

一种笛卡尔乘积网络的泛圈性研究

张治成

石河子大学理学院数学系, 新疆 石河子
Email: zhangzhichengly@163.com

收稿日期: 2021年4月27日; 录用日期: 2021年5月11日; 发布日期: 2021年5月31日

摘要

网络中子图的可嵌入性是度量网络性能的一个重要指标。圈作为网络拓扑中一类重要的子图, 其可嵌入性可通过图的泛圈性来衡量。笛卡尔乘积网络 $DSCC(k) \times C_m$ 是在2018年被提出的一种新互连网络。在之前文献研究结果的基础上, 文中进一步研究得到 $DSCC(0) \times C_3$ 是泛圈的, $DSCC(0) \times C_m (m > 3)$ 是边偶泛圈的, $DSCC(k) \times C_m (k > 0, m \geq 3)$ 是泛圈的。

关键词

笛卡尔乘积网络, 互连网络, $DSCC(k) \times C_m$, Hamilton图, 泛圈性

The Pancyclicity Study of a Cartesian Product Network

Zhicheng Zhang

Department of Mathematics, College of Science, Shihezi University, Shihezi Xinjiang
Email: zhangzhichengly@163.com

Received: Apr. 27th, 2021; accepted: May 11th, 2021; published: May 31st, 2021

Abstract

The embeddability of neutron graph is an important index to measure the performance of network. As an important kind of subgraphs of network topology, the embeddability of circles can be measured by the pancyclicity property of graphs. Cartesian product network $DSCC(k) \times C_m$ is a new interconnecting network proposed in 2018. Based on the results of previous literature, this

paper further finds that $DSCC(0) \times C_3$ is pancyclic, $DSCC(0) \times C_m (m > 3)$ is edge bipancyclic and $DSCC(k) \times C_m (k > 0, m \geq 3)$ is pancyclic.

Keywords

Cartesian Product Network, Interconnection Network, $DSCC(k) \times C_m$, Hamilton Graph, Pancyclicity

Copyright © 2021 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

互连网络是超级计算机的重要组成部分，互连网络的结构和性质是超级计算机研究的重要课题。在设计 and 选择一个互连网络的拓扑结构时，Hamilton 性，泛圈性，连通度，直径等指标对分析网络性能发挥了重要作用[1]。随着系统性能的需求越来越高，处理器核之间的互连架构必须能够提供具有较低延迟和高吞吐率的服务，并且具有良好的可扩展性[2]。传统的互连架构已经难以满足现今系统的性能需求，所以片上互连网络便成为当前研究的热点课题之一。

在分析网络拓扑结构时，我们通常将互连网络拓扑结构模型化为一个无向图，图的顶点对应处理器，图的边对应网络的通讯链路[1] [2] [3]。因而在研究互连网络的拓扑结构时，往往通过研究一个无向图来深入研究互连网络。互连网络拓扑的性能可以通过图的性能和指标来度量，如 Hamilton 性、嵌入性、容错性、泛圈性等[1]-[14]。因此，图论是设计和分析互连网络最基本且强有力的工具。十二面体最早是随着哈密尔顿问题引起人们关注的，起源于 1859 年爱尔兰数学家威廉·哈密尔顿(Sir William Hamilton)提出一种名为“周游世界”的游戏。将十二面体投影到平面上：十二面体的顶点与棱分别对应图的顶点和边，就得到一个正十二面体图。十二面体有许多好的性质，比如它是三正则三连图、是 Hamilton 图等。笛卡尔乘积图是一类重要的互连网络拓扑，由于它具有较好的正则性、连通性、点可迁性、Hamilton 性等，从而在大规模互连网络研究中得到了广泛的关注[7]。

图嵌入是一个客图到一个主图的映射，它保留了一些被要求的性质。如果一个客图能够嵌入到一个主图，那就意味着在客图网络上能够执行的算法同样能够在主图网络上模拟执行。在众多的互连网络拓扑中，路和圈是最为基础，也最为重要的两种网络拓扑结构。在路和圈网络中，容易设计出简单而又高效的路由算法。因此，在设计和选择互连网络时路和圈的可嵌入性是一个非常重要的考虑因素。邦迪提出了泛圈性问题，即寻找所有可能长度的圈。泛圈性是判断一个网络拓扑是否适合将不同长度的圈映射到其上的重要测量值。圈的嵌入是对互连网络的图嵌入问题研究的重点之一，它可以用图的泛圈性和边泛圈性来衡量[2]。

在大规模并行系统中，互连网络在硬件成本、通信性能、高效算法和容错能力方面扮演着重要的角色。近年来，学者们提出了许多互连网络拓扑。笛卡尔乘积网络 $DSCC(k) \times C_m$ 是师海忠提出的一类重要的互连网络拓扑，由于它具有较好的正则性、连通性、Hamilton 性等性质，从而为大规模超级计算机系统和互连网络的优化设计提供了理论参考价值，得到了广泛的关注和研究。

2. 基本概念

定义 1 [1] [2]: 图 G 是一点边连续交替出现的序列, $w = v_0 e_1 v_1 e_2 v_2 \cdots e_n v_n$ 称为图 G 的一个途径, 其中 v_0, v_n 分别称为途径的起点和终点, w 上其余顶点称为中途点, 图 G 中边不重复出现的途径称为迹。

图 G 中起点和终点相同的途径称为闭途径, 边不重复出现的闭途径称为闭迹(也称为回路)。中途点不重复的闭途径称为圈。

定义 2 [2]: 包含图 G 的每个顶点的圈称为图 G 的 Hamilton 圈, 具有 Hamilton 圈的图称为 Hamilton 图。

定义 3 [2]: 设 G 是 n 阶图, 如果 G 中存在任意长为 $l(3 \leq l \leq n)$ 的圈, 则称 G 是泛圈的; 如果在 G 中, 对于任意一个顶点 v , 存在任意长为 $l(3 \leq l \leq n)$ 的包含 v 的圈, 则 G 称为点泛圈的; 如果在 G 中, 对于任意一条边 e , 存在任意长为 $l(3 \leq l \leq n)$ 的包含 e 的圈, 则 G 称为边泛圈的。在一个 n 阶二部图 G 中, 如果 G 中存在任意长为偶数 $l(4 \leq l \leq n)$ 的圈, 则 G 称为偶泛圈的; 如果在 G 中, 对于任意一个顶点 v , 存在任意长为偶数 $l(4 \leq l \leq n)$ 的包含 v 的圈, 则 G 称为点偶泛圈的; 如果在 G 中, 对于任意一条边 e , 存在任意长为偶数 $l(4 \leq l \leq n)$ 的包含 e 的圈, 则 G 称为边偶泛圈的。

定义 4 [4]: 将十二面体连通圈网络中的每个顶点用一个三角形代替, 所得到的新网络叫做 1 次十二面体-师连通圈网络, 记为 $DSCC(1)$; 然后再将 1 次十二面体-师连通圈网络中的每个顶点用一个三角形代替, 得到的新网络叫做 2 次十二面体-师连通圈网络, 记为 $DSCC(2)$; 依次代替 k 次, 得到的新网络叫做 k 次十二面体-师连通圈网络, 记为 $DSCC(k)$ 。

定义 5 [7]: 设 $G_1 = (V_1, E_1)$ 和 $G_2 = (V_2, E_2)$ 是两个无向图, G_1 和 G_2 的笛卡尔乘积是无向图, 记为 $G_1 \times G_2$ 。其中 $V(G_1 \times G_2) = V_1 \times V_2 = \{(v_1, v_2) | v_1 \in V_1 \text{ 且 } v_2 \in V_2\}$, 存在一条顶点 $x_1 x_2$ 与顶点 $y_1 y_2$ 之间的边(其中 $x_1, y_1 \in V(G_1), x_2, y_2 \in V(G_2)$)当且仅当或者 $x_1 = y_1$ 且 $x_2 y_2 \in E(G_2)$, 或者 $x_2 = y_2$ 且 $x_1 y_1 \in E(G_1)$ 。类似, 可以定义笛卡尔乘积 $G_1 \times G_2 \times \cdots \times G_n$ 。

定义 6 [7]: 将 k 次十二面体-师连通圈网络 $DSCC(k)$ 与一个长度为 m 的圈 C_m 作笛卡尔乘积生成的新网络, 我们记为 $DSCC(k) \times C_m (k = 0, 1, 2, \dots, m = 3, 4, \dots)$ 。

3. 主要结果

引理 1 [7]: $DSCC(0) \times C_3$ 是边偶泛圈的。

引理 2 [7]: $DSCC(k) \times C_m$ 是边偶泛圈的。

在引理 1 和引理 2 的基础上, 我们进一步探究得到笛卡尔乘积网络 $DSCC(k) \times C_m$ 的泛圈性如下:

定理 1: $DSCC(0) \times C_3$ 是泛圈的。

证明: $DSCC(0) \times C_3$ 如图 1 所示, 在 $DSCC(0) \times C_3$ 中存在任意长为 $l(3 \leq l \leq 60)$ 的圈 C_l 如下:

C_3 : 01-21-11-01;

C_4 : 将 C_3 中的 21 变为 02~12;

C_5 : 将 C_4 中的 12 变为 22-21;

C_6 : 在 C_5 中 02~22 之间增加顶点 12;

C_7 : 将 C_6 中的 12 变为 03-23;

C_8 : 在 C_7 中 03~23 之间增加顶点 13;

C_9 : 将 C_8 中的 13 变为 04~24;

C_{10} : 在 C_9 中 04~24 之间增加顶点 14;

C_{11} : 将 C_{10} 中的 14 变为 05~25;

- C_{12} : 在 C_{11} 中 05~25 之间增加顶点 15;
- C_{13} : 将 C_{12} 中的 15 变为 06~26;
- C_{14} : 在 C_{13} 中 06~26 之间增加顶点 16;
- C_{15} : 将 C_{14} 中的 16 变为 07~27;
- C_{16} : 在 C_{15} 中 07~27 之间增加顶点 17;
- C_{17} : 将 C_{16} 中的 17 变为 08~28;
- C_{18} : 在 C_{17} 中 08~28 之间增加顶点 18;
- C_{19} : 将 C_{18} 中的 18 变为 09~29;
- C_{20} : 在 C_{19} 中 09~29 之间增加顶点 19;

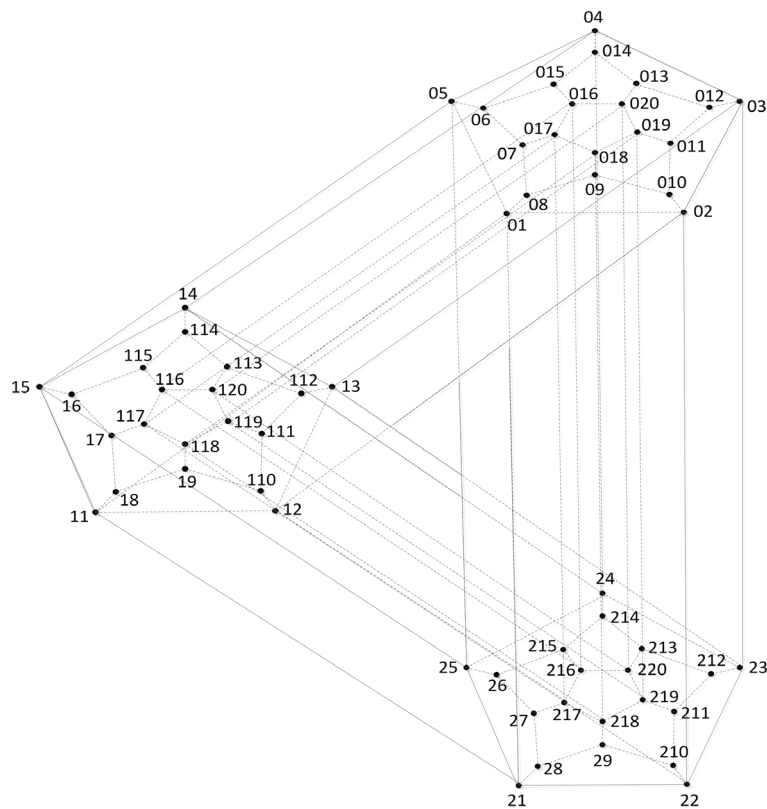


Figure 1. $DSCC(0) \times C_3$
 图 1. $DSCC(0) \times C_3$

- C_{21} : 将 C_{20} 中的 19 变为 010~210;
- C_{22} : 在 C_{21} 中 010~210 之间增加顶点 110;
- C_{23} : 将 C_{22} 中的 110 变为 011~211;
- C_{24} : 在 C_{23} 中 011~211 之间增加顶点 111;
- C_{25} : 将 C_{24} 中的 111 变为 012~212;
- C_{26} : 在 C_{25} 中 012~212 之间增加顶点 112;
- C_{27} : 将 C_{26} 中的 112 变为 013~213;
- C_{28} : 在 C_{27} 中 013~213 之间增加顶点 113;

- C_{29} : 将 C_{28} 中的 113 变为 014~214;
 C_{30} : 在 C_{29} 中 014~214 之间增加顶点 114;
 C_{31} : 将 C_{30} 中的 114 变为 015~215;
 C_{32} : 在 C_{31} 中 015~215 之间增加顶点 115;
 C_{33} : 将 C_{32} 中的 115 变为 016~216;
 C_{34} : 在 C_{33} 中 016~216 之间增加顶点 116;
 C_{35} : 将 C_{34} 中的 116 变为 017~217;
 C_{36} : 在 C_{35} 中 017~217 之间增加顶点 117;
 C_{37} : 将 C_{36} 中的 117 变为 018~218;
 C_{38} : 在 C_{37} 中 018~218 之间增加顶点 118;
 C_{39} : 将 C_{38} 中的 118 变为 019~219;
 C_{40} : 在 C_{39} 中 019~219 之间增加顶点 119;
 C_{41} : 将 C_{40} 中的 119 变为 020~220;
 C_{42} : 在 C_{41} 中 020~220 之间增加顶点 120;
 C_{43} : 01-08-09-018-019-020-016-017-07-06-015-014-013-012-011-010-02-03-04-05-15-11-12-22-210-211-219-220-216-217-218-29-28-27-26-215-214-213-212-23-24-25-21-01;
 C_{44} : 将 C_{43} 中的 11 变为 14-13;
 C_{45} : 01-08-09-018-019-020-016-017-07-06-015-014-013-012-011-010-02-03-04-05-15-14-13-23-212-213-220-216-217-218-219-211-210-29-28-27-26-215-214-24-25-21-22-12-11-01;
 C_{46} : 01-08-09-018-019-020-016-017-07-06-015-014-013-012-011-010-02-03-04-05-15-16-17-18-11-12-22-210-211-219-220-216-217-218-29-28-27-26-215-214-213-212-23-24-25-21-01;
 C_{47} : 将 C_{46} 中的 11 变为 19~110;
 C_{48} : 将 C_{47} 中的 18 变为 117~118;
 C_{49} : 将 C_{48} 中的 19 变为 119-111;
 C_{50} : 将 C_{49} 中 118 变为 116~120;
 C_{51} : 将 C_{50} 中的 111 变为 118-19;
 C_{52} : 将 C_{51} 中的 17-117-116-120 变为 115-114-113-112-111;
 C_{53} : 将 C_{52} 中的 112-111-119-118-19 变为 120-116-117-118-119-111;
 C_{54} : 将 C_{53} 中的 16-115-114-113-120-116-117-118-119-11 变为 14-13-112-113-114-115-16-17-117-118-19;
 C_{55} : 将 C_{54} 中的 114 变为 120-116;
 C_{56} : 将 C_{55} 中的 113-120-116-115-16-17-117-118 变为 111-119-120-113-114-115-16-17-18;
 C_{57} : 将 C_{56} 中的 18 变为 117~118;
 C_{58} : 将 C_{57} 中的 14-13-112-111-119-120-113-114-115-16-17-117-118-19 变为 11-18-19-118-119-120-116-117-17-16-115-114-113-112-111;
 C_{59} : 将 C_{58} 中的 19-118-119-120-116-117-17-16-115-114-113-112 变为 17-16-115-114-14-13-112-113-120-116-117-118-119;
 C_{60} : 01-08-09-018-019-020-016-017-07-06-015-014-013-012-011-010-02-03-04-05-15-14-13-23-212-213-220-216-217-218-219-211-210-29-28-27-26-215-214-24-25-21-22-12-110-111-112-113-114-115-16-17-117-116-120-119-118-19-18-11-01。

所以, $DSCC(k) \times C_m$ 是泛圈的。

定理 2: $DSCC(0) \times C_m (m > 3)$ 是边偶泛圈的。

证明: 由引理 2 知, 显然 $DSCC(0) \times C_m (m > 3)$ 是边偶泛圈的。

定理 3: $DSCC(k) \times C_m (k > 0, m \geq 3)$ 是泛圈的。

证明: 由泛圈性的定义知, 我们只需证明在 $DSCC(k) \times C_m (k > 0, m \geq 3)$ 中存在任意长为 $l (3 \leq l \leq 20m \times 3^k)$ 的圈即可。根据 l 的奇偶性, 我们对 l 进行分情况讨论:

情形 1: 当 l 为偶数时, 令 $l = p$ 。

下面证明 $DSCC(k) \times C_m (k > 0, m \geq 3)$ 中存在任意长为偶数 $p (3 \leq p \leq 20m \times 3^k)$ 的偶圈。根据引理 2, 我们知道 $DSCC(k) \times C_m$ 是边偶泛圈的, 故也是偶泛圈的, 所以在 $DSCC(k) \times C_m$ 中任意长为偶数 p 的偶圈都是存在的。

情形 2: 当 l 为奇数时, 令 $l = q$ 。

下面证明 $DSCC(k) \times C_m (k > 0, m \geq 3)$ 中存在任意长为奇数 $q (3 \leq q \leq 20m \times 3^k)$ 的奇圈。

当 $q = 3$ 时, 因为 $k > 0$, 所以在 $DSCC(k) \times C_m$ 中显然存在 3 长的圈 C_3 。

当 $q > 3$ 时, 我们来证明在 $DSCC(k) \times C_m$ 中存在长为 $q (5 \leq q \leq 20m \times 3^k - 1)$ 的任意奇圈 C_q 。由情形 1 知, $DSCC(k) \times C_m$ 中任意长为偶数 p 的偶圈都存在, 我们任取其中一个偶圈 C_p , 通过 C_p 来构造奇圈 $C_q = C_{p+1}$ 。首先, 因为 $DSCC(k) \times C_m$ 中的每个顶点都是某一个三角形的顶点, 所以偶圈 C_p 中的每个顶点也都属于某一个三角形。其次, 在构造偶圈 C_p 时, 我们总能找到只包含某一个三角形中两个顶点的偶圈 C_p 存在。假设 C_p 包含某个三角形的顶点 v_1 和 v_2 , 现在我们把该三角形的另一个顶点 v_3 嵌入到 v_1 和 v_2 之间, 于是就得到奇圈 $C_q = C_{p+1}$ 。由 p 的任意性知, 故在 $DSCC(k) \times C_m$ 中能到任意长为 $q (5 \leq q \leq 20m \times 3^k - 1)$ 的奇圈。

综合以上两种情形, $DSCC(k) \times C_m (k > 0, m \geq 3)$ 中任意长度的圈 $l (3 \leq l \leq 20m \times 3^k)$ 均存在, 故 $DSCC(k) \times C_m (k > 0, m \geq 3)$ 是泛圈的。

4. 结束语

本文在文献[7]研究结论的基础上, 通过进一步讨论, 对笛卡尔乘积网络 $DSCC(k) \times C_m$ 的泛圈性给出了更完善的结果。最终证明得到 $DSCC(0) \times C_3$ 是泛圈的, $DSCC(0) \times C_m (m > 3)$ 是边偶泛圈的, $DSCC(k) \times C_m (k > 0, m \geq 3)$ 是泛圈的。关于该网络的泛圈性和其他性质, 还需要我们进一步更深层次的探讨和研究, 来拓宽对这个网络的认识。

参考文献

- [1] Bondy, J.A. and Murty, U.S.R. (2008) Graph Theory. Springer, New York, London.
- [2] Xu, J.M. (2015) A First Course in Graph Theory. Science Press, Beijing.
- [3] Bhavani, K. and Jena, S. (2018) Exchanged Folded Crossed Cube: A New Interconnection Network for Parallel Computation. *Information processing Letters*, **137**, 40-46. <https://doi.org/10.1016/j.ipl.2018.04.017>
- [4] 师海忠, 张治成. k 次十二面体-师连通圈网络[J]. *计算机科学与应用*, 2018, 8(6): 1013-1026.
- [5] Borse, Y.M. and Saraf, J.B. (2018) Existence of 3-Regular Subgraphs in Cartesian Product of Cycles. *AKCE International Journal of Graphs and Combinatorics*, **16**, 332-342. <https://doi.org/10.1016/j.akcej.2018.07.001>
- [6] Darbinyan, S.K.H. (2019) Sufficient Conditions for Hamiltonian Cycles in Bipartite Digraphs. *Discrete Applied Mathematics*, **258**, 87-96. <https://doi.org/10.1016/j.dam.2018.11.024>
- [7] 张治成. 十二面体-师连通圈网络及其笛卡尔乘积网络研究[D]: [硕士学位论文]. 兰州: 西北师范大学数学与统计学院, 2020.
- [8] Shuya, C. (2018) On Degree Sum Conditions for 2-Factors with a Prescribed Number of Cycles. *Discrete Mathematics*,

-
- 341, 2912-2918. <https://doi.org/10.1016/j.disc.2018.06.045>
- [9] Akers, S.B. and Krishnamurthy, B. (1989) A Group-Theoretic Model for Symmetric Interconnection Networks. *IEEE Transactions on Computers*, **38**, 555-566. <https://doi.org/10.1109/12.21148>
- [10] Bogdanowicz, Z.R. (2017) On Decomposition of the Cartesian Product of Directed Cycles into Cycles of Equal Lengths. *Discrete Applied Mathematics*, **299**, 148-150. <https://doi.org/10.1016/j.dam.2017.05.017>
- [11] Lv, H.Z. and Wu, T.Z. (2019) Edge-Disjoint Hamiltonian Cycles of Balanced Hypercubes. *Information Processing Letters*, **144**, 25-30. <https://doi.org/10.1016/j.ipl.2018.12.004>
- [12] Hsu, L.H., Ho, T.Y., Ho, Y.H. and Tsay, C.-W. (2014) Cycles in Cube-Connected Cycles Graphs. *Discrete Applied Mathematics*, **167**, 163-171. <https://doi.org/10.1016/j.dam.2013.11.021>
- [13] Gao, H., Lv, B.J. and Wang, K.S. (2018) Two Lower Bounds for Generalized 3-Connectivity of Cartesian Product Graphs. *Applied Mathematics and Computation*, **338**, 305-313. <https://doi.org/10.1016/j.amc.2018.04.007>
- [14] Li, Q., Shiu, W.C. and Yao, H. (2015) Matching Preclusion for Cube-Connected Cycles. *Discrete Applied Mathematics*, **190-191**, 118-126. <https://doi.org/10.1016/j.dam.2015.04.001>