

海洛因和HIV同时感染和传播的动力学行为

程焕焕

上海理工大学, 上海
Email: 1012312095@qq.com

收稿日期: 2021年3月19日; 录用日期: 2021年4月6日; 发布日期: 2021年4月22日

摘要

本文建立了一个包括海洛因和HIV共同传播的具有双线性发生率的疾病模型, 对该模型的分析不是一件易事。我们分别得到了吸食海洛因和HIV感染的基本再生数, 以及它们的入侵再生数。当吸食海洛因和HIV感染的基本再生数都小于1时, 唯一的无病平衡点总是存在并且是稳定的。当HIV感染(吸食海洛因)的基本再生数小于1时, HIV感染(吸食海洛因)的边界平衡点存在, 并且其局部稳定的充分条件是海洛因使用者(HIV感染)的入侵再生数小于1。最后, 我们得到了决定共存平衡点存在与否的关系式。

关键词

共感, 入侵再生数, 海洛因使用者, 疾病模型, 双线性发生率

Dynamics of Heroin and HIV Co-Infection and Co-Transmission

Huanhuan Cheng

University of Shanghai for Science and Technology, Shanghai
Email: 1012312095@qq.com

Received: Mar. 19th, 2021; accepted: Apr. 6th, 2021; published: Apr. 22nd, 2021

Abstract

We present an epidemic model with bilinear incidence that incorporates the joint dynamics of heroin and HIV, a model that is hard to analyze. We compute independent reproductive numbers for heroin use (R_U) and HIV (R_V). We also get the invasion reproductive number of heroin addiction (R_{ui}^1) and HIV infection (R_{vi}^1) respectively. We obtain that the only one disease-free equilibrium always exists and it is stable if $\max\{R_U, R_V\} < 1$. The boundary equilibrium of HIV in-

fection exists if $R_V > 1$ and it is locally stable if and only if $R_{ui}^2 < 1$. And we can get that the boundary equilibrium of heroin use exists if $R_V > 1$ and it is locally stable if and only if $R_{vi}^1 < 1$. Finally, we manage to obtain some relations that can be used to determine the existence of coexistence equilibrium.

Keywords

Co-Infection, Invasion Reproductive Number, Heroin Use, Epidemic Model, Bilinear Incidence

Copyright © 2021 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

海洛因，一系列吗啡类毒品的总称，是以吗啡生物碱作为合成起点得到的半合成毒品，俗称几号、白粉、白面、红鸡、白戈珠。是阿片毒品系列中的精制品。海洛因具有很高的成瘾风险，并且对人类的危害极大。文献[1]表明可以用经典的流行病模型来研究海洛因的成瘾和传播从而制定相关的控制策略。自此出现了大量研究海洛因滥用和传播的数学模型[2] [3] [4] [5]。由于阿片类药物的高致死率，引起了人们的广泛关注。艾滋病是由人类免疫缺陷病毒(HIV)引起的性传播疾病，根据血清分型，HIV可分为I型(HIV-1)和II型(HIV-2)，它是一种危害性极大的传染病，HIV是一种能攻击人体免疫系统的病毒。主要经以下3种途径传播：性接触、血液及血制品(包括共用针具静脉注射毒品、介入性医疗操作等)和母婴传播(包括经胎盘、分娩时和哺乳传播)，注射是最容易造成感染的。我国艾滋病患者中90%以上是因静脉注射毒品造成的。

共感模型是几种特定疾病共同传播的模型，相关的研究有很多[6]-[12]。在两种疾病模型中共感会导致复杂的动力学行为，因此共存平衡点明确的表达式是很难确定的。Blyuss和Kyrychko [8]研究了一个SIS两种疾病模型，也只是用数值模拟得到了共感平衡点的存在性。Gao [13]研究了一个双线性的SIS疾病模型，并通过数值模拟得到了丰富的动力学现象，比如后向分支、Hopf分支。

文献[14]利用入侵再生数[15]严格证明了一个具有超感染和完全接种疾病模型的共存平衡点的存在性和局部稳定性。Martcheva和Pilyugin [16]建立了一个具有年龄结构的两种疾病共同感染的共感模型，通过分析得到了两个共存平衡点的存在性。更多关于入侵再生数的定义，我们可以参考文献[16] [17] [18]。

为了解释在人群中海洛因和艾滋病毒同时感染和传播的原因，在本文中，我们提出了一个关于海洛因和HIV共同感染的新的数学模型。我们用双线性发生率来模拟两种疾病的新情况。接下来，我们将人群分为五类，即易感者 $S(t)$ 、海洛因吸食者 $U(t)$ 、艾滋病毒感染者 $V(t)$ 、同时感染(海洛因/艾滋病毒) $I(t)$ 、艾滋病患者 $A(t)$ 。我们假设艾滋病患者是孤立的，总人数 $N = S + U + V + I$ 。海洛因成瘾者与易感者的有效接触率为 C_1 ，吸毒者每次有效接触的传播率为 β_U 。同时，HIV感染者与易感人群的有效接触率为 C_2 ，HIV感染者每次有效接触的传染率为 β_V 。从而我们有以下的海洛因和HIV在人群中传播的感染力函数，

$$\begin{aligned}\lambda_U(t) &= \beta_U C_1 (U(t) + I(t)) := \beta_1 (U(t) + I(t)), \\ \lambda_V(t) &= \beta_V C_2 (V(t) + I(t)) := \beta_2 (V(t) + I(t)),\end{aligned}\tag{1}$$

在感染力函数采用上述形式的情况下，模型的结构

$$\begin{cases} \frac{dS(t)}{dt} = \Lambda - \mu S(t) + \delta U(t) - \lambda_U(t)S(t) - \lambda_V(t)S(t), \\ \frac{dU(t)}{dt} = \lambda_U(t)S(t) - q\lambda_V(t)U(t) - (\mu + d_U + \delta)U(t), \\ \frac{dV(t)}{dt} = \lambda_V(t)S(t) - \lambda_V(t)V(t) - (\mu + d_V + \gamma_1)V(t) + \sigma\delta I(t), \\ \frac{dI(t)}{dt} = q\lambda_V(t)U(t) + \lambda_V(t)V(t) - (\mu + d_I + \gamma_2)I(t) - \sigma\delta I(t), \\ \frac{dA(t)}{dt} = \gamma_1 V(t) + \gamma_2 I(t) - (\mu + d_A)A(t), \end{cases} \quad (2)$$

初始条件为：

$$S(0) = S_0, \quad U(0) = U_0, \quad V(0) = V_0, \quad I(0) = I_0, \quad A(0) = A_0. \quad (3)$$

在系统(2)中，参数 Λ 是输入率， μ 是自然死亡率， δ 吸毒者的康复率， γ_1 、 γ_2 分别是感染HIV和吸毒者感染AIDS的传播率($\gamma_2 \geq \gamma_1$)， d_U 是吸毒导致的死亡率， d_V 是感染HIV导致的死亡率， d_I 是共感导致的死亡率 $d_I \geq d_V$ ， d_A 是AIDS导致的死亡率。 $q\lambda_V$ 表示感染艾滋病毒的海洛因吸食者的感染力。 $\sigma\delta I$ 表示从共感染到HIV感染的康复率。此外，我们假设每接触一个共感的人最多只能传播一种疾病。

据我们所知，目前关于海洛因滥用与HIV同时感染和传播的相关研究很少。本文的方法可以推广到具有饱和发病率的共感疾病模型的研究。本文的组织结构如下：下一节给出了系统(2)的一些初步结果，包括基本再生数和平衡点的存在性。第三节利用基本再生数和入侵再生数，严格地证明了无病平衡点、海洛因传播边界平衡点和HIV感染边界平衡点的局部稳定性。在第4节中得到了海洛因与HIV的共存平衡点存在的条件。在第5节中，总结了研究成果。

2. 边界平衡点

由于系统(2)的前四个方程与最后一个方程无关，所以我们只需要考虑下面的系统

$$\begin{cases} \frac{dS(t)}{dt} = \Lambda - \mu S(t) + \delta U(t) - \lambda_U(t)S(t) - \lambda_V(t)S(t), \\ \frac{dU(t)}{dt} = \lambda_U(t)S(t) - q\lambda_V(t)U(t) - (\mu + d_U + \delta)U(t), \\ \frac{dV(t)}{dt} = \lambda_V(t)S(t) - \lambda_V(t)V(t) - (\mu + d_V + \gamma_1)V(t) + \sigma\delta I(t), \\ \frac{dI(t)}{dt} = q\lambda_V(t)U(t) + \lambda_V(t)V(t) - (\mu + d_I + \gamma_2)I(t) - \sigma\delta I(t), \end{cases} \quad (4)$$

$$S(0) = S_0, \quad U(0) = U_0, \quad V(0) = V_0, \quad I(0) = I_0. \quad (5)$$

我们假设总人口 $N(t) = S(t) + U(t) + V(t) + I(t)$ 满足下面的方程

$$\frac{dN(t)}{dt} = \Lambda - \mu N(t) - d_U U(t) - (d_V + \gamma_1)V(t) - (d_I + \gamma_2)I(t). \quad (6)$$

从这里开始，将考虑系统(4)~(5)并研究其动力学行为。定义集合

$$D := \left\{ (S, U, V, I) \in X : S + U + V + I \leq \frac{\Lambda}{\mu} \right\}.$$

定义(4)~(5)的解半流 $\psi: X_+ \rightarrow X_+$ 满足

$$\psi(t)\psi = (S(t), U(t), V(t), I(t)), \quad \forall t \geq 0,$$

其中 $\psi = (S_0, U_0, V_0, I_0) \in X_+$, 并且 $X_+ = \mathbb{R}_+^4$, 那么 D 是 $\psi(t)$ 的正向不变集, 在这个意义下

$$\psi(t)\psi \in D, \quad \forall t \geq 0, \quad \psi \in D.$$

引理2.1 对于 D 中任意给定的初始值, 当 $t \in [0, \infty)$ 时系统(2)~(3)有唯一的解, 并且系统(2)~(3)的解在它们的存在区间上保持非负。

病原体的基本数被定义为一个感染个体在它的整个感染期可以在都是易感个体中感染个体的预期数量。对应海洛因吸食者和HIV感染的基本再生数分别为

$$R_U = \frac{\beta_1 \Lambda}{\mu(\mu + d_U + \delta)}, \quad R_V = \frac{\beta_2 \Lambda}{\mu(\mu + d_V + \gamma_1)} \quad (7)$$

要了解更多关于基本再生数数的信息, 可以参考[2] [19]。

自然地, 系统(4)有一个无病平衡点 $E_0^* = (S^0, 0, 0, 0)$ 其中 $S^0 = \frac{\Lambda}{\mu}$ 。我们用 $E_1^* = (S_1^*, U_1^*, 0, 0)$ 表示与海洛因传播(不包括 HIV 感染)相对应的边界平衡点。用 $E_2^* = (S_2^*, 0, V_2^*, 0)$ 表示与艾滋病毒传播相对应的边界平衡点(海洛因传播除外)。

接下来, 分别证明了在人群中海洛因传播边界平衡点 E_1^* 和 HIV 传播边界平衡点 E_2^* 的存在性。为了平衡点 E_1^* 我们设 N_1^* 为海洛因传输在平衡点处取值 U_1^* 时, 总人口 N 的取值。由系统(4)可得平衡点 E_1^* 满足

$$\begin{aligned} \Lambda - \mu S_1^* + \delta U_1^* - \beta_1 U_1^* S_1^* &= 0, \\ \beta_1 U_1^* S_1^* - (\mu + d_U + \delta) U_1^* &= 0, \\ \Lambda - \mu N_1^* - d_U U_1^* &= 0. \end{aligned} \quad (8)$$

从(8)的第二个式子, 可以得到

$$S_1^* = \frac{\Lambda}{\mu R_U} \quad (9)$$

将(9)代入(8)的第一个方程, 可以得到

$$U_1^* = \frac{\Lambda - \mu S_1^*}{\mu + d_U} = \frac{\Lambda}{\mu + d_U} \left(1 - S_1^* \frac{\mu}{\Lambda} \right) \quad (10)$$

将(9)和(10)代入(8)的第三个方程, 可以得到

$$\begin{aligned} N_1^* &= \frac{\Lambda - d_U U_1^*}{\mu} = \frac{\Lambda - d_U \frac{\Lambda - \mu S_1^*}{\mu + d_U}}{\mu} \\ &= \frac{\Lambda(\mu + d_U) - d_U(\Lambda - \mu S_1^*)}{\mu(\mu + d_U)} = \frac{\Lambda + d_U S_1^*}{\mu + d_U} = \frac{\Lambda(\mu R_U + d_U)}{\mu(\mu + d_U) R_U} \end{aligned} \quad (11)$$

类似地, 我们用 $E_2^* = (S_2^*, 0, V_2^*, 0)$ 表示 HIV 感染的边界平衡(不包括海洛因传播)为了得到平衡点 E_2^* , 假设 N_2^* 是人群中的 HIV 感染处于平衡点 V_2^* 时总人口在平衡点处的取值。由系统(4), 可以得到平衡点 E_2^* 满足

$$\begin{aligned}
\Lambda - \mu S_2^* - \beta_2 V_2^* S_2^* &= 0, \\
\beta_2 V_2^* S_2^* - (\mu + d_v + \gamma_1) V_2^* &= 0, \\
\Lambda - \mu N_2^* - (d_v + \gamma_1) V_2^* &= 0.
\end{aligned} \tag{12}$$

按照求 E_1^* 类似的步骤, 可以得到 HIV 的边界平衡点的表达式

$$\begin{aligned}
S_2^* &= \frac{\Lambda}{\mu R_V}, \\
V_2^* &= \frac{\Lambda}{\mu + d_v + \gamma_1} \left(1 - \frac{\mu}{\Lambda} S_2^* \right), \\
N_2^* &= \frac{\Lambda - (d_v + \gamma_1) V_2^*}{\mu} \\
&= \frac{\Lambda(\mu + d_v + \gamma_1) - (d_v + \gamma_1)(\Lambda - \mu S_2^*)}{\mu(\mu + d_v + \gamma_1)} \\
&= \frac{\Lambda(\mu R_V + d_v + \gamma_1)}{\mu(\mu + d_v + \gamma_1) R_V}.
\end{aligned} \tag{13}$$

注意两个边界平衡点的取值并不依赖于共感类。

为了表明 U_1^* 和 V_2^* 是正的, 从(9)~(11)和(13), 我们可以得到

$$U_1^* = \frac{\Lambda}{\mu + d_U} \left(1 - \frac{1}{R_U} \right) \text{ 并且 } V_2^* = \frac{\Lambda}{\mu + d_v + \gamma_1} \left(1 - \frac{1}{R_V} \right),$$

显然, 如果 $R_U > 1$ 则有 $U_1^* > 0$, 如果 $R_V > 1$, 则有 $V_2^* > 0$ 。

综上所述, 可以得到下面的结论。

定理 2.1 系统(4)总是存在唯一的一个无病平衡点 E_0^* , 此外当 $R_U > 1$ 时, 有唯一的一个海洛因传播的边界平衡点 E_1^* , 当 $R_V > 1$ 时, 有唯一的一个 HIV 传播的边界平衡点 E_2^* 。

此外, 在接下来的讨论中我们会发现边界平衡点的稳定性也依赖于两个基本再生数。

3. 平衡点的稳定性

在这一节中, 我们将证明涉及到上述基本再生数 R_U 和 R_V 的系统公式参考此处边界平衡点的稳定性。

定理 3.1 如果 $\max\{R_U, R_V\} < 1$, 那么唯一的无病平衡点 E_0^* 是局部稳定的。

证明:

通过将系统(4)在无病平衡点 E_0^* 处线性化, 我们得到特征方程 $\det(\Delta(\lambda)) = 0$, 即

$$\begin{vmatrix}
\lambda + \mu & -\delta + \beta_1 \frac{\Lambda}{\mu} & \beta_2 \frac{\Lambda}{\mu} & (\beta_1 + \beta_2) \frac{\Lambda}{\mu} \\
0 & \lambda - \beta_1 \frac{\Lambda}{\mu} + \mu + d_U + \delta & 0 & -\beta_1 \frac{\Lambda}{\mu} \\
0 & 0 & \lambda - \beta_2 \frac{\Lambda}{\mu} + \mu + d_v + \gamma_1 & -\beta_1 \frac{\Lambda}{\mu} - \sigma\delta \\
0 & 0 & 0 & \lambda + \mu + d_I + \gamma_2 + \sigma\delta
\end{vmatrix} = 0. \tag{14}$$

显然, 方程(14)的根是 $\lambda_1 = -\mu$, $\lambda_2 = (\mu + d_U + \delta)(R_U - 1)$, $\lambda_3 = (\mu + d_v + \gamma_1)(R_V - 1)$,

$\lambda_4 = -(\mu + d_I + \gamma_2 + \sigma\delta)$ 则当且仅当 $\max\{R_U, R_V\} < 1$ 时, 方程所有的根都是负的常数。因此, 如果

$\max\{R_U, R_V\} < 1$, 唯一的无病平衡点 E_0^* 是局部稳定的。

由定理 2.1 我们知道当 $R_U > 1$ 时, 存在唯一的海洛因边界平衡点 E_1^* 。边界平衡点 E_1^* 的稳定性由下面的定理给出。

定理 3.2 当 $R_{vi}^1 < 1$ 时, 唯一的边界平衡点 E_1^* 是局部稳定的, 当 $R_{vi}^1 > 1$ 时, E_1^* 是不稳定的。

证明:

注意到 $N_1^* = S_1^* + U_1^*$ 通过将系统(4)在边界平衡 E_1^* 处线性化, 我们得到了雅可比矩阵

$$J(E_1^*) = \begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix} \quad (15)$$

其中

$$A = \begin{pmatrix} -\frac{\Lambda + \delta U_1^*}{S_1^*} & -(\mu + d_U) \\ \beta_1 U_1^* & 0 \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} -\beta_2 S_1^* & -\beta_1 S_1^* - \beta_2 S_1^* \\ -q\beta_2 U_1^* & \beta_1 S_1^* - q\beta_2 U_1^* \end{pmatrix},$$

$$B = \begin{pmatrix} \beta_2 S_1^* - Q_1 & \beta_2 S_1^* + \sigma\delta \\ (q\beta_2 + \beta_1)U_1^* & q\beta_2 U_1^* - Q_2 \end{pmatrix},$$

其中, $Q_1 = \beta_1 U_1^* + \mu + d_V + \gamma_1$, $Q_2 = \mu + d_I + \gamma_2 + \sigma\delta$

显然, $Tr(A) = -\frac{\Lambda + \delta U_1^*}{S_1^*} < 0$, $\det(A) = \beta_1 U_1^* (\mu + d_U) > 0$ 。

因此, A 的特征值具有负实部。

稳定性要求 B 满足 $Tr(B) < 0$ 并且 $\det(B) > 0$ 注意到

$$\det(B) = (\beta_2 S_1^* - Q_1)(q\beta_2 U_1^* - Q_2) - (q\beta_2 + \beta_1)U_1^* (\beta_2 S_1^* + \sigma\delta)$$

通过简单的计算, 我们可以得到

$$\det(B) = Q_1 Q_2 - \beta_2 S_1^* (Q_2 + \beta_1 U_1^*) - q\beta_2 U_1^* (Q_1 + \sigma\delta) - \beta_1 U_1^* \sigma\delta$$

定义

$$R_{vi}^1 = \frac{\beta_2 S_1^* (Q_2 + \beta_1 U_1^*) + q\beta_2 U_1^* (Q_1 + \sigma\delta)}{Q_1 Q_2 - \beta_1 U_1^* \sigma\delta} \quad (16)$$

我们称 R_{vi}^1 是 HIV 感染的侵入再生数假设 $R_{vi}^1 < 1$, 则有 $\det(B) > 0$ 接下来, 需要证明 $Tr(B) < 0$ 。事实上, 由 $\det(B) > 0$, 可以得到 $\beta_2 S_1^* - Q_1$ 和 $q\beta_2 U_1^* - Q_2$ 有相同的符号。注意到 $\frac{q\beta_2 U_1^*}{Q_2} = \frac{q\beta_2 U_1^* Q_1}{Q_1 Q_2} \leq R_{vi}^1 < 1$ 。

我们可以得到 $q\beta_2 U_1^* - Q_2 < 0$, 那么 $\beta_2 S_1^* - Q_1 < 0$ 。因此, $Tr(B) < 0$ 。从而可以得到 E_1^* 是局部渐近稳定的。如果 $R_{vi}^1 > 1$, 我们有 $\det(B) < 0$, 因此 E_1^* 是不稳定的。这就完成了 E_1^* 稳定性的证明。

由定理 2.1, 我们可以知道, 当 $R_V > 1$ 时, 存在一个唯一的 HIV 感染的边界平衡点 E_2^* 。接下来, 我们将证明边界平衡态 E_2^* 的局部稳定性。

定理 3.3 当 $R_{ui}^2 < 1$ 时, 唯一的边界平衡点 E_2^* 是局部稳定的, 当 $R_{ui}^2 > 1$ 时, E_2^* 是不稳定的。

证明:

注意 $N_2^* = S_2^* + V_2^*$ 通过将系统(4)在边界平衡 E_2^* 处线性化, 我们得到了雅可比矩阵

$$J(E_2^*) = \begin{pmatrix} \tilde{A} & \tilde{C} \\ 0 & \tilde{B} \end{pmatrix} \quad (17)$$

其中

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} -\frac{\Lambda}{S_2^*} & -\beta_2 S_2^* \\ \beta_2 V_2^* & 0 \end{pmatrix},$$

$$\tilde{C} = \begin{pmatrix} \delta - \beta_1 S_2^* & -(\beta_1 + \beta_2) S_2^* \\ -\beta_1 V_2^* & \beta_2 S_2^* - \beta_1 V_2^* + \sigma\delta \end{pmatrix},$$

$$\tilde{B} = \begin{pmatrix} \beta_1 S_2^* - q\beta_2 V_2^* - (\mu + d_v + \delta) & \beta_1 S_2^* \\ (q\beta_2 + \beta_1) V_2^* & \beta_1 V_2^* - (\mu + d_l + \gamma_2 + \sigma\delta) \end{pmatrix},$$

显然, $Tr(\tilde{A}) = -\frac{\Lambda}{S_2^*} < 0$, $\det(\tilde{A}) = \beta_2^2 V_2^* S_2^* > 0$ 。

因此, \tilde{A} 的特征值有负的实部。

关于 \tilde{B} , 我们需要 $Tr(\tilde{B}) < 0$ 并且 $\det(\tilde{B}) > 0$ 通过简单的计算, 我们有

$$\begin{aligned} \det(\tilde{B}) &= (\beta_1 S_2^* - Q_3)(\beta_1 V_2^* - Q_2) - (q\beta_2 + \beta_1)\beta_1 S_2^* V_2^* \\ &= Q_2 Q_3 - \beta_1 S_2^* Q_2 - \beta_1 V_2^* Q_3 - q\beta_1 \beta_2 S_2^* V_2^* \end{aligned}$$

定义

$$R_{ui}^2 = \frac{\beta_1 S_2^* (\mu + d_l + \gamma_2 + \sigma\delta) + \beta_1 V_2^* (q\beta_2 V_2^* + \mu + d_v + \delta)}{(\mu + d_l + \gamma_2 + \sigma\delta)(q\beta_2 V_2^* + \mu + d_v + \delta) - q\beta_1 \beta_2 S_2^* V_2^*} \quad (18)$$

称 R_{ui}^2 是海洛因吸食者的入侵基本再生数。假设 $R_{ui}^2 < 1$, 那么我们有 $\det(\tilde{B}) > 0$, 这表明 $\beta_1 S_2^* - Q_3$ 和 $\beta_1 V_2^* - Q_2$ 有相同的符号, 由于 $\frac{\beta_1 S_2^*}{Q_3} \leq R_{ui}^2 < 1$ 。从而可以得到 $\beta_1 S_2^* - Q_3 < 0$, $\beta_1 V_2^* - Q_2 < 0$ 。因此, 我们可以得到 $Tr(\tilde{B}) < 0$ 。因此, E_2^* 是局部渐近稳定的。如果 $R_{ui}^2 > 1$, 可以得到 $\det(\tilde{B}) < 0$ 。则 E_2^* 是不稳定的。

定理 3.2~3.3 告诉我们两个边界平衡点 E_2^* 和 E_1^* 的局部稳定性分别由入侵再生数 R_{ui}^2 、 R_{vi}^1 决定。这些结果表明, 共感的存在并没有消除竞争排斥的条件。

4. 海洛因吸食和 HIV 感染共存平衡点的存在性

当两个基本再生数都大于 1, 即 $R_u > 1$ 并且 $R_v > 1$ 时, E_1^* 和 E_2^* 都存在, 并且 E_0^* 是不稳定的。在这种情况下, 共存平衡点的明确的表达式是很难计算得到的。因此, 我们尝试找到了一些确定共存平衡点存在性的关系。为了研究共存平衡点 $E^* = (S^*, U^*, V^*, I^*)$ 的存在性, 我们令 $x = U^* + I^*$, $y = V^* + I^*$ 。 E^* 的分量可以通过将方程(4)的右端为 0 来确定。

则有 $\lambda_1 = \beta_1 x$, $\lambda_2 = \beta_2 y$,

$$\begin{cases} 0 = \Lambda - \mu S^* + \delta U^* - \beta_1 x S^* - \beta_2 y S^* \\ 0 = \beta_1 x S^* - q\beta_2 y U^* - (\mu + d_v + \delta) U^* \\ 0 = \beta_2 y S^* - \beta_1 x V^* - (\mu + d_v + \gamma_1) V^* + \sigma\delta I^* \\ 0 = q\beta_2 y U^* + \beta_1 x V^* - (\mu + d_l + \gamma_2) I^* - \sigma\delta I^* \end{cases} \quad (19)$$

令

$$\mu_U = \mu + d_U + \delta, \quad \mu_V = \mu + d_V + \gamma_1, \quad \mu_I = \mu + d_I + \gamma_2, \quad (20)$$

由(19)的第二个式子可得

$$U^* = \frac{\beta_1 x S^*}{q\beta_2 y + \mu + d_U + \delta} \quad (21)$$

将(21)代入(19)的第一个式子, 我们可以得到

$$S^* = \frac{\Lambda}{B_1} \quad (22)$$

其中

$$\begin{aligned} B_1 &= \mu + \beta_1 x + \beta_2 y - \frac{\delta\beta_1 x}{q\beta_2 y + \mu + d_U + \delta} \\ &= \mu + \beta_2 y + \frac{\beta_1 x(q\beta_2 y + \mu + d_U)}{q\beta_2 y + \mu_U} \\ &> 0. \end{aligned}$$

从而 S^* 可以由 x 和 y 确定。

由(19)的第三个式子可得

$$V^* = \frac{\beta_2 y S^* + \sigma\delta I^*}{\beta_1 x + \mu + d_V + \gamma_1}, \quad (23)$$

将(23)代入(19)的第四个式子, 可得

$$I^* = \frac{q\beta_2 y U^* + \frac{\beta_1 \beta_2 x y}{\beta_1 x + \mu_V} S^*}{B_2}, \quad (24)$$

其中

$$\begin{aligned} B_2 &= \mu + d_I + \gamma_2 + \sigma\delta - \frac{\beta_1 \sigma \delta x}{\beta_1 x + \mu + d_V + \gamma_1} \\ &= \mu_I + \frac{\sigma\delta\mu_V}{\beta_1 x + \mu_V} \end{aligned} \quad (25)$$

由(21)和(24)我们可以知道 x 和 y 满足下面的方程

$$\begin{aligned} x &= xF(x, y), \\ y &= yG(x, y), \end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned} F(x, y) &= \left(1 + \frac{q\beta_2 y}{B_2}\right) \frac{\beta_1 S^*}{q\beta_2 y + \mu_U} + \frac{\beta_1 \beta_2 y S^*}{B_2(\beta_1 x + \mu_V)}, \\ G(x, y) &= \frac{\beta_2 S^*}{\beta_1 x + \mu_V} + \left(1 + \frac{\sigma\delta}{\beta_1 x + \mu_V}\right) \frac{q\beta_2 U^* + \frac{\beta_1 \beta_2 x S^*}{\beta_1 x + \mu_V}}{B_2}, \end{aligned} \quad (26)$$

其中 S^* 和 U^* 都是 x 和 y 的函数。由于 $x \neq 0, y \neq 0$, 那么方程(26)可以简化为如下的形式

$$\begin{aligned} F(x, y) &= 1, \\ G(x, y) &= 1. \end{aligned} \quad (27)$$

从(20)到(25)我们可以知道共存平衡点 E^* 对应于两条曲线 $F = 1$ 和 $G = 1$ 的交点。

5. 结论

静脉注射毒品极易造成艾滋病感染, 实际上, 吸毒也会造成 HIV 感染的增加。本文忽略了艾滋病的重要传播途径, 建立了一个 HIV/海洛因同时感染的疾病模型, 用来描述海洛因和 HIV 在人群中的共同传播和感染。研究结果表明当海洛因和 HIV 的基本再生数均小于 1 时 $\max\{R_U, R_V\} < 1$, 唯一的无病平衡点是始终存在并且稳定的。为了考虑同时感染和传播在共感系统中的作用, 我们引了入侵再生数。入侵再生数 R_{ui}^2 给出了当人口处于平衡状态 E_2^* 时, 也就是在人群中只有 HIV 感染时, 吸毒者的增加情况。入侵再生数 R_{vi}^1 给出了当人口处于平衡状态 E_1^* , 也就是在人群中只有海洛因传播时, HIV 感染的增加数量。边界平衡点 E_1^* 和 E_2^* 的局部稳定性完全由入侵再生数决定。具体的说就是当 $R_{vi}^1 < 1$ 时, E_1^* 是局部稳定的, 当 $R_{vi}^1 > 1$ 时, E_1^* 是不稳定的。此外, 当 $R_{ui}^2 < 1$ 时, E_2^* 是局部稳定的, 当 $R_{ui}^2 > 1$ 时, E_2^* 是不稳定的。进一步, 当两个入侵再生数都大于 1 时, 虽然没有得到共存平衡点的明确的表达式, 但是却得到了决定内部平衡点是否存在的方程(见方程(27))。

参考文献

- [1] Mackintosh, D.R. and Stewart, G.T. (1979) A Mathematical Model of a Heroin Epidemic: Implications for Control Policies. *Journal of Epidemiology and Community Health*, **33**, 299-304. <https://doi.org/10.1136/jech.33.4.299>
- [2] Diekmann, O., Heesterbeek, J.A.P. and Metz, J.A.J. (1990) On the Definition and the Computation of the Basic Reproduction Ratio R_0 in Models for Infectious Diseases in Heterogeneous Populations. *Journal of Mathematical Biology*, **28**, 365-382. <https://doi.org/10.1007/BF00178324>
- [3] Emma, W. and Catherine, C. (2007) Heroin Epidemics, Treatment and ODE Modelling. *Mathematical Biosciences*, **208**, 312-324.
- [4] Fang, B., Li, X.-Z., Martcheva, M. and Cai, L.-M. (2015) Global Asymptotic Properties of a Heroin Epidemic Model with Treat-Age. *Applied Mathematics and Computation*, **263**, 315-331. <https://doi.org/10.1016/j.amc.2015.04.055>
- [5] Kelly, A., Carvalho, M. and Teljeur, C. (2003) Prevalence of Opiate Use in Ireland 2000-2001. A 3-Source Capture Recapture Study. A Report to the National Advisory Committee on Drugs, Subcommittee on Prevalence. Small Area Health Research Unit, Department of Public. <https://www.drugsandalcohol.ie/5942/>
- [6] Alizon, S. (2013) Co-Infection and Super-Infection Models in Evolutionary Epidemiology. *Interface Focus*, **3**, Article ID: 20130031. <https://doi.org/10.1098/rsfs.2013.0031>
- [7] Abu-Raddad, L.J., Patnaik, P. and Kublin, J.G. (2006) Dual Infection with HIV and Malaria Fuels the Spread of Both Diseases in Sub-Saharan Africa. *Science*, **314**, 1603-1606. <https://doi.org/10.1126/science.1132338>
- [8] Blyuss, K.B. and Kyrlychko, Y.N. (2005) On a Basic Model of a Two-Disease Epidemic. *Applied Mathematics and Computation*, **160**, 177-187. <https://doi.org/10.1016/j.amc.2003.10.033>
- [9] Keeling, M.J. and Rohani, P. (2008) Modeling Infectious Diseases in Humans and Animals. Princeton University Press, Princeton.
- [10] Lawi, G., Mugisha, J. and Omolo-Ongati, N. (2011) Mathematical Model for Malaria and Meningitis Co-Infection among Children. *Applied Mathematical Sciences*, **5**, 2337-2359.
- [11] Roeger, L., Feng, Z. and Castillo-Chavez, C. (2009) Modeling TB and HIV Co-Infections. *Mathematical Biosciences and Engineering*, **6**, 815-837. <https://doi.org/10.3934/mbe.2009.6.815>
- [12] Sharomi, O., Podder, C.N., Gumel, A.B. and Song, B. (2008) Mathematical Analysis of the Transmission Dynamics of HIV/TB Control in the Presence of Treatment. *Mathematical Biosciences and Engineering*, **5**, 145-174. <https://doi.org/10.3934/mbe.2008.5.145>
- [13] Gao, D., Porco, T.C. and Ruan, S. (2016) Coinfection Dynamics of Two Diseases in a Single Host Population. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **442**, 171-188. <https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2016.04.039>
- [14] Iannelli, M., Martcheva, M. and Li, X.Z. (2005) Strain Replacement in an Epidemic Model with Superinfection and

-
- Perfect Vaccination. *Mathematical Biosciences*, **195**, 23-46. <https://doi.org/10.1016/j.mbs.2005.01.004>
- [15] Porco, T. and Blower, S. (2000) HIV Vaccines: The Effect of the Mode of Action on the Coexistence of HIV Subtypes. *Mathematical Population Studies*, **8**, 205-229. <https://doi.org/10.1080/08898480009525481>
- [16] Martcheva, M. and Pilyugin, S.S. (2006) The Role of Coinfection in Multidisease Dynamics. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, **66**, 843-872. <https://doi.org/10.1137/040619272>
- [17] Li, X.-Z., Duan, X., Ghosh, M. and Ruan, X.-Y. (2009) Pathogen Coexistence Induced by Saturating Contact Rates. *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, **10**, 3298-3311. <https://doi.org/10.1016/j.nonrwa.2008.10.038>
- [18] Martcheva, M., Pilyugin, S.S. and Holt, R.D. (2007) Subthreshold and Superthreshold Coexistence of Pathogen Variants: The Impact of Host Age-Structure. *Mathematical Biosciences*, **207**, 58-77. <https://doi.org/10.1016/j.mbs.2006.09.010>
- [19] van den Driessche, P. and Watmough, J. (2002) Reproduction Numbers and Subthreshold Endemic Equilibria for Compartmental Models of Disease Transmission. *Mathematical Biosciences*, **180**, 29-48. [https://doi.org/10.1016/S0025-5564\(02\)00108-6](https://doi.org/10.1016/S0025-5564(02)00108-6)