Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, 2021, 10(3), 747-752
Published Online March 2021 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2021.103082

树的线图的一般染色数及其在严格距离图上的应用

王嘉琦

浙江师范大学数学系, 浙江 金华
Email: 864866745@qq.com

收稿日期：2021年2月23日；录用日期：2021年3月19日；发布日期：2021年3月26日

摘 要

线图 $L(G)$ 的一般染色数 $col_k(L(G))$ 或者 $wcol_k(L(G))$ 其实就是原图 G 的一般边染色数．我们将介绍图 G 的一般边染色数来研究线图 $L(G)$ 的一般染色数。对于树 T, 我们用这一关系给出了 $col_k(L(T))$ 和 $wcol_k(L(T))$ 的上界, 并给出了着色数 $\chi(L(T)^{[\natural p]})$ 的上界, 其中 $L(T)^{[\natural p]}$ 是线图 $L(T)$ 的严格距离-p 图.

关键词

线图，一般染色数，着色数，严格距离-p 图

The Generalized Coloring Number of Line Graph of Trees and Their Application to Exact Distance Graphs

Jiaqi Wang

Department of Mathematics, Zhejiang Normal University, Jinhua Zhejiang
Email: 864866745@qq.com

文章引用: 王嘉琦. 树的线图的一般染色数及其在严格距离图上的应用[J]. 应用数学进展, 2021, 10(3): 747-752.
DOI: 10.12677/aam.2021.103082

Received: Feb. 23rd, 2021; accepted: Mar. 19th, 2021; published: Mar. 26th, 2021

Abstract

The generalized coloring number $col_k(L(G))$ or $wcol_k(L(G))$ of a line graph $L(G)$ is just the generalized edge coloring number $col'_k(L(G))$ or $wcol'_k(L(G))$ of the original graph G. We introduce the generalized edge coloring number of graph G to study the generalized coloring number of the line graph $L(G)$. We use this relation to give the upper bound of $col_k(L(T))$ and $wcol_k(L(T))$ and then give the upper bound of $\chi(L(T)^{[\natural p]})$.

Keywords

Line Graph, Generalized Coloring Number, Chromatic Number, Exact Distance-p Graph

1. 基本概念

令 $G = (V, E)$ 是一个图. 对于图 G 的同一个连通分支中的两个点 x 和 y, x 和 y 之间的距离 $dist_G(x, y)$ 是图 G 中 x, y-路的最短长度. 点 $v \in V$ 的 k-th 开邻域 $N_G^k(v)$ 和 k-th 闭邻域 $N_G^k[v]$ 被定义为

$$N_G^k(v) = \{w \in V : dist_G(v, w) = k\}\ ,\ N_G^k[v] = \{w \in V : dist_G(v, w) \leq k\}$$

与往常一样, 我们令 $N_G(v) = N_G^1(v), N_G[v] = N_G^1[v]$ 和 $d_G(v) =| N_G(v) |$. 最后, 当图 G 在下文中被明确定义时, 我们在上面的符号中去掉 G.

对于一个图 $G = (V, E)$, 令 $\prod := \prod(G)$ 是顶点集 V 的所有全序的集合. 对于 $\sigma \in \prod(G)$ 和 $x \in V$, 令

$$(1) V_\sigma^l(x) = \{y \in V : y <_\sigma x\}, V_\sigma^l[x] = V_\sigma^l(x) + x;$$

$$(2)V_\sigma^r(x)=\{y\in V: x<_\sigma y\}, V_\sigma^r[x]=V_\sigma^r(x)+x.$$

因此 $\{V_\sigma^l(x),\{x\},V_\sigma^r(x)\}$ 把 V 分割成了 x的左集, 单独 x, 和 x的右集. 图 G 的染色数, 记作 $col(G)$, 被定义为

$$col(G)=\min_{\sigma\in\prod}\max_{x\in V}\mid N[x]\cap V_\sigma^l[x]\mid .$$

在不同的学者 [1–4] 探讨了情况 $k=2,4$ 的类似概念之后, 一般染色数在 [5] 中首先被定义. 令 $k\in Z^+\cup\{\infty\}$. 在给定边线性序 σ 的图 G 中, 令 x 和 y 是图 G 的两个顶点. 如果 $x\prec_L y$ 并且存在一条 $y-x$ 的长度最多为 k 的路 P 使得 $V(P)\subseteq V_\sigma^r[y]$, 我们称 x 是对应于 σ 从 y 弱 k- 可达 的. 此外, 如果 $V(P)\subseteq V_\sigma^r[x]+y$, 我们称 x 是对应于 σ 从 y k-可达 的. 令 $R_k(G_L,y)$ 是所有对应于 σ 从 y k-可达 的顶点集, $Q_k(G_L,y)$ 是所有对应于 σ 从 y 弱 k-可达 的顶点集, $R_k[G_L,y]=R_k(G_L,y)\cup\{y\}$, $Q_k[G_L,y]=Q_k(G_L,y)\cup\{y\}$. 定义图 G 的 弱k-染色数(记作 $wcol_k(G)$)和图 G 的 k- 染色数(记作 $col_k(G)$)为

$$wcol_k(G)=\min_{\sigma\in\prod}\max_{x\in V}\mid W_\sigma^k[x]\mid ,\ col_k(G)=\min_{\sigma\in\prod}\max_{x\in V}\mid S_\sigma^k[x]\mid .$$

接下来我们将介绍一般边染色数的概念, 这一概念与一般染色数类似. 令 $G=(V,E)$ 是一个图. 对于图 G 的同一个连通分支中的两条边 e 和 e', e 和 e'之间的距离 $dist_G(e,e')$ 是图 G 中 e 和 e'之间的最短路的长度-1. 边 e 和 e' 的 k-th 开邻域 $N_G^k(e)$ 和 k-th 闭邻域 $N_G^k[e]$ 被定义为

$$N_G^k(e)=\{e'\in E: dist_G(e,e')=k\}\ ,\ N_G^k[e]=\{e'\in E: dist_G(e,e')\le k\}$$

对于图 $G=(V,E)$, 令 $\coprod:=\coprod(G)$ 是边集 E 的所有全序的集合. 对于 $\tau\in\coprod(G)$ 和 $e\in E$, 令

$$(1)E_\tau^l(e)=\{e'\in E: e'<_\tau e\}, E_\tau^l[e]=E_\tau^l(e)+e;$$

$$(2)E_\tau^r(e)=\{e'\in E: e<_\tau e'\}, E_\tau^r[e]=E_\tau^r(e)+e.$$

因此 $\{E_\tau^l(e),\{e\},E_\tau^r(e)\}$ 把 E 分割成了 e的左集, 单独 e, 和 e 的右集. 图 G 的边染色数, 记作 $col'(G)$, 被定义为

$$col'(G)=\min_{\tau\in\coprod}\max_{e\in E}\mid N[e]\cap E_\tau^l[e]\mid .$$

令 $k\in Z^+\cup\{\infty\}$. 在给定边线性序 τ 的图 G 中, 令 e 和 e' 是图 G 的两条边. 如果 $e'\in E_\tau^l[e]$ 并且存在一条满足 $\parallel P\parallel\le k+1$ 的 e',e 路 P 使得 $E(P)\subseteq E_\tau^r[e']$, 我们称 e' 是对应于 τ 从 e 弱 k-可达 的. 此外, 如果$E(P)\subseteq E_\tau^r[e]+e'$, 我们称 x 是对应于 τ 从 y k-可达 的. 令 $W_\tau^k[e]$ 是所有对应于 τ 从 e k-可达 的边集, $S_\tau^k[e]$ 是所有对应于 τ 从 e 弱 k-可达 的边集, $W_\tau^k[e]=W_\tau^k(e)\cup\{e\}$, $S_\tau^k[e]=S_\tau^k(e)\cup\{e\}$. 定义图 G 的弱 k- 边染色数(记作 $wcol'_k(G)$)和图 G 的 k-边染色数(记作 $col'_k(G)$)为

$$wcol'_k(G)=\min_{\tau\in\coprod}\max_{e\in E}\mid W_\tau^k[e]\mid\ and\ col'_k(G)=\min_{\tau\in\coprod}\max_{e\in E}\mid S_\tau^k[e]\mid .$$

图 G 的线图 $L(G)$ 将图 G 的每条边作为一个顶点, 并且如果在 G 中两条边共用一个顶点, 那么在线图 $L(G)$ 中, 在图 G 中的那两条边所对应的图 $L(G)$ 的两个顶点之间加上边. 由此定义我们容易得到 $\Delta(L(G)) \leq 2\Delta(G) - 2$.

由于图 G 中的每条边都是线图 $L(G)$ 中的一个顶点. 通过观察, 我们发现图 G 的边线性序集恰好是线图 $L(G)$ 的点线性序集, 即有 $\coprod(G) = \prod(L(G))$. 因此, 如果有一个线图 $L(G)$ 中的顶点 y 是对应于 $L(G)$ 的线性序 σ 从 x 强（弱） k-可达 的, 那么在图 G 中, 边 e' 是对应于 G 的线性序 τ 从 e 强（弱） k-可达 的, 其中 $x, y \in V(L(G))$ 对应 $e, e' \in E(G)$, $\sigma \in \prod(L(G))$ 对应 $\tau \in \coprod(G)$. 反之也成立. 由此, 我们可以得到 $col_k(L(G)) = col'_k(G)$ 和 $wcol_k(L(G)) = wcol'_k(G)$.

令 $G = (V, E)$ 是一个图并且 p 是一个正整数. 严格距离- p 图 $G^{[\natural p]}$ 将 V 作为它的顶点集, 且 xy 是 $G^{[\natural p]}$的一条边当且仅当 $d_G(x, y) = p$.

2. $L(T)$ 的一般染色数

树是图论中最简单的图类之一. 由于星图的线图是一个完全图, 通过此断言以及宽度优先边排序, 我们可以得到以下定理.

定理 1 *对于所有整数 $k > 0$, 如果 T 是一棵最大度为 Δ 的树, 那么 $col_k(L(T)) = \Delta$.*

证明: 由于线图 $L(T)$ 中的每一个点都对应于 T 中的一条边, 对应于线图 $L(T)$ 点的宽度优先排序, 我们可以给 T 的边也按照宽度优先排序. 那么对于 T 中的每条边 e_0, T 中最多有 $\Delta - 1$ 条边从 e_0 出发 k-可达. 由此可知, 对于线图 $L(T)$ 中的每个点 v_0, $L(T)$ 中最多有 $\Delta - 1$ 个点从 v_0 出发 k-可达. 因此, 我们有 $col_k(L(T)) \leq \Delta$.

因为 T 是一棵最大度为 Δ 的树, 所以线图 $L(T)$ 有一个大小为 Δ 的团. 对于线图 $L(T)$ 任意的一个顶点线性序, 假设在这个团中 v_0 的线性序最大, 那么线图 $L(T)$ 中至少有 $\Delta - 1$ 个点从 v_0 出发 k- 可达. 因此, 我们有 $col_k(L(T)) \geq \Delta$.

定理 2 *对于所有整数 $k > 0$, 如果 T 是一棵最大度为 Δ 的树, 那么 $wcol_k(L(T)) \leq k(\Delta - 1) + 1$ 并且这个界对于 $k \leq 2$ 是紧的.*

证明: 我们仍然对 T 的边进行宽度优先排序, 得到 T 的边线性序记作 $\tau \in \coprod(T)$. 那么, 对于一条边 $e \in E(T)$ 和 $1 \leq l \leq k$, T 中最多有 $\Delta - 1$ 条距离 e 为 l 的边对应于边线性序 τ 从 e 出发 k- 可达. 所以总共有最多 $k(\Delta - 1) + 1$ 条边对应于边线性序 τ 从 e 出发 k-可达. 由此可知, 对于一个确定的点 $v \in V(L(T))$, 总共有最多 $k(\Delta - 1) + 1$ 个点对应于点线性序 $\sigma \in \prod(L(G))$ 从 v 出发 k-可达, 其中 $\sigma \in \prod(L(G))$ 对应 $\tau \in \coprod(T)$. 因此, 我们有 $wcol_k(L(T)) \leq k(\Delta - 1) + 1$.

然后我们证明这个界对于 $k \leq 2$ 是紧的. 根据定理1, 我们有 $wcol_k(L(T)) \geq col_k(L(T)) = \Delta$, 所以这个界对于 $k = 1$ 是紧的并且 $wcol_k(L(T)) = \Delta$. 如果 $k = 2$, 考虑一棵足够大的树 T, 树 T 中除了叶子节点的度为1, 其余点的度都为 Δ. 假设 v 是 T 的树根. 我们把与树根关联的边称作第一

层边, 把与第一层边关联的其他边称作第二层边, 以此类推. 对于每一个边线性序 $\tau \in \coprod(T)$, 在第一层边中选择对应于边线性序 τ 最大的边 vw. 然后选择与 w 关联的对应于边线性序 τ 最大的边 e. 这样我们就得到所有与 w 关联的边以及所有第一层边都是对应于边线性序 τ 从 e 出发 k-可达的. 所以我们可以得到 $wcol_k(L(T)) \geq 2(\Delta - 1) + 1$. 因此, 这个界对于 $k = 2$ 也是紧的.

3. $L(T)^{[\natural p]}$ 的着色数

Heuvel, Kierstead 和Quiroz [6] 证明了对于图 G 和奇数 p, $G^{[\natural p]}$ 的着色数被 G 的弱 $(2p-1)$-染色数所界定. 对于偶数 p, 他们证明了 $\chi(G^{[\natural p]})$ 的一个上界为弱 $(2p)$-染色数乘以它的最大度.

引理 1 *([2])*

1. *对于每个奇数 p 和图 G, 我们有 $\chi(G^{[\natural p]}) \leq wcol_{2p-1}(G)$.*
2. *对于每个偶数 p 和图 G, 我们有 $\chi(G^{[\natural p]}) \leq wcol_{2p}(G) \cdot \Delta(G)$.*

结合定理 1 和 2, 我们可以直接给出 $L(T)^{[\natural p]}$ 着色数的一个上界.

定理 3

1. *对于每个奇数 p 和最大度为 Δ 的树 T, 我们有 $\chi(L(T)^{[\natural p]}) \leq (2p-1)(\Delta-1)+1$.*
2. *对于每个偶数 p 和最大度为 Δ 的树 T, 我们有 $\chi(L(T)^{[\natural p]}) \leq [2p(\Delta-1)+1] \cdot (2\Delta-2)$.*

4. 结束语

一般染色数在图论中与许多其他参数都有紧密的联系, 它的应用十分广泛. 然而对于线图, 一般染色数的研究较少, 对于其他图类线图的一般染色数还有待研究.

对于本文的定理2, 我们证明了对于 $k = 1, 2$ 都是紧的, 甚至我们已经可以证明对于 $k = 3$ 也是紧的, 因此, 我们猜想这个界对于任意的 $k \in Z^+$ 都是紧的.

问题1 对于定理2, 那个界是否对于所有的 $k \in Z^+$ 都是紧的?

参考文献

[1] Chen, G.T. and Schelp, R.H. (1993) Graphs with Linearly Bounded Ramsey Numbers. *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, **57**, 138-149. https://doi.org/10.1006/jctb.1993.1012

[2] Kierstead, H.A. (2000) A Simple Competitive Graph Coloring Algorithm. *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, **78**, 57-68. https://doi.org/10.1006/jctb.1999.1927

[3] Kierstead, H.A. and Trotter, W.T. (1994) Planar Graph Coloring with an Uncooperative Partner. *Journal of Graph Theory*, **18**, 569-584. https://doi.org/10.1002/jgt.3190180605

[4] Kierstead, H.A. and Trotter, W.T. (2001) Competitive Colorings of Oriented Graphs. *The Electronic Journal of Combinatorics*, **8**, Research Paper 12. https://doi.org/10.37236/1611

[5] Kierstead, H.A. and Yang, D.Q. (2003) Orderings on Graphs and Game Coloring Number. *Order*, **20**, 255-264. https://doi.org/10.1023/B:ORDE.0000026489.93166.cb

[6] van den Heuvel, J., Kierstead, H.A. and Quiroz, D.A. (2019) Chromatic Numbers of Exact Distance Graphs. *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, **134**, 143-163. https://doi.org/10.1016/j.jctb.2018.05.007