**Advances in Applied Mathematics** 应用数学进展, **2021, 10(5), 1647-1653**
Published Online May 2021 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2021.105175

Hans汉斯

# 一类五阶Camassa-Holm方程的Blow-Up准则

**卢宁宁**

华北电力大学数理学院，北京
Email: ningninglu@ncepu.edu.cn

收稿日期：2021年4月25日；录用日期：2021年5月8日；发布日期：2021年5月27日

## 摘　要

**Camassa-Holm方程作为一个新的完全可积的色散浅水波方程，在过去的几十年内受到了广泛关注。本文中我们主要研究的是一类五阶Camassa-Holm方程的Blow-up准则。在三种不同情况下，我们通过对方程的解作估计，得到了这类方程的解在有限时间内爆破的一个必要条件。因此，本文的研究结果丰富了广义的Camassa-Holm方程的爆破性质。**

## 关键词

**五阶Camassa-Holm方程，Blow-Up准则**

# Blow-Up Criteria for a Fifth-Order Camassa-Holm Equation

**Ningning Lu**

School of Mathematics and Physics, North China Electric Power University, Beijing
Email: ningninglu@ncepu.edu.cn

Received: Apr. 25th, 2021; accepted: May 8th, 2021; published: May 27th, 2021

## Abstract

**As a new completely integrable dispersive shallow-water wave equation, Camassa-Holm equation has been widely concerned in the past few decades. In this paper, we mainly study the blow-up criteria for a fifth-order Camassa-Holm equation. By estimating the solution of the equation in three different cases, we obtain a necessary condition for the solution of the equation to blow-up in finite time. Therefore, the results of this paper enrich the blow-up properties of the generalized Camassa-Holm equation.**

文章引用: 卢宁宁. 一类五阶 Camassa-Holm 方程的 Blow-Up 准则[J]. 应用数学进展, 2021, 10(5): 1647-1653.
DOI: 10.12677/aam.2021.105175

**Keywords**

**Fifth-Order Camassa-Holm Equation, Blow-Up Criteria**



## 1. 引言

1993 年，Camassa 和 Holm 得到了一类非常重要的浅水波方程

$$u_t + 2ku_x - u_{xxt} + 3uu_x = 2u_x u_{xx} + uu_{xxx}，\quad x \in R,\quad t > 0. \tag{1}$$

(1)被称为经典的 Camassa-Holm 方程(CH 方程) [1]。其中 $u$ 表示 $x$ 方向上的流体速度，$k$ 表示与临界浅水波波速相关的一个常数，下标 $x$ 和 $t$ 分别表示空间和时间变量。Camassa-Holm 方程有两个显著的特征，一个是它的孤立子具有尖峰性质[2]-[7]，另一个就是波的爆破现象[8]-[14]。由于波爆破是一个物理现象，所以更有易于我们研究浅水波模型。

然而，对于五阶 Camassa-Holm 方程的一些爆破性质至今尚未研究，因此本文中我们研究的是一类五阶 Camassa-Holm 方程

$$\begin{cases} h_t + uh_x + bu_x h = 0, & t > 0 \\ h = 4u - 5u_{xx} + u_{xxxx}, & x \in R \end{cases} \tag{2}$$

的解的爆破性质，通过输运方程理论，对解作估计，从而得到方程(2)的解在有限时间内爆破的一个必要条件。

本文的结构安排如下，第二部分是一些准备知识，第三部分研究解的爆破准则，第四部分阐述了本文的主要结果。

## 2. 准备知识

本文考虑的五阶 Camassa-Holm 方程如下

$$\begin{cases} h_t + uh_x + bu_x h = 0, \\ h = 4u - 5u_{xx} + u_{xxxx}, & t > 0,\ x \in R \\ u(0,x) = u_0(x), & x \in R \\ u, h \to 0, & \text{当 } |x| \to \infty. \end{cases} \tag{3}$$

首先，我们回顾一下一维 Moser 型估计，见参考文献[6]。

**命题 2.1.** 对于 $s \ge 0$，以下估计成立：

$$\|fg\|_{H^s(R)} \le C\left(\|f\|_{H^s(R)}\|g\|_{L^\infty(R)} + \|f\|_{L^\infty(R)}\|g\|_{H^s(R)}\right), \tag{4}$$

$$\|f\partial_x g\|_{H^s(R)} \le C\left(\|f\|_{H^{s+1}(R)}\|g\|_{L^\infty(R)} + \|f\|_{L^\infty(R)}\|\partial_x g\|_{H^s(R)}\right), \tag{5}$$

其中 $C$ 是常数，与 $f$ 和 $g$ 无关。

**定理 2.2.** 设 $h_0 = \left(1-\partial_x^2\right)\left(4-\partial_x^2\right)u_0 \in H^s(R), s > \frac{1}{2}$，那么存在时间 $T > 0$，使得初值问题(3)有唯一的强解 $h \in C\left([0,T];H^s\right) \cap C^1\left([0,T];H^{s-1}\right)$，且映射 $h_0 \mapsto h$ 从 $H^s$ 中 $h_0$ 的一个邻域到

$C\left([0,T];H^{s}\right)\cap C^{1}\left([0,T];H^{s-1}\right)$ 是连续的[15]。

**引理 2.3.** 考虑一维线性输运方程[6]：

$$\partial_t f+v\partial_x f=g,\ f|_{t=0}=f_0. \tag{6}$$

设 $0\le\sigma<1$，假设

$$f_0\in H^{\sigma}(R),\ g\in L^{1}\left([0,T];H^{\sigma}(R)\right),$$

$$v_x\in L^{1}\left([0,T];L^{\infty}(R)\right),\ f\in L^{\infty}\left([0,T];H^{\sigma}(R)\right)\cap C\left([0,T];S'(R)\right),$$

则有 $f\in C\left([0,T];H^{\sigma}(R)\right)$。更准确地说，存在一个只依赖于 $\sigma$ 的常数 $C$，使得对于每一个 $0<t\le T$，有

$$\|f(t)\|_{H^{\sigma}}\le\|f_0\|_{H^{\sigma}}+C\int_0^t\|g(\tau)\|_{H^{\sigma}}\mathrm{d}\tau+C\int_0^t\|f(\tau)\|_{H^{\sigma}}V'(\tau)\mathrm{d}\tau, \tag{7}$$

因此，

$$\|f(t)\|_{H^{\sigma}}\le\mathrm{e}^{CV(t)}\left(\|f_0\|_{H^{\sigma}}+C\int_0^t\|g(\tau)\|_{H^{\sigma}}\mathrm{d}\tau\right),$$

其中 $V(t)=\int_0^t\|\partial_x v(\tau)\|_{L^{\infty}}\mathrm{d}\tau$。

## 3. Blow-Up 准则

**定理 3.1** 假设 $h_0=\left(1-\partial_x^2\right)\left(4-\partial_x^2\right)u_0\in H^{s}(R),s>\frac{1}{2}$，且 $h$ 是方程(3)对应的解。如果 $T_{h_0}^{*}>0$ 是解 $h$ 的最大存在时间，那么有

$$T_{h_0}^{*}<\infty\Rightarrow\int_0^{T_{h_0}^{*}}\|h(\tau)\|_{L^{\infty}}\mathrm{d}\tau=\infty. \tag{8}$$

根据方程(3)，我们得到

$$h_t+uh_x=-bu_xh. \tag{9}$$

**引理 3.2** 方程(3)满足引理 2.3 的四个条件。

证明：对于 $\frac{1}{2}<s<1$，由第一个 Moser 型估计(4)，有

$$\|u_xh\|_{H^{s}}\le C\left(\|u_x\|_{H^{s}}\|h\|_{L^{\infty}}+\|u_x\|_{L^{\infty}}\|h\|_{H^{s}}\right). \tag{10}$$

因为

$$\hat{h}=\mathcal{F}\left(4u-5u_{xx}+u_{xxxx}\right)=\mathcal{F}\left[\left(1-\partial_x^2\right)\left(4-\partial_x^2\right)u\right]=\left(1+\xi^2\right)\left(4+\xi^2\right)\hat{u},$$

所以

$$\hat{u}=\frac{1}{1+\xi^2}\cdot\frac{1}{4+\xi^2}\hat{h},$$

于是得到

$$\hat{u}_x=i\xi\hat{u}=\frac{i\xi}{1+\xi^2}\cdot\frac{1}{4+\xi^2}\hat{h},$$

因此，我们有

$$\begin{aligned}\|u_x\|_{H^s} &= \left[\int_R |\xi|^{2s} |\hat{u}_x|^2 \mathrm{d}\xi\right]^{\frac{1}{2}} \\ &= \left[\int_R |\xi|^{2s} \left|\frac{i\xi}{1+\xi^2}\cdot\frac{1}{4+\xi^2}\hat{h}\right|^2 \mathrm{d}\xi\right]^{\frac{1}{2}} \\ &= \left[\int_R |\xi|^{2s}\cdot\frac{\xi^2}{\left(1+\xi^2\right)^2}\cdot\frac{1}{\left(4+\xi^2\right)^2}\left|\hat{h}\right|^2 \mathrm{d}\xi\right]^{\frac{1}{2}} \\ &\le \left[\int_R |\xi|^{2s} \left|\hat{h}\right|^2 \mathrm{d}\xi\right]^{\frac{1}{2}} \\ &= \|h\|_{H^s}.\end{aligned} \tag{11}$$

此外，

$$u_x = \partial_x\left\{\left[\left(1-\partial_x^2\right)\left(4-\partial_x^2\right)\right]^{-1} h\right\} = \partial_x \nu * h, \tag{12}$$

其中

$$\nu = \nu_1 * \nu_2 = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-|x|} * \frac{1}{4}\mathrm{e}^{-2|x|} = \frac{1}{8}\int_R \mathrm{e}^{-|x-y|}\mathrm{e}^{-2|y|}\mathrm{d}y,$$

故有

$$\partial_x \nu = \frac{1}{8}\int_R -sign(x-y)\mathrm{e}^{-|x-y|}\cdot\mathrm{e}^{-2|y|}\mathrm{d}y.$$

Young 不等式意味着

$$\|u_x\|_{L^\infty} \le \|\partial_x \nu\|_{L^1}\|h\|_{L^\infty} \le C\|h\|_{L^\infty}. \tag{13}$$

结合(11)和(13)，对于 $\frac{1}{2}<s<1$，式子(10)可以整理为

$$\|u_x h\|_{H^s} \le C\|h\|_{H^s}\|h\|_{L^\infty}, \tag{14}$$

由 Sobolev 嵌入不等式，当 $\frac{1}{2}<s<1$ 时，有

$$\|u_x\|_{L^\infty} \le C\|h\|_{L^\infty} \le C\|h\|_{H^s}. \tag{15}$$

因此，对于 $\frac{1}{2}<s<1$，以下结论成立：

$$h_0 \in H^s(R), \qquad u_x \in L^1\left([0,T];L^\infty(R)\right),$$

$$u_x h \in L^1\left([0,T];H^s(R)\right), \quad h \in L^\infty\left([0,T];H^s(R)\right)\cap C\left([0,T];S'(R)\right);$$

同理，对于 $1\le s<2$，我们有

$$\partial_x h_0 \in H^{s-1}(R), \qquad u_x \in L^1\left([0,T];L^\infty(R)\right),$$

$$u_x h_x + u_{xx}h \in L^1\left([0,T];H^{s-1}(R)\right), \quad \partial_x h \in L^\infty\left([0,T];H^{s-1}(R)\right)\cap C\left([0,T];S'(R)\right);$$

并且对于 $s\ge 2$，以下结论成立。

$$\partial_x^k h_0 \in H^{s-k}(R), \qquad \sum_{l=0}^{k-1} C_k^l \partial_x^{k-1} u \partial_x^{l+1} h + \partial_x^k\left(u_x h\right) \in L^1\left([0,T];H^{s-k}(R)\right),$$

$$u_x \in L^1\left([0,T];L^\infty(R)\right),\ \partial_x^k h \in L^\infty\left([0,T];H^{s-k}(R)\right)\cap C\left([0,T];S'(R)\right).$$

得证。

下面我们将分三步来证明定理 3.1。

第一步 对于 $s \in \left(\frac{1}{2},1\right)$，对等式(9)应用引理 2.3，我们得到对所有 $0<t<T_{h_0}^*$，

$$\|h(t)\|_{H^s} \le \|h_0\|_{H^s} + C\int_0^t \|u_x(\tau)\|_{L^\infty} \|h(\tau)\|_{H^s}\,\mathrm{d}\tau + C\int_0^t \|u_x h(\tau)\|_{H^s}\,\mathrm{d}\tau. \tag{16}$$

将(13)和(14)代入(16)，有

$$\|h(t)\|_{H^s} \le \|h_0\|_{H^s} + C\int_0^t \|h(\tau)\|_{L^\infty} \|h(\tau)\|_{H^s}\,\mathrm{d}\tau, \tag{17}$$

根据 Gronwall 不等式，对任意的 $0<t<T_{h_0}^*$，

$$\|h(t)\|_{H^s} \le \|h_0\|_{H^s}\,\mathrm{e}^{C\int_0^t \|h(\tau)\|_{L^\infty}\mathrm{d}\tau}, \tag{18}$$

所以，如果最大存在时间 $T_{h_0}^* < \infty$ 满足 $\int_0^{T_{h_0}^*} \|h(\tau)\|_{L^\infty}\mathrm{d}\tau < \infty$，那么(18)意味着

$$\limsup_{t\to T_{h_0}^*} \|h(t)\|_{H^s} < \infty. \tag{19}$$

这与最大存在时间 $T_{h_0}^* < \infty$ 的假设相矛盾。对于 $s \in \left(\frac{1}{2},1\right)$，这就完成了定理 3.1 的证明。

第二步 对于 $s \in [1,2)$，对(9)关于 $x$ 求一阶导数，得到

$$\partial_t(h_x) + u\partial_x(h_x) = -(b+1)u_x h_x - b u_{xx} h, \tag{20}$$

对(20)应用引理 2.3，有

$$\|\partial_t h(t)\|_{H^{s-1}} \le \|\partial_t h_0\|_{H^{s-1}} + C\int_0^t \|u_x(\tau)\|_{L^\infty} \|\partial_x h(\tau)\|_{H^{s-1}}\,\mathrm{d}\tau + C\int_0^t \left(\|u_x h_x(\tau)\|_{H^{s-1}} + \|u_{xx} h(\tau)\|_{H^{s-1}}\right)\mathrm{d}\tau. \tag{21}$$

由式(5)，(11)和(13)，得到

$$\|u_x \partial_x h\|_{H^{s-1}} \le C\left(\|u_x\|_{H^s}\|h\|_{L^\infty} + \|u_x\|_{L^\infty}\|\partial_x h\|_{H^{s-1}}\right) \le C\|h\|_{L^\infty}\|h\|_{H^s}. \tag{22}$$

由 $h = 4u - 5u_{xx} + u_{xxxx}$，故下列不等式成立

$$\begin{aligned}\|u_{xx}\|_{L^\infty} &\le C\left(\|u\|_{L^\infty} + \|u_{xxxx}\|_{L^\infty} + \|h\|_{L^\infty}\right)\\ &= C\left(\|v * h\|_{L^\infty} + \|\partial_x^4 v * h\|_{L^\infty} + \|h\|_{L^\infty}\right)\\ &\le C\left(\|v\|_{L^1}\|h\|_{L^\infty} + \|\partial_x^4 v\|_{L^1}\|h\|_{L^\infty} + \|h\|_{L^\infty}\right)\\ &\le C\|h\|_{L^\infty}.\end{aligned} \tag{23}$$

利用式子(11)，得到

$$\|u_{xx}\|_{H^{s-1}} = \|u_x\|_{H^s} \le C\|h\|_{H^s}. \tag{24}$$

根据(4)，并结合(23)和(24)，有

$$\|u_{xx} h\|_{H^{s-1}} \le C\left(\|u_{xx}\|_{L^\infty}\|h\|_{H^{s-1}} + \|u_{xx}\|_{H^{s-1}}\|h\|_{L^\infty}\right) \le C\|h\|_{L^\infty}\|h\|_{H^s}. \tag{25}$$

根据(13)，(22)和(25)，(21)化为

$$\|h(t)\|_{H^s} \le \|h_0\|_{H^s} + C\int_0^t \|h(\tau)\|_{L^\infty} \|h(\tau)\|_{H^s} \,\mathrm{d}\tau.$$

故对于$1 \le s < 2$，(18)依然成立。重复第一步中相同的过程，我们发现对于$1 \le s < 2$，定理 3.1 成立。

第三步　设$2 \le k \in N$。通过归纳法，我们假设(8)在$k-1 \le s < k$时成立，并且证明了它在$k \le s < k+1\,(2 \le k \in N)$时也成立。

对(9)关于$x$求$k$阶导数，得到

$$\partial_t \partial_x^k h + u\partial_x\left(\partial_x^k h\right) = -\sum_{l=0}^{k-1} C_k^l \partial_x^{k-1} u \partial_x^{l+1} h - b\partial_x^k\left(u_x h\right), \tag{26}$$

对(26)再次应用引理 2.3，意味着

$$\begin{aligned}\left\|\partial_x^k h(t)\right\|_{H^{s-k}} &\le \left\|\partial_x^k h_0\right\|_{H^{s-k}} + C\int_0^t \left\|u_x(\tau)\right\|_{L^\infty} \left\|\partial_x^k h(\tau)\right\|_{H^{s-k}} \mathrm{d}\tau \\ &\quad + C\int_0^t \left\|\left(\sum_{l=0}^{k-1} C_k^l \partial_x^{k-1} u \partial_x^{l+1} h + b\partial_x^k\left(u_x h\right)\right)(\tau)\right\|_{H^{s-k}} \mathrm{d}\tau.\end{aligned} \tag{27}$$

利用(4)，(11)和(13)，我们推出

$$\left\|b\partial_x^k\left(u_x h\right)\right\|_{H^{s-k}} \le C\left(\|u_x\|_{H^s}\|h\|_{L^\infty} + \|u_x\|_{L^\infty}\|h\|_{H^s}\right) \le C\|h\|_{L^\infty}\|h\|_{H^s}. \tag{28}$$

利用(5)和 Sobolev 嵌入不等式，我们得到

$$\begin{aligned}&\left\|\sum_{l=0}^{k-1} C_k^l \partial_x^{k-1} u \partial_x^{l+1} h\right\|_{H^{s-k}} \\ &\le C\sum_{l=0}^{k-1} C_k^l \left(\|u\|_{H^{s-k+k-l+1}} \left\|\partial_x^l h\right\|_{L^\infty} + \left\|\partial_x^{k-1} u\right\|_{L^\infty} \|h\|_{H^{s-k+l+1}}\right) \\ &\le C\sum_{l=0}^{k-1} C_k^l \left(\|u\|_{H^{s-l+1}} \|h\|_{H^{l+\frac{1}{2}+\varepsilon_0}} + \|u\|_{H^{k-l+\frac{1}{2}+\varepsilon_0}} \|h\|_{H^{s-k+l+1}}\right) \\ &\le C_k \|h\|_{H^{k-\frac{1}{2}+\varepsilon_0}} \|h\|_{H^s},\end{aligned} \tag{29}$$

其中，常数$\varepsilon_0 \in \left(0, \frac{1}{4}\right)$，使得$H^{\frac{1}{2}+\varepsilon_0}(R)$嵌入到$L^\infty(R)$成立。将(13)，(28)和(29)代入到(27)，得到

$$\|h(t)\|_{H^s} \le \|h_0\|_{H^s} + C\int_0^t \|h(\tau)\|_{L^\infty}\|h(\tau)\|_{H^s}\,\mathrm{d}\tau + C\int_0^t \left(\|h(\tau)\|_{H^{k-\frac{1}{2}+\varepsilon_0}} + \|h(\tau)\|_{L^\infty}\right)\|h(\tau)\|_{H^s}\,\mathrm{d}\tau,$$

那么

$$\|h(t)\|_{H^s} \le \|h_0\|_{H^s} + C\int_0^t \|h(\tau)\|_{H^{k-\frac{1}{2}+\varepsilon_0}} \|h(\tau)\|_{H^s}\,\mathrm{d}\tau. \tag{30}$$

在这里，我们使用了 Sobolev 嵌入定理，对于$k \ge 2$，$H^{k-\frac{1}{2}+\varepsilon_0}(R)$可嵌入到$L^\infty(R)$中。

应用 Gronwall 不等式，整理(30)，得到

$$\|h(t)\|_{H^s} \le \|h_0\|_{H^s}\, \mathrm{e}^{C\int_0^t \|h(\tau)\|_{H^{k-\frac{1}{2}+\varepsilon_0}} \mathrm{d}\tau}, \tag{31}$$

因此，如果最大存在时间$T_{h_0}^* < \infty$满足$\int_0^{T_{h_0}^*} \|h(\tau)\|_{L^\infty} \mathrm{d}\tau < \infty$，根据定理 2.2 中解的唯一性，我们通过归纳假设，我们发现，$\|h(t)\|_{H^{k-\frac{1}{2}+\varepsilon_0}}$在$t \in \left(0, T_{h_0}^*\right)$上是一致有界的，又根据(31)，得到

$$\limsup_{t\to T_{h_0}^*}\|h(t)\|_{H^s}<\infty.$$

这就产生了矛盾。

因此，步骤 1 到 3 完成了定理 3.1 的证明。

## 4. 结论

本文研究了一类广义的五阶 Camassa-Holm 方程的爆破准则。通过输运方程理论和 Moser 型估计，利用归纳法我们得到了该类方程在有限时间内解的爆破的必要条件。本文的研究结果丰富了广义的 Camassa-Holm 方程的解的爆破性质。

## 参考文献


[1] Camassa, R. and Holm, D.D. (1993) An Integrable Shallow Water Equation with Peaked Solitons. *Physical Review Letters*, **71**, 1661-1664. https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.71.1661

[2] Constantin, A. and Escher, J. (2007) Particle Trajectories in Solitary Water Waves. *Bulletin of the American Mathematical Society*, **44**, 423-431. https://doi.org/10.1090/S0273-0979-07-01159-7

[3] Chen, A., Deng, T. and Qiao, Z. (2020) Stability of Peakons and Periodic Peakons for a Nonlinear Quartic Camassa-Holm Equation.

[4] El Dika, K. and Molinet, L. (2009) Stability of Multipeakons. *Annales de l'Institut Henri Poincaré C*, *Analyse non linéaire*, **26**, 1517-1532. https://doi.org/10.1016/j.anihpc.2009.02.002

[5] Lenells, J. (2005) Traveling Wave Solutions of the Camassa-Holm Equation. *Journal of Differential Equations*, **217**, 393-430. https://doi.org/10.1016/j.jde.2004.09.007

[6] Gui, G., Yue, L. and Olver, P.J. (2013) Wave-Breaking and Peakons for a Modified Camassa-Holm Equation. *Communications in Mathematical Physics*, **319**, 731-759. https://doi.org/10.1007/s00220-012-1566-0

[7] Gui, G., Liu, Y. and Luo, T. (2018) Model Equations and Traveling Wave Solutions for Shallow-Water Waves with the Coriolis Effect. *Journal of Nonlinear Science*, **29**, 993-1039. https://doi.org/10.1007/s00332-018-9510-x

[8] Constantin, A. and Escher, J. (1998) Wave Breaking for Nonlinear Nonlocal Shallow Water Equations. *Acta Mathematica*, **181**, 229-243. https://doi.org/10.1007/BF02392586

[9] Constantin, A. and Escher, J. (2000) On the Blow-Up Rate and the Blow-Up Set of Breaking Waves for a Shallow Water Equation. *Mathematische Zeitschrift*, **233**, 75-91. https://doi.org/10.1007/PL00004793

[10] Constantin, A. (2000) Existence of Permanent and Breaking Waves for a Shallow Water Equation: A Geometric Approach. *Annales de l'Institut Fourier*, **50**, 321-362. https://doi.org/10.5802/aif.1757

[11] Constantin, A. and Escher, J. (1998) Global Existence and Blow-Up for a Shallow Water Equation. *Annali della Scuola normale superiore di Pisa*, *Classe di scienze*, **26**, 303-328.

[12] Mckean, H.P. (2010) Breakdown of the Camassa-Holm Equation. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, **57**, 416-418. https://doi.org/10.1002/cpa.20003

[13] Constantin, A. (2000) On the Blow-Up of Solutions of a Periodic Shallow Water Equation. *Journal of Nonlinear Science*, **10**, 391-399. https://doi.org/10.1007/s003329910017

[14] Gui, G. and Liu, Y. (2015) On the Global Existence and Wave-Breaking Criteria for the Two-Component Camassa-Holm System. *Journal of Functional Analysis*, **258**, 4251-4278. https://doi.org/10.1016/j.jfa.2010.02.008

[15] Tian, L., Zhang, P. and Xia, L. (2011) Global Existence for the Higher-Order Camassa-Holm Shallow Water Equation. *Nonlinear Analysis Theory Methods & Applications*, **74**, 2468-2474. https://doi.org/10.1016/j.na.2010.12.002