3 和定理 2.15, 他们还给出了任意一个完全二部图 $K_{m,n}$ 的局部反魔幻着色数的确切值. 同时他们 [5]还研究了一些与圈相关的联图的局部反魔幻着色. 2019 年, Lau 等人 [6]得出了给定悬挂边, 带有割点的图的局部反魔幻着色数的紧的下界, 并完全解决了文献 [4] 的猜想 2, 部分解决了文献 [2] 的问题 3.1.

本文研究了路 $P_n$, 圈 $C_n$, 星图 $S_n$, 以及友谊图 $F_n$与完全图 $K_2$ 的联图的局部反魔幻着色数的确切值.

## 2. 主要结果

这节给出了当图 $G$ 是路 $P_n$, 圈 $C_n$, 星图 $S_n$, 以及友谊图 $F_n$时, 与 $K_2$ 的联图的局部反魔幻着色数的确切值.

**引理 2.1** [2] 给定任一图 $G$, 则 $\chi_{la}(G) \geq \chi(G)$.

**定理 2.2** 当 $n \geq 2$ 时, $\chi_{la}(P_n \vee K_2) = 4$.

**证.** 图 $P_n \vee K_2$ 的局部反魔幻着色数的下界显然是 4. 事实上, $K_4$ 是图 $P_n \vee K_2$ 的一个点导出子图, 根据引理 2.1 我们有 $\chi_{la}(P_n \vee K_2) \geq \chi(P_n \vee K_2) = 4$. 接下来求图 $P_n \vee K_2$ 的局部反魔幻着色数的上界.

图 $P_n$ 和 $K_2$ 的点集分别记为 $\{v_i : 1 \leq i \leq n\}$ 和 $\{x, y\}$. 则图 $P_n \vee K_2$ 的边集是 $E(P_n \vee K_2) = \{xv_i, yv_i : 1 \leq i \leq n\} \cup \{v_iv_{i+1} : 1 \leq i \leq n-1\} \cup \{xy\}$. 因此图 $P_n \vee K_2$ 有 $n + 2$ 个点, $3n$ 条边. 我们对 $n$ 分两种情形讨论:

情形 1. $n$ 是奇数.

定义双射 $f_1 : E(P_n \vee K_2) \to \{1, 2, \cdots, 3n\}$, 对图 $P_n \vee K_2$的边进行如下标号:

$$f_1(v_iv_{i+1}) = \begin{cases} n - \frac{i+1}{2}, & \text{当}\, i\, \text{是奇数时}, \\ \frac{i}{2}, & \text{当}\, i\, \text{是偶数时}. \end{cases}$$
$$f_1(xv_i) = \begin{cases} \frac{3n-3}{2} + \frac{i+1}{2}, & \text{当}\, i\, \text{是奇数且}\, i \neq n\, \text{时}, \\ n - 1 + \frac{i}{2}, & \text{当}\, i\, \text{是偶数时}, \\ \frac{5n-3}{2}, & \text{当}\, i = n\, \text{时}. \end{cases}$$
$$f_1(yv_i) = \begin{cases} 3n - \frac{i+1}{2}, & \text{当}\, i\, \text{是奇数时}, \\ \frac{5n-3}{2} - \frac{i}{2}, & \text{当}\, i\, \text{是偶数时}. \end{cases}$$

再令 $f_1(xy) = 3n$. 我们可以得到

$$\omega(v_i) = \begin{cases} \frac{11n-5}{2}, & \text{当}\, i\, \text{是奇数时}, \\ \frac{9n-5}{2}, & \text{当}\, i\, \text{是偶数时}. \end{cases}$$
$$\omega(x) = \frac{3n^2+6n-1}{2},$$
$$\omega(y) = \frac{5n^2+4n+1}{2}.$$

当 $n$ 是奇数时, 局部反魔幻标号 $f_1$ 导出了图 $P_n \vee K_2$ 的一个正常点着色且使用了 4 个不同的颜色. 因此当 $n$ 是奇数时, $\chi_{la}(P_n \vee K_2) \leq 4$.

情形 2. $n$ 是偶数.

定义双射 $f_2 : E(P_n \vee K_2) \to \{1, 2, \cdots, 3n\}$, 给图 $P_n \vee K_2$的边进行如下标号:

$$f_2(v_iv_{i+1}) = \begin{cases} n - \frac{i+1}{2}, & \text{当}\, i\, \text{是奇数时}, \\ \frac{i}{2}, & \text{当}\, i\, \text{是偶数时}. \end{cases}$$
$$f_2(xv_i) = \begin{cases} \frac{3n-2}{2} + \frac{i}{2}, & \text{当}\, i\, \text{是偶数且}\, i \neq n\, \text{时}, \\ n - 1 + \frac{i+1}{2}, & \text{当}\, i\, \text{是奇数时}, \\ \frac{5n-2}{2}, & \text{当}\, i = n\, \text{时}. \end{cases}$$
$$f_2(yv_i) = \begin{cases} \frac{5n-2}{2} - \frac{i+1}{2}, & \text{当}\, i\, \text{是奇数时}, \\ 3n - \frac{i}{2}, & \text{当}\, i\, \text{是偶数时}. \end{cases}$$

再令 $f_2(xy) = 3n$. 我们可以得到

$$\omega(v_i) = \begin{cases} \frac{9n-6}{2}, & \text{当}\, i\, \text{是奇数时}, \\ \frac{11n-2}{2}, & \text{当}\, i\, \text{是偶数时}. \end{cases}$$
$$\omega(x) = \frac{3n^2+6n}{2},$$
$$\omega(y) = \frac{5n^2+4n}{2}.$$

当 $n$ 是偶数时, 局部反魔幻标号 $f_2$ 导出了图 $P_n \vee K_2$ 的一个正常点着色且使用了 4 个不同的颜色. 因此当 $n$ 是偶数时, $\chi_{la}(P_n \vee K_2) \leq 4$.

综上可知, $\chi_{la}(P_n \vee K_2) = 4$. □

接下来考虑图 $C_n \vee K_2\,(n \geq 3)$ 的局部反魔幻着色. 在文献 [5] 中, Lau 等人已经给出当 $n$ 是偶数时, 图 $C_n \vee K_2$ 的局部反魔幻着色数是 4. 我们考虑当 $n$ 是奇数时, 图 $C_n \vee K_2$ 的局部反魔幻着色数.

**定理 2.3** 当 $n$ 是奇数时, $\chi_{la}(C_n \vee K_2) = 5$.

**证.** 当 $n$ 是奇数时, 图 $C_n \vee K_2$ 的正常点着色数是 5. 根据引理 2.1 得 $\chi_{la}(C_n \vee K_2) \geq \chi(C_n \vee K_2) = 5$. 为了证明 $\chi_{la}(C_n \vee K_2) = 5$, 只需证明 $\chi_{la}(C_n \vee K_2) \leq 5$.

图 $C_n \vee K_2$ 的点集和边集分别记为

$$V(C_n \vee K_2) = \{v_i : 1 \leq i \leq n\} \cup \{x, y\},$$
$$E(C_n \vee K_2) = \{xv_i, yv_i : 1 \leq i \leq n\} \cup \{v_iv_{i+1} : 1 \leq i \leq n\}.$$

其中边 $v_nv_{n+1}$ 是边 $v_nv_1$. 定义双射 $f : E(C_n \vee K_2) \to \{1, 2, \cdots, 3n+1\}$, 对图 $C_n \vee K_2$ 的边标号如下:

$$f(xv_i) = n + i, \quad \text{当 } 1 \leq i \leq n \text{ 时},$$
$$f(yv_i) = 3n + 1 - i, \quad \text{当 } 1 \leq i \leq n \text{ 时},$$
$$f(v_iv_{i+1}) = \begin{cases} n - \frac{i-1}{2}, & \text{当 } i \text{ 是奇数时}, \\ \frac{i}{2}, & \text{当 } i \text{ 是偶数时}. \end{cases}$$

其次, 令 $f(xy) = 3n + 1$. 通过计算可得, 点 $v_1$ 所着颜色 $\omega(v_1) = \frac{11n+3}{2}$. 当 $i$ 是奇数且 $i \neq 1$ 时, 点 $v_i$ 所着颜色 $\omega(v_i) = 5n + 1$, 当 $i$ 是偶数时, 点 $v_i$ 所着颜色 $\omega(v_i) = 5n + 2$; 点 $x$ 所着颜色 $\omega(x) = \frac{3n^2+7n+2}{2}$; 点 $y$ 所着颜色 $\omega(y) = \frac{5n^2+7n+2}{2}$. 显然, 这是 5 个互异的颜色, 则 $f$ 是图 $C_n \vee K_2$ 的一个局部反魔幻标号且 $\chi_{la}(C_n \vee K_2) \leq 5$, 故 $\chi_{la}(C_n \vee K_2) = 5$, 得证. □

然后考虑图 $S_n \vee K_2 (n \geq 2)$ 的局部反魔幻着色. 可以看出图 $S_n \vee K_2$ 也是图 $C_3 \vee \overline{K_n}$. 当 $n$ 是奇数且 $n \geq 3$ 时, Lau 等人在文献 [5] 中给出 $\chi_{la}(C_3 \vee \overline{K_n}) = 4$. 下面给出当 $n$ 是偶数时, 图 $S_n \vee K_2$ 的局部反魔幻着色数.

**定理 2.4** 当 $n$ 是偶数时, $\chi_{la}(S_n \vee K_2) = 4$.

**证.** 星图 $S_n$ 和完全图 $K_2$ 的点集分别记为 $\{v, v_i : 1 \leq i \leq n\}$, $\{x, y\}$. 图 $S_n \vee K_2$ 的边集为 $E(S_n \vee K_2) = \{vv_i, xv_i, yv_i : 1 \leq i \leq n\} \cup \{vx, vy, xy\}$. 易知图 $S_n \vee K_2$ 有 $n + 3$ 个点, $3n + 3$ 条边.

首先, 求图 $S_n \vee K_2$ 的局部反魔幻着色数的下界. 由于 $K_4$ 是图 $S_n \vee K_2$ 的一个点导出子图, 则根据引理 2.1 可得 $\chi_{la}(S_n \vee K_2) \geq \chi(S_n \vee K_2) = 4$. 其次求其局部反魔幻着色数的上界. 定义双射 $f : E(S_n \vee K_2) \to \{1, 2, \cdots, 3n+3\}$, 对图 $S_n \vee K_2$ 的边 $vv_i, xv_i, yv_i$ 进行如下标号:

$$f(vv_i) = i + 1, \quad \text{当 } 1 \leq i \leq n \text{ 时},$$
$$f(xv_i) = \begin{cases} \frac{3n+4}{2} + i, & \text{当 } 1 \leq i \leq \frac{n}{2} \text{ 时}, \\ \frac{n+2}{2} + i, & \text{当 } \frac{n}{2} + 1 \leq i \leq n \text{ 时}. \end{cases}$$
$$f(yv_i) = \begin{cases} 3n + 3 - 2i, & \text{当 } 1 \leq i \leq \frac{n}{2} \text{ 时}, \\ 4n + 4 - 2i, & \text{当 } \frac{n}{2} + 1 \leq i \leq n \text{ 时}. \end{cases}$$

再对剩余的3条边进行标号: $f(vx)=1$, $f(vy)=3n+3$ 和 $f(xy)=\frac{3n+4}{2}$. 在标号 $f$ 下相应地得到图 $S_n\vee K_2$ 每个点所着颜色. 当 $1\le i\le n$ 时, 点 $v_i$ 所着颜色 $\omega(v_i)=\frac{9n+12}{2}$; 点 $v$ 所着颜色 $\omega(v)=\frac{n^2+9n+8}{2}$; 点 $x$ 所着颜色 $\omega(x)=\frac{3n^2+7n+6}{2}$; 点 $y$ 所着颜色 $\omega(y)=\frac{5n^2+14n+10}{2}$. 显然这是4个互不相同的颜色, 则 $f$ 是图 $S_n\vee K_2$ 的一个局部反魔幻标号且 $\chi_{la}(S_n\vee K_2)\le 4$, 综上可知 $\chi_{la}(S_n\vee K_2)=4$, 得证. □

最后考虑图 $F_n\vee K_2$ 的局部反魔幻着色.

**定理 2.5** 当 $n\ge 2$ 时, $\chi_{la}(F_n\vee K_2)=5$.

**证.** 友谊图 $F_n$ 和完全图 $K_2$ 的点集分别记为 $\{v_i:1\le i\le 2n+1\}$ 和 $\{x,y\}$, 其中 $v_{2n+1}$ 是图 $F_n$ 的中心点. 则图 $F_n\vee K_2$ 的边集记为 $E(F_n\vee K_2)=\{xv_i,yv_i:1\le i\le 2n+1\}\cup\{v_{2n+1}v_i:1\le i\le 2n\}\cup\{v_iv_{i+1}:1\le i\le 2n\text{ 且 } i\text{ 是奇数}\}$. 易知图 $F_n\vee K_2$ 有 $7n+3$ 条边. 定义双射 $f:E(F_n\vee K_2)\to\{1,2,\cdots,7n+3\}$, 给图 $F_n\vee K_2$ 的边进行如下标号:

$$f(v_iv_{i+1})=\tfrac{i+1}{2},\quad \text{当 } 1\le i\le 2n \text{ 且 } i \text{ 是奇数时},$$
$$f(xv_i)=\begin{cases}3n+\frac{i+1}{2}, & \text{当 } 1\le i\le 2n \text{ 且 } i \text{ 是奇数时},\\ 5n+\frac{i}{2}, & \text{当 } 1\le i\le 2n \text{ 且 } i \text{ 是偶数时}.\end{cases}$$
$$f(yv_i)=\begin{cases}5n+1-\frac{i+1}{2}, & \text{当 } 1\le i\le 2n \text{ 且 } i \text{ 是奇数时},\\ 7n+1-\frac{i}{2}, & \text{当 } 1\le i\le 2n \text{ 且 } i \text{ 是偶数时}.\end{cases}$$
$$f(v_{2n+1}v_i)=\begin{cases}2n+1-\frac{i+1}{2}, & \text{当 } 1\le i\le 2n \text{ 且 } i \text{ 是奇数时},\\ 3n+1-\frac{i}{2}, & \text{当 } 1\le i\le 2n \text{ 且 } i \text{ 是偶数时}.\end{cases}$$

再对剩余的边标号: $f(v_{2n+1}x)=7n+2$, $f(v_{2n+1}y)=7n+3$ 和 $f(xy)=7n+1$. 通过计算可知图 $F_n\vee K_2$ 每个点所着颜色. 当 $i$ 是奇数且 $i\ne 2n+1$ 时, 点 $v_i$ 所着颜色 $\omega(v_i)=10n+2$; 当 $i$ 是偶数时, 点 $v_i$ 所着颜色 $\omega(v_i)=15n+2$; 点 $v_{2n+1}$ 所着颜色 $\omega(v_{2n+1})=4n^2+15n+5$; 点 $x$ 所着颜色 $\omega(x)=9n^2+15n+3$; 点 $y$ 所着颜色 $\omega(x)=11n^2+15n+4$. 显然 $f$ 是图 $F_n\vee K_2$ 的一个局部反魔幻标号且使用了5个互异的颜色, 故 $\chi_{la}(F_n\vee K_2)\le 5$.

由于 $K_5$ 是图 $F_n\vee K_2$ 的一个点导出子图, 则根据引理2.1有 $\chi_{la}(F_n\vee K_2)\ge\chi(F_n\vee K_2)=5$. 综上可知 $\chi_{la}(F_n\vee K_2)=5$, 得证. □

以上结果可得到下面的推论. 推论的证明需用文献 [2]中的定理.

**引理 2.6** [2] 对于完全二部图 $G=K_{2,n}$, 则有

$$\chi_{la}(G)=\begin{cases}2, & \text{当 } n \text{ 是偶数且 } n\ge 4 \text{ 时}.\\ 3, & \text{当 } n \text{ 是奇数或 } n=2 \text{ 时}.\end{cases}$$

**推论 2.7** 当 $n\ge 2$ 时, 若 $\chi_{la}(G)=\chi(G)$, 则 $\chi_{la}(G\vee K_2)=\chi_{la}(G)+2$.

**证.** 由联图的定义可知图 $K_2$ 的点所着颜色互异, 且不同于图 $G$ 的点所着颜色, 则 $\chi_{la}(G\vee K_2)\ge\chi(G\vee K_2)=\chi(G)+2$. 结合引理2.6调整图 $G$ 的局部反魔幻标号使得图 $G\vee K_2$ 有一个局部反魔幻标号且使用 $\chi_{la}(G)+2$ 个颜色, 则 $\chi_{la}(G\vee K_2)\le\chi_{la}(G)+2$. 因此若 $\chi_{la}(G)=\chi(G)$,

则 $\chi_{la}(G \vee K_2) = \chi_{la}(G) + 2$. $\square$

就完全图 $K_n$ 而言, $\chi_{la}(K_n) = \chi(K_n) = n$.

**猜想 2.8** 当 $n \geq 2$ 时, 若 $\chi_{la}(G) = \chi(G)$, 则 $\chi_{la}(G \vee K_n) = \chi_{la}(G) + n$.

# 基金项目

国家自然科学基金项目(No.11761070, 61662079); 2021年新疆维吾尔自治区自然基金联合项目(2021D01C078); 2022年新疆维吾尔自治区自然基金面上项目、青年项目; 2020年新疆师范大学一流专业、一流课程项目资助。

# 参考文献

[1] Hartsfield, N. and Ringel, G. (1994) Pearls in Graph Theory. Academic Press, Inc., Boston.

[2] Arumugam, S., Premalatha, K., Bacă, M. and Semaničová-Feňovčíková, A. (2017) Local Antimagic Vertex Coloring of a Graph. *Graphs and Combinatorics*, **33**, 275-285. https://doi.org/10.1007/s00373-017-1758-7

[3] Bensmail, J., Senhaji, M. and Lyngsie, K.S. (2017) On a Combination of the 1-2-3 Conjecture and the Antimagic Labelling Conjecture. *Discrete Mathematics and Theoretical Computer Science*, **19**, 1-17.

[4] Lau, G.C., Shiu, W.C. and Ng, H.K. (2020) Affirmative Solutions on Local Antimagic Chromatic Number. *Graphs and Combinatorics*, **5**, 69-78.

[5] Lau, G.C., Shiu, W.C. and Ng, H.K. (2021) On Local Antimagic Chromatic Number of Cycle-Related Join Graphs. *Discussiones Mathematicae Graph Theory*, **41**, 133-152. https://doi.org/10.7151/dmgt.2177

[6] Lau, G.C., Shiu, W.C. and Ng, H.K. (2018) On Local Antimagic Chromatic Number of Graphs with Cut-Vertices. arXiv:1805.04801v6