Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, **2022, 11(1), 9-15**
Published Online January 2022 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2022.111002

带Logistic源的奇异趋化模型解的整体存在性

李　铮，穆丽荣

辽宁师范大学，辽宁　大连

收稿日期：2021年12月4日；录用日期：2021年12月25日；发布日期：2022年1月7日

摘　要

本文考虑带有齐次Numann边界的抛物－抛物趋化系统：$u_t = \Delta u - \chi\nabla\cdot\left(\frac{u}{v^{\alpha}}\nabla v\right) + ku - \mu u^2$，$v_t = \Delta v - v + u$，其中$\alpha, k, \mu > 0$，$\Omega \subset R^n (n \ge 2)$为有界光滑区域。证明得到若$\alpha \in (0,1]$及$\|v_0\|_{L^{\infty}(\Omega)} < \chi^{\frac{1}{1-\alpha}}\sqrt{\frac{n}{2}}$且$\mu > \frac{n-2}{2n}$，则系统存在整体古典解。

关键词

趋化，奇异敏感，整体存在

Global Existence of Solutions to a Singular Chemotaxis System with Logistic Source

Zheng Li, Lirong Mu

Liaoning Normal University, Dalian Liaoning

Received: Dec. 4th, 2021; accepted: Dec. 25th, 2021; published: Jan. 7th, 2022

Abstract

This paper deals with the chemotaxis system with signal-dependent sensitivity and logistic source under homogenous Neumann boundary condition: $u_t = \Delta u - \chi\nabla\cdot\left(\frac{u}{v^{\alpha}}\nabla v\right) + ku - \mu u^2$, $v_t = \Delta v - v + u$, **where** $\alpha, k, \mu > 0$ **and** $\Omega \subset R^n (n \ge 2)$ **is a bounded smooth domain. If** $\alpha \in (0,1]$ **with**

文章引用: 李铮, 穆丽荣. 带 Logistic 源的奇异趋化模型解的整体存在性[J]. 应用数学进展, 2022, 11(1): 9-15.
DOI: 10.12677/aam.2022.111002

$\|v_0\|_{L^\infty(\Omega)} < \chi^{\frac{1}{1-\alpha}}\sqrt{\frac{n}{2}}$ **and** $\mu > \frac{n-2}{2n}$**, then the system admits a globally bounded classical solution.**

Keywords

Chemotaxis, Singular Sensitivity, Global Existence

1. 引言

趋化性是指细胞占据一个空间，由其中不均匀分布的物质产生的化学信号刺激细胞的运动。对细胞的不同研究和实验一直在探索细胞如何引导其自然运动，并根据化学梯度刺激的强度随机改变其运动路线。趋化系统在 1970 年由 Keller 和 Segel 提出，它描述了细胞受化学信号刺激所产生的聚集现象。这一系统在过去几年得到了广泛的研究，相关的趋化模型及生物学背景概述参阅[1]。我们考虑如下的带有奇异灵敏度的趋化模型：

$$\begin{cases} u_t = \Delta u - \chi\nabla\cdot\left(\frac{u}{v}\nabla v\right) + f(u), x\in\Omega, t>0, \\ v_t = \Delta v - v + u, x\in\Omega, t>0, \end{cases} \tag{1.1}$$

其中 $\frac{\chi}{v}$ 是由韦伯－费希纳定律确定的，刻画细胞向化学信号运动的趋化强度。下面介绍关于系统(1.1)的相关结论。若 $f(u)\equiv 0$，当 $n=2$ 时，如果 $\chi<\chi_0$ （$\chi_0>1.01$)或者当 $n\geq 3$ 时，如果 $\chi<\sqrt{\frac{2}{n}}$，则解整体有界[2] [3]。若 $f(u)=ru-\mu u^k$， $r,\mu>0$，当 χ 相对于 r 恰当小，系统(1.1)存在一个全局有界古典解[4]。

对于如下带有奇异灵敏度的模型：

$$\begin{cases} u_t = \Delta u - \chi\nabla\cdot\left(\frac{u}{v^\alpha}\nabla v\right) + f(u), x\in\Omega, t>0, \\ v_t = \Delta v - uv, x\in\Omega, t>0, \end{cases} \tag{1.2}$$

其中 $\chi>0$。该系统可以追溯到 Keller 和 Segel 研究的流动的大肠杆菌游动带的形成。$-uv$ 表示细胞 u 在趋化过程中氧气 v 被消耗，这自然表明 v 在时间上保持有界。关于解的整体存在性，人们对它的研究不如对其信号产生的研究那么广泛。 $f(u)=ru-\mu u^k$ 的存在有助于推导适当的先验估计，并确保经典解或最终正则化的弱解的全局存在。若 $\alpha\in(0,1]$ 且 $f(u)\equiv 0$，当 $\chi>0$，若 $\|v_0\|_{L^\infty(\Omega)}<\chi^{\frac{1}{\alpha-1}}$ 和 $\int_\Omega u_0 < \frac{1-\chi\|v_0\|^{1-\alpha}}{2C_{GN}^4}$，则系统(1.2)存在整体解[5]。若 $\alpha=1$ 且 $f(u)\equiv ru-\mu u^2$，对于 $n\geq 2$，当 $0<\chi<\sqrt{\frac{2}{n}}$ 且 $\mu>\frac{n-2}{n}$ 时，系统(1.2)存在全局经典解；对于 $n=1$，当 $\chi<2$ 且 $\mu>0$ 时，系统(1.2)存在整体有界解[6]，另外，在二维情况下，[7]证明了 $\chi>1$ 及 $\mu>0$ 时古典解的整体存在。

本文将考虑如下的带有奇异灵敏度和 logistic 源的趋化系统：

$$\begin{cases} u_t = \Delta u - \chi \nabla \cdot \left(\dfrac{u}{v^{\alpha}} \nabla v \right) + ku - \mu u^2, x \in \Omega, t > 0, \\ v_t = \Delta v - uv, x \in \Omega, t > 0, \\ \partial_{\nu} u = \partial_{\nu} v = 0, x \in \partial\Omega, t > 0, \\ u(\cdot,0) = u_0, v(\cdot,0) = v_0, x \in \Omega, \end{cases} \tag{1.3}$$

其中 $\chi,\alpha,k,\mu > 0$。$\Omega \in \mathbb{R}^2 (n \ge 2)$ 是光滑有界区域。初始值满足

$$u_0 \subset C^0(\bar{\Omega}), v_0 \subset W^{1,\infty}(\Omega), u_0 \ge 0, v_0 \ge 0. \tag{1.4}$$

我们将证明系统(1.3)古典解的整体存在性。

定理 1.1. 设 $n \ge 2$ 及 $\alpha \in (0,1]$。若 $\|v_0\|_{L^\infty(\Omega)} < \chi^{\frac{1}{1-\alpha}} \sqrt{\dfrac{n}{2}}$ 且 $\mu > \dfrac{n-2}{2n}$，则系统存在整体古典解。

2. 古典解的整体存在性

在这一章节中，我们主要证明古典解的整体存在性。首先陈述方程(1.3)古典解的局部存在性，证明的具体细节见文献[7]。

引理 2.1. 令 $\alpha > 0$，初值 (u_0, v_0) 满足(1.4)。则方程(1.3)存在 $(u,v) \in \left(C^0(\bar{\Omega} \times (0,T_{\max})) \cap C^{2,1}(\bar{\Omega} \times (0,T_{\max}))\right)^2$ 在古典解意义下满足系统(1.4)。此外，$T_{\max} = \infty$ 或者 $\limsup_{t \to T_{\max}} \|u\|_{L^\infty(\Omega)} = \infty$。

引理 2.2. 令 $\alpha > 0$，则 $\|v(\cdot,t)\|_{L^\infty(\Omega)} \le \|v_0\|_{L^\infty(\Omega)}$，$t \in [0, T_{\max})$。

证明. 根据 u,v 的正性，由比较原理得证。

我们通过变换 $w = -\ln \dfrac{v}{\|v_0\|_{L^\infty(\Omega)}}$ 的方法来估计 v 的逐点下界。

引理 2.3. 令 $\alpha \in (0,1]$，如果对于 $p > \dfrac{n}{2}$，存在 $L_1(t) > 0$ 使得 $\|u\|_{L^p(\Omega)} \le L_1(t)$，$t \in [0, T_{\max})$，那么存在 $d(t) > 0$，使得

$$v \ge \|v\|_{L^\infty(\Omega)} e^{-d(t)}, \Omega \times (0, T_{\max}). \tag{2.1}$$

证明. 令 $w = -\ln \dfrac{v}{\|v_0\|_{L^\infty(\Omega)}}$，则

$$\begin{cases} w_t = \Delta w - |\nabla w|^2 + u, \ \Omega \times (0, T_{\max}), \\ \partial_{\nu} w = 0, \ \partial\Omega \times (0, T_{\max}), \\ w(\cdot,0) = w_0 := -\ln \dfrac{v}{\|v_0\|_{L^\infty(\Omega)}}, \ \Omega. \end{cases} \tag{2.2}$$

通过常数变易法，有

$$\begin{aligned} w &= e^{t\Delta} w_0 + \int_0^t e^{(t-s)\Delta} \left(u - |\nabla w|\right)^2 \\ &\le e^{t\Delta} w_0 + \int_0^t e^{(t-s)\Delta} u \mathrm{d}s, \ t \in (0, T_{\max}). \end{aligned}$$

利用半群估计([8], Lemma 1.3(i))，知存在 $c_1>0$ 使得

$$\|w\|_{L^\infty(\Omega)}\le\left\|e^{t\Delta}w_0\right\|_{L^\infty(\Omega)}+\int_0^t\left\|e^{(t-s)\Delta}u\right\|_{L^\infty(\Omega)}ds$$
$$\le\|w_0\|_{L^\infty(\Omega)}+c_1\int_0^t\left(1+(t-s)^{-\frac{n}{2p}}\right)e^{-\lambda_1(t-s)}\|u\|_{L^p(\Omega)}ds,\ t\in(0,T_{\max}).$$

当 $p>\frac{n}{2}$ 时，式子 $\int_0^\infty\left(1+(t-s)^{-\frac{n}{2p}}\right)e^{-\lambda_1(t-s)}\|u\|_{L^p(\Omega)}ds$ 是可积的，又因为 $\|u\|_{L^p(\Omega)}<L_1(t)$，所以可得

$$\|w\|_{L^\infty(\Omega)}\le\|w_0\|_{L^\infty(\Omega)}+c_1L_1(t)\int_0^t\left(1+(t-s)^{-\frac{n}{2p}}\right)e^{-\lambda_1(t-s)}ds=:d(t).$$

由 w 的定义可知 $v\ge\|v_0\|_{L^\infty(\Omega)}e^{-d(t)}$ 于 $\Omega\times(0,T_{\max})$。

引理 2.4. 令 $\alpha\in(0,1]$。当 $p>\frac{n}{2}(n\ge2)$ 时，如果 $\|v_0\|_{L^\infty(\Omega)}<\chi^{\frac{1}{1-\alpha}}\sqrt{\frac{n}{2}}$ 并且 $\mu>\frac{n-2}{2n}$，则存在 $L_2(t)>0$ 使得

$$\|u\|_{L^p(\Omega)}\le L_2(t),\ t\in[0,T_{\max}).\tag{2.3}$$

证明. 对于 $p>\frac{n}{2}$，$r>0$，由方程(1.3)得到

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\int_\Omega u^pv^{-r}dx&=p\int_\Omega u^{p-1}v^{-r}u_tdx-r\int_\Omega u^pv^{-r-1}v_tdx\\&=p\int_\Omega u^{p-1}v^{-r}\Delta udx-p\chi\int_\Omega u^{p-1}v^{-r}\nabla\cdot\left(\frac{u}{v_\alpha}\nabla v\right)dx\\&\quad-r\int_\Omega u^pv^{-r-1}\Delta v+pk\int_\Omega u^pv^{-r}dx+(r-\mu p)\int_\Omega u^{p+1}v^{-r}dx\\&=-p(p-1)\int_\Omega u^{p-2}v^{-r}|\nabla u|^2dx-pr\chi\int_\Omega u^pv^{-r-\alpha-1}|\nabla v|^2dx\\&\quad-r(r+1)\int_\Omega u^pv^{-r-2}|\nabla v|^2dx+2pr\int_\Omega u^{p-1}v^{-r-1}\nabla u\cdot\nabla vdx\\&\quad+p(p-1)\chi\int_\Omega u^pv^{-r-\alpha}\nabla u\cdot\nabla vdx+pk\int_\Omega u^pv^{-r}dx\\&\quad+(r-\mu p)\int_\Omega u^{p+1}v^{-r}dx,\quad t\in(0,T_{\max}).\end{aligned}\tag{2.4}$$

通过杨氏不等式，得

$$\begin{aligned}&2pr\int_\Omega u^{p-1}v^{-r-1}\nabla u\cdot\nabla vdx+p(p-1)\chi\int_\Omega u^pv^{-r-\alpha}\nabla u\cdot\nabla vdx\\&=\int_\Omega\left[2pr+p(p-1)\chi v^{1-\alpha}\right]u^{p-1}v^{-r-1}\nabla u\cdot\nabla vdx\\&\le p(p-1)\int_\Omega u^{p-2}v^{-r}|\nabla u|^2dx+\int_\Omega\left[2pr+(p-1)\chi v^{1-\alpha}\right]u^{p-1}v^{-r-1}\nabla u\cdot\nabla vdx\\&\le p(p-1)\int_\Omega u^{p-2}v^{-r}|\nabla u|^2dx+\int_\Omega\frac{\left[2pr+p(p-1)\chi v^{1-\alpha}\right]^2}{4p(p-1)}\int_\Omega u^pv^{-r-2}|\nabla v|^2dx.\end{aligned}\tag{2.5}$$

由估计(2.4)和(2.5)可得

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\int_\Omega u^pv^{-r}dx&\le\int_\Omega\left\{\frac{\left[2pr+p(p-1)\chi v^{1-\alpha}\right]^2}{4p(p-1)}-r(r+1)-v^{1-\alpha}pr\chi\right\}\int_\Omega u^pv^{-r-2}|\nabla v|^2dx\\&\quad+pk\int_\Omega u^pv^{-r}dx+(r-\mu p)\int_\Omega u^{p+1}v^{-r}dx,\ t\in(0,T_{\max}).\end{aligned}\tag{2.6}$$

定义

$$h(r):=\frac{\left[2pr+p(p-1)\chi v^{1-\alpha}\right]^2}{4p(p-1)}-r(r+1)-v^{1-\alpha}pr\chi,\ r>0.$$

当 $r\in(r_-,r_+)\left(r_\pm=\frac{p-1}{2}\left(1\pm\sqrt{1-p\chi^2\|v_0\|_{L^\infty(\Omega)}^{2-2\alpha}}\right)\right)$，有

$$\begin{aligned}h(r)&=\frac{1}{p-1}\left[r^2-(p-1)r+\frac{p(p-1)^2\chi^2v^{2-2\alpha}}{4}\right]\\&\le\frac{1}{p-1}\left[r^2-(p-1)r+\frac{p(p-1)^2\chi^2\|v_0\|_{L^\infty(\Omega)}^{2-2\alpha}}{4}\right]\\&<0.\end{aligned}$$

如果 $\|v_0\|_{L^\infty(\Omega)}<\chi^{\frac{1}{1-\alpha}}\sqrt{\frac{n}{2}}$ 并且 $\mu>\frac{n-2}{2n}$，则存在 $p\in\left(\frac{n}{2},\frac{1}{\chi^2\|v_0\|_{L^\infty(\Omega)}^{2-2\alpha}}\right)$ 使得 $r\in(r_-,\min\{r_+,\mu p\})$。因此，由式(2.6)得

$$\frac{d}{dt}\int_\Omega u^pv^{-r}dx\le pk\int_\Omega u^pv^{-r}dx,\ t\in(0,T_{\max}).$$

进而，有

$$\int_\Omega u^pv^{-r}dx\le e^{pkt}\int_\Omega u_0^pv_0^{-r}dx:=C_2(t),\ t\in(0,T_{\max}).$$

综上所述，可得

$$\begin{aligned}\|u\|_{L^p(\Omega)}&=\left(\int_\Omega u^pv^{-r}v^rdx\right)^{\frac1p}\le\left(\int_\Omega u^pv^{-r}\|v^r\|_{L^\infty(\Omega)}dx\right)^{\frac1p}\\&\le\|v\|_{L^\infty(\Omega)}^{\frac rp}\left(\left(\int_\Omega u^pv^{-r}dx\right)^{\frac1p}\right)\le\|v\|_{L^\infty(\Omega)}^{\frac rp}C_2(t)^{\frac1p}=:L_2(t).\end{aligned}$$

证明完成。

证明定理 1.1.

通过常数变易法，有

$$\begin{aligned}u&=e^{t\Delta}u_0+\int_0^te^{(t-s)\Delta}\nabla\cdot\left(\frac{u}{v^\alpha}\nabla v\right)ds+\int_0^te^{(t-s)\Delta}\left(ku-\mu u^2\right)ds\\&\le e^{t\Delta}u_0+\int_0^te^{(t-s)\Delta}\nabla\cdot\left(\frac{u}{v^\alpha}\nabla v\right)ds+c_1T_{\max},\ t\in(0,T_{\max})\end{aligned}\tag{2.7}$$

其中 $c_1:=\sup_{\xi>0}\left(k\xi-\mu\xi^2\right)$。

若 $p_1>\frac{n}{2}$，定义

$$p_{\ell+1}=\begin{cases}\frac{np_\ell}{2(n-p_\ell)},& p_\ell\le n,\\ \infty,& p_\ell>n,\end{cases}\quad \ell=1,2,\cdots.$$

当 $p_\ell\le n$。为了去估计 $\|u\|_{L^{p_{\ell+1}}(\Omega)}$，需要去控制 $\int_0^t\left\|e^{(t-s)\Delta}\nabla\cdot\left(\frac{u}{v^\alpha}\nabla v\right)\right\|_{L^{p_{\ell+1}}(\Omega)}ds$。由半群估计([8], Lemma 1.3(iv))

和引理 2.3，存在 $c_2, C_3(t) > 0$ 使得

$$\int_0^t \left\| e^{(t-s)\Delta}\nabla\cdot\left(\frac{u}{v^{\alpha}}\nabla v\right)\right\|_{L^{p_{\ell+1}}(\Omega)} ds \le c_2 C_3(t)\int_0^t \left(1+(t-s)^{-\frac{1}{2}-\frac{n}{2}\left(\frac{1}{\theta}-\frac{1}{p_{\ell+1}}\right)} e^{-\lambda_1(t-s)}\right)\|u\nabla v\|_{L^{\theta}(\Omega)} ds. \tag{2.8}$$

如果 $\eta < \frac{np_\ell}{n-p_\ell}$，由([9], Lemma 2.4(ii))，存在 $c_3 > 0$ 满足

$$\|\nabla v\|_{L^{\eta}(\Omega)} \le c_3\left(1+\sup_{t\in(0,T_{\max})}\|u\|_{L^{p_\ell}(\Omega)}\right). \tag{2.9}$$

取 $\theta < \frac{np_\ell}{2n-p_\ell}$ 接近 $\frac{np_\ell}{2n-p_\ell}$，则 $-\frac{1}{2}-\frac{n}{2}\left(\frac{1}{\theta}-\frac{1}{p_{\ell+1}}\right) < 1$ 和 $\frac{p_\ell\theta}{p_\ell-\theta} < \frac{np_\ell}{n-p_\ell}$。从而，根据(2.3)及(2.7)~(2.9)并利用 Hölder 不等式，可得

$$\begin{aligned}
\|u\|_{L^{p_{\ell+1}}(\Omega)} &\le c_2 C_3(t)\int_0^t \left(1+(t-s)^{-\frac{1}{2}-\frac{n}{2}\left(\frac{1}{\theta}-\frac{1}{p_{\ell+1}}\right)} e^{-\lambda_1(t-s)}\right)\|u\nabla v\|_{L^{\theta}(\Omega)} ds + \|u_0\|_{L^{\infty}(\Omega)} + c_1 T_{\max} \\
&\le C_4(t)\left(1+\sup_{t\in(0,T_{\max})}\|u\|_{L^{p_\ell}(\Omega)}\right)^2 \int_0^t \left(1+(t-s)^{-\frac{1}{2}-\frac{n}{2}\left(\frac{1}{\theta}-\frac{1}{p_{\ell+1}}\right)} e^{-\lambda_1(t-s)}\right) ds + c_4(1+T_{\max}) \\
&\le c_4(1+T_{\max}) + C_5(t)\left(1+\sup_{t\in(0,T_{\max})}\|u\|_{L^{p_1}(\Omega)}\right)^{2\ell} \\
&\le C_6(t),\ t\in(0,T_{\max})
\end{aligned} \tag{2.10}$$

其中 $c_4, C_4(t), C_5(t), C_6(t) > 0$。易知对 $\ell \ge 1$ 有 $p_{\ell+1} \ge p_{\ell l} \ge \frac{n}{2}$，并且当 $p_\ell \to n$ 时，有 $p_{\ell+1} \to \infty$。固存在 $\overline{p} > n$ 满足(2.10)成立。

当 $p_\ell > n$，由([10], Lemma 3.3)，知

$$\int_0^t \left\| e^{(t-s)\Delta}\nabla\cdot\left(\frac{u}{v^{\alpha}}\nabla v\right)\right\|_{L^{\infty}(\Omega)} ds \le c_5 C_7(t)\int_0^t (t-s)^{-\frac{1}{2}-\frac{n}{2p_\ell}} e^{-\lambda_1(t-s)}\|u\nabla v\|_{L^{p_\ell}(\Omega)} ds.$$

当 $\eta = \infty$ 时，(2.9)式依然成立，又因为积分 $\int_0^{\infty}(t-s)^{-\frac{1}{2}-\frac{n}{2p_\ell}} ds$ 可积，则存在 $C_8(t), C_9(t) > 0$ 使得

$$\|u\|_{L^{\infty}(\Omega)} \le C_8(t)\left(\|u_0\|_{L^{\infty}(\Omega)} + \int_0^t \left(1+(t-s)^{-\frac{1}{2}-\frac{n}{2p_\ell}}\right) e^{-\lambda_1(t-s)} ds\right) + c_1 T_{\max} =: C_9(t).$$

证明完毕。

3. 结论

本文通过一系列的不等式放缩行为进而完成了系统(1.3)的解的全局存在性证明，首先对 $\|u\|_{L^p(\Omega)}$ 进行了估计，最终通过对 $\|u\|_{L^{\infty}(\Omega)}$ 的估计完成了证明，即定理 1.1，若 $\|v_0\|_{L^{\infty}(\Omega)} < \chi^{\frac{1}{1-\alpha}}\sqrt{\frac{n}{2}}$ 且 $\mu > \frac{n-2}{2n}$，则系统(1.3)存在整体古典解。

参考文献

[1] Hillen, T. and Painter, K.J. (2009) A Users Guide to PDE Models for Chemotaxis. *Journal of Mathematical Biology*, **58**, 183-217. https://doi.org/10.1007/s00285-008-0201-3

[2] Fujie, K. (2015) Boundedness in a Fully Parabolic Chemotaxis System with Singular Sensitivity. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **424**, 675-684. https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2014.11.045

[3] Lankeit, J. (2016) A New Approach toward Boundedness in a Two-Dimensional Parabolic Chemotaxis System with Singular Sensitivity. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, **39**, 394-404. https://doi.org/10.1002/mma.3489

[4] Zhao, X.D. and Zheng, S.N. (2019) Global Existence and Boundedness of Solutions to a Chemotaxis System with Singular Sensitivity and Logistic-Type Source. *Journal of Differential Equations*, **267**, 826-865. https://doi.org/10.1016/j.jde.2019.01.026

[5] Viglialoro, G. (2019) Global Existence in a Two-Dimensional Chemotaxis-Consumption Model with Weakly Singular Sensitivity. *Applied Mathematics Letters*, **91**, 121-127. https://doi.org/10.1016/j.aml.2018.12.012

[6] Lankeit, E. and Lankeit, J. (2019) Classical Solutions to a Logistic Chemotaxis Model with Singular Sensitivity and Signal Absorption. *Real World Applications*, **46**, 421-445. https://doi.org/10.1016/j.nonrwa.2018.09.012

[7] Wang, W. (2019) The Logistic Chemotaxis System with Singular Sensitivity and Signal Absorption in Dimension Two. *Real World Applications*, **50**, 532-561. https://doi.org/10.1016/j.nonrwa.2019.06.001

[8] Winkler, M. (2011) Aggregation vs. Global Diffusive Behavior in the Higher-Dimensional Keller-Segel Model. *Journal of Differential Equations*, **248**, 3728-3740. https://doi.org/10.1016/j.jde.2010.02.008

[9] Winkler, M. (2011) Global Solutions in a Fully Parabolic Chemotaxis System with Singular Sensitivity. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, **34**, 176-190. https://doi.org/10.1002/mma.1346

[10] Fujie, K., Ito, A., Winkler, M. and Yokota, T. (2016) Stabilization in a Chemotaxis Model for Tumor Invasion. *Discrete Continuous Dynamical Systems*, **36**, 151-169. https://doi.org/10.3934/dcds.2016.36.151