

有缺失边的 n 维增强超立方体在MM*模型下的局部可诊断性

王世英*, 张雪芳, 赵丽娜

山西师范大学, 数学与计算机科学学院, 山西 太原

收稿日期: 2022年1月11日; 录用日期: 2022年2月9日; 发布日期: 2022年2月16日

摘要

多重处理器系统的诊断性在互联网的可靠性中扮演着重要的角色。 n 维增强超立方体 $Q_{n,k}$ 是由 n 维超立方体 Q_n 添加一些互补边得到的。 n 维增强超立方体 $Q_{n,k}$ 有许多好的性质。这篇文章中, 我们首先证明了在MM*模型下 $Q_{n,k}$ 具有强局部诊断性, 然后证明了在MM*模型下 $Q_{n,k}$ 即使存在 $n-1$ 条缺失边时仍具有强局部诊断性, 并且证明了缺失边的数目 $n-1$ 是最优值。

关键词

互连网络, 强局部诊断度, n 维增强超立方体, 延展星结构, MM*模型

Local Diagnosability of n -Dimensional Enhanced Hypercubes with Missing Edges under the MM* Model

Shiying Wang*, Xuefang Zhang, Lina Zhao

College of Mathematics and Information Science, Shanxi Normal University, Taiyuan Shanxi

Received: Jan. 11th, 2022; accepted: Feb. 9th, 2022; published: Feb. 16th, 2022

Abstract

The diagnosability of multiprocessor systems plays an important role in the reliability of the Internet. The n -dimensional enhanced hypercube $Q_{n,k}$ is obtained by adding some complementary edges to n -dimensional hypercubes. The n -dimensional enhanced hypercube $Q_{n,k}$ has many good

*通讯作者。

properties. In this paper, we prove $Q_{n,k}$ has the strong local diagnosability property under the MM* model. Then we prove that $Q_{n,k}$ ($n \leq 6$) keeps the strong local diagnosability property even if there exist $n-1$ missing edges in it under the MM* model and the result is optimal with respect to the number of missing edges.

Keywords

Interconnection Networks, Strong Local Diagnosability, N-Dimensional Enhanced Hypercubes, Extended Star Structure, MM* Model

Copyright © 2022 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

多处理器系统一般以某种互联网络作为拓扑结构。因此,研究互联网络的性能对整个多处理器系统有着重大意义。互联网络可用图表示,那么网络拓扑结构的性能就可以通过图的性质和参数来进行度量。由于多处理系统中包含处理器数目不断增多,处理器出现故障是不可避免的。为了让系统在出现故障处理器的情况下仍然可以正常工作,处理器故障识别被提出来并承担了这一重要工作。这一识别过程被称为系统诊断[1]。一些处理器在诊断时可能会出现故障,所以发现哪些处理器发生故障是非常重要的。在之前的研究中,研究者们已经提出许多系统诊断模型,其中被广泛使用的是比较模型(MM模型)。MM模型是由 Maeng 和 Malek 首次提出[2]。之后, Sengupta 和 Dahbura [3]提出 MM*模型,它是 MM 模型的一个特例。在 MM*模型中,一个节点必须测试它的每一对相邻节点。Sengupta 和 Dahbura 在 MM*模型下为有 n 个处理器的一般诊断系统提出了一个 $O(n^5)$ 诊断算法[4]。在故障处理器的数量不超过 t 的情况下,如果所有故障的处理器可以被识别出来并且不被替换,我们就称这个系统是 t -可诊断的。一个系统 G 的诊断度 $t(G)$ 是使得 G 是 t -可诊断的 t 的最大值[5]。

在文献[6]中, Hau 和 Tan 提出了一种测量多重处理器系统 G 的诊断度,即 G 的局部诊断度。这种新的测量方法研究了每个处理器的局部可诊断性而不是整个系统的可诊断性。如果我们只考虑全局故障或无故障状态,那就会失去这个系统的一部分细节。在[7]中, Chiang 和 Tan 提出了延展星结构。这是一种有效的局部结构为了确保每个节点的可诊断性,并给出了 MM 模型下确定节点可诊断性的充分条件。他们发现 G 的局部可诊断性和传统可诊断性之间存在着非常紧密的联系。如果系统 G 中每个节点的局部可诊断性都等于它在 G 中的度,那么就说这个系统 G 有强局部可诊断性。在此基础上,强局部可诊断性被广泛研究。在[8]中, Chiang 等人研究了 n 维星图的可诊断性,也证明了它在具有 $n-3$ 条缺失边的情况下仍然保持强的局部可诊断性。除此之外, Cheng 等人也把上述结果扩展到了由置换树生成的 Cayley 图[9], (n,k) 星图和 2 树生成的 Cayley 图[10]中,它们仍然保持强的局部可诊断性。在过去的许多年里,人们提出了大量的互联网络拓扑结构。在拓扑结构中,超立方体因其结构规则、对称、直径小、连通性强等优良特性而备受关注[11] [12] [13] [14]。由于超立方体的重要性,许多它的变体也被提出。比如广义超立方体,扭曲超立方体,平衡超立方体,折叠超立方体和增强超立方体。增强超立方体是在超立方体结构上添加一些互补边扩展得到的,比超立方体具有更多好的性质[15] [16] [17]。折叠超立方体是增强超立方体

在 $k=1$ 时的特殊情况。在 1999 年, Wang [18] 研究了超立方体和增强超立方体在 MM* 模型下的可诊断性。在 2019 年, Sabir [19] 等人研究了增强超立方体的额外连通度。在 2021 年, Wang [5] 等人研究了 n 维超立方体和折叠超立方体在 MM* 模型下的局部可诊断性, 证明出超立方体即使存在 $n-1$ 条缺失边仍然保持强局部可诊断性, 并且缺失边的数量达到最优; 还证明了折叠超立方体即使存在高达 $n-2$ 条缺失边仍然保持强局部可诊断性, 它的缺失边数量也是最优的。

在这篇文章中, 我们首先证明了增强超立方体 $Q_{n,k}$ 在比较模型下的强局部可诊断性是 $n+1$ 。然后证明了增强超立方体 $Q_{n,k}$ 在 MM* 模型下即使存在 $n-1$ 条缺失边仍然保持强局部可诊断性, 并且缺失边的数量是最优的。

2. 基本概念

一个多重处理器系统通常用一个无向简单图 $G=(V,E)$ 来表示, 其中顶点集 $V(G)$ (节点) 表示处理器, 边集 $E(G)$ (链路) 表示通信链接。在这个简单图 G 中, $d_G(v)$ 表示顶点 v 的度, 即 G 中一个顶点 v 在 G 里相关联的边数。图 G 中每个顶点 v , 它的邻集 $N_G(v)$ 是所有与 v 相关联的顶点组成的集合。设 u 是 v 相关联的邻点, 那么 $u \in N_G(v)$ 。一个图 G 被定义为是 k -正则的当且仅当对于 G 中每个点 v 都满足 $d_G(v)=k$ 。我们用 $P=\langle v_0, v_1, \dots, v_n \rangle$ 来表示一条从 v_0 开始 v_n 结束的路, 并且它被定义为一条 n 长路。图 G 的连通度 $\kappa(G)$ 是把 G 变成一个不连通图(或当 G 是完全图时仅一个点所需移除)的顶点最小数量。 G 中顶点的最小度用 $\delta(G)$ 表示。图 G 的边连通度 $\lambda(G)$ 是把 G 变成一个不连通图的边的最小数目。假设 V' 是顶点集 V 的一个非空集合, $G[V']$ 表示 G 中由 V' 导出的子图, 其中子图的边集是由每条边的两个端点都在 V' 中的边组成的。我们说一个图 G_1 是同构于另一个图 G_2 (表示为 $G_1 \cong G_2$) 的, 当且仅当存在一个一一映射 $\varphi: V(G_1) \rightarrow V(G_2)$ 使得对于任意两个点 $u, v \in V(G_1), uv \in E(G_1)$ 有 $\varphi(u)\varphi(v) \in E(G_2)$ 。在这篇文章中, 如果我们定义顶点 $x = u_1 u_2 \dots u_{i-1} u_i u_{i+1} \dots u_n$, 则顶点 $x^i = u_1 u_2 \dots u_{i-1} \bar{u}_i u_{i+1} \dots u_n$, 其中 $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ 表示这两个点 x 和 x^i 的二进制字符串只有第 i 个位置不同。文中其它未定义而直接使用的符号和术语参见文献[20]。

增强超立方体

增强超立方体 $Q_{n,k}$ 的每个顶点都可以用一个 n 位的二进制字符串来表示。两个顶点相邻当且仅当它们 n 个位置中只有一位不同, 或者 n 个位置中从第 k 个位置开始到最后一个位置都不相同。众所周知, 折叠超立方体 FQ_n 是增强超立方体 $k=1$ 时的特殊情况, 并且该超立方体已经得到了大量研究。尽管增强超立方体已经被证明有许多优点并显示出其潜在的应用前景, 但它的许多拓扑特性仍是未知的, 这阻碍了增强超立方体在关键领域的进一步应用。近年来对 $Q_{n,k}$ ($1 \leq k \leq n-1$) 的研究取得了丰硕的成果。在[16]中, 当 $k=2$ 时 $Q_{n,k}$ 中任意两个不同顶点之间存在 $n+1$ 条内部不相交路径, 并且连通度 $\kappa(Q_{n,k})$ 和边连通度 $\lambda(Q_{n,k})$ 都是 $n+1$ 。

定义 2.1 [16] n 维增强超立方体 $Q_{n,k}$ ($1 \leq k \leq n-1$), 它的顶点集 $V(Q_{n,k}) = \{u_1 u_2 \dots u_n : u_i \in \{0, 1\}; 1 \leq i \leq n\}$ 。当顶点 v 满足下面其中一个条件时, 两个点 $u = u_1 u_2 \dots u_n$ 和 v 相邻:

- (1) $v = u_1 \dots u_{i-1} \bar{u}_i u_{i+1} \dots u_n, 1 \leq i \leq n$;
- (2) $v = u_1 \dots u_{k-1} \bar{u}_k \bar{u}_{k+1} \dots \bar{u}_n$ (见图 1)。

定理 2.1 [16] 增强超立方体 $Q_{n,k}$ ($1 \leq k \leq n-1$) 可以沿着第 i ($1 \leq i \leq n$) 个位置被分解为两个不同的子图。我们分别用 $Q_{n,k}^{i,0}$ (即 $Q_{n,k}^0$) 和 $Q_{n,k}^{i,1}$ (即 $Q_{n,k}^1$) 来表示这两个子图。根据分解的定义, 我们可以得到, 当 $i < k$ 时, $Q_{n,k}^0$ 和 $Q_{n,k}^1$ 是两个 $n-1$ 维的增强超立方体, 且 $Q_{n,k} = Q_{n,k}^0 \cup Q_{n,k}^1$; $i \geq k$ 时, $Q_{n,k}^0$ 和 $Q_{n,k}^1$ 是两个 $n-1$ 维

的超立方体, 且 $Q_{n,k} = Q_{n,k}^0 \cup Q_{n,k}^1$ 。一个顶点 $x = u_1u_2 \cdots u_n$ 属于 $Q_{n,k}^0$ 当且仅当第 i 个位置满足 $u_i = 0$; 类似地, x 属于 $Q_{n,k}^1$ 当且仅当第 i 个位置满足 $u_i = 1$ (见图 2)。

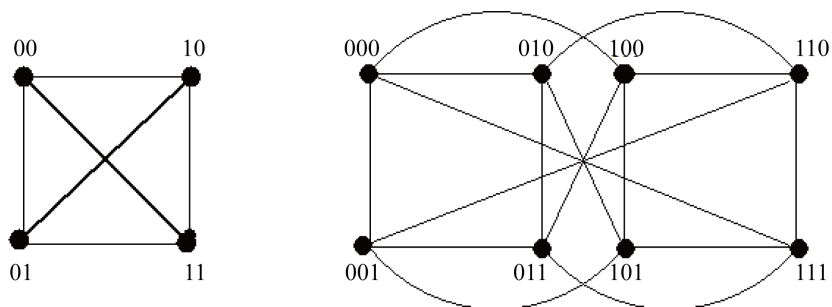


Figure 1. The enhanced hypercube $Q_{2,1}$ and $Q_{3,1}$

图 1. 增强超立方体 $Q_{2,1}$ 和 $Q_{3,1}$

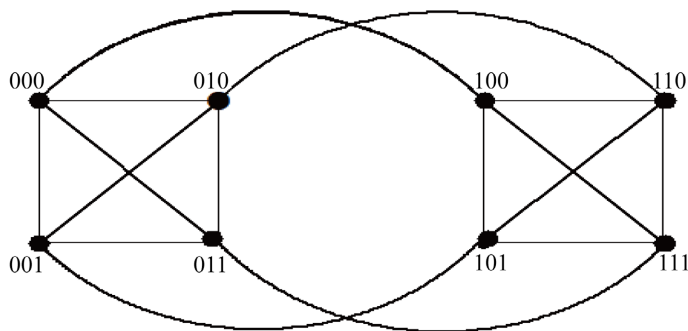


Figure 2. The enhanced hypercube $Q_{3,2}$

图 2. 增强超立方体 $Q_{3,2}$

定理 2.2 [21] 折叠超立方体 FQ_n 是增强超立方体的扩展, 是增强超立方体 $k=1$ 的特殊情况。

定理 2.3 [16] 对于增强超立方体 $Q_{n,k}$, 当 $i < k$ 时, $Q_{n,k}^{i,0}$ 和 $Q_{n,k}^{i,1}$ 同构于 $Q_{n-1,k-1}$; 当 $i \geq k$ 时, $Q_{n,k}^{i,0}$ 和 $Q_{n,k}^{i,1}$ 同构于 Q_{n-1} 。

定理 2.4 [18] 超立方体 Q_n 满足下列性质:

- (1) Q_n 是 n -正则的, $|V(Q_n)| = 2^n$, $|E(Q_n)| = n2^{n-1}$ 。
- (2) $\kappa(Q_n) = \lambda(Q_n) = n$ 。
- (3) Q_n 是点传递的和边传递的。
- (4) Q_n 可以按照某个 $i(1 \leq i \leq n)$ 位置分解为两个子图 $Q_n^{i,1}$ (即 Q_n^1) 和 $Q_n^{i,0}$ (即 Q_n^0)。
- (5) Q_n^1 和 Q_n^0 都同构于 Q_{n-1} 。

定理 2.5 [5] 增强超立方体 $Q_{n,k}$ 满足下列性质:

- (1) $Q_{n,k}$ 是 $n+1$ 正则的, $\kappa(Q_{n,k}) = \lambda(Q_{n,k}) = n+1 (n \geq 1)$ 。
- (2) 当 $i \geq k$ 时, $Q_{n,k}^j (j \in \{0,1\})$ 中每个点仅有的两个外部邻域都在另一个子图中; 当 $i < k$ 时, $Q_{n,k}^j (j \in \{0,1\})$ 中每个点仅有的一个外部邻域也在另一个子图中。
- (3) $Q_{n,k}^j (j \in \{0,1\})$ 中任意顶点的外部邻域都在另一个子图。
- (4) $Q_{n,k}$ 是点传递的和边传递的。

定理 2.6 [5] 令 F_e 是 $FQ_n (n \geq 6)$ 中任意缺失边集, $|F_e| \leq n-1$ 。 $FQ_n - F_e$ 中存在一个延展星图

$ES(x; d_{FQ_n - F_e}(x))$, 其中 $x \in V(FQ_n)$ 。

定理 2.7 [5] 令 F_e 是 $Q_n (n \geq 6)$ 中任意缺失边集, $|F_e| \leq n - 2$ 。 $Q_n - F_e$ 中存在一个延展星图 $ES(x; d_{Q_n - F_e}(x))$, 其中 $x \in V(Q_n)$ 。

定理 2.8 [18] 折叠超立方体 FQ_n 满足下列性质:

- (1) FQ_n 是 $n+1$ 正则的, $|V(FQ_n)| = 2^n$, $|E(FQ_n)| = (n+1)2^{n-1}$ 。
- (2) FQ_n 是点传递的和边传递的。
- (3) $\kappa(FQ_n) = \lambda(FQ_n) = n+1$ 。
- (4) FQ_n 可以沿某 $i (1 \leq i \leq n)$ 位分解为两个子图 FQ_n^{i1} (即 FQ_n^1) 和 FQ_n^{i0} (即 FQ_n^0)。
- (5) FQ_n^1 和 FQ_n^0 同构于 Q_{n-1} 。

3. MM*模型

MM 模型首先是被 Malek 和 Maeng 提出的。在 MM 模型中, 一个处理器同时把相同的任务发送给一对不同的邻点, 然后通过比较它们的反应结果来诊断系统 G 。一个系统 $G = (V(G), E(G))$ 的比较方案被建模为一个多重图, 用 $M = (V(G), L)$ 表示, 其中 L 是被标记的边集。一条被标记的边 $(u, v)_w \in L$ 代表用一个顶点 w 去比较两个相邻顶点 u 和 v , 这意味着 $uw, vw \in E(G)$ 。如果节点 w 是非故障的(故障的), 那么测试结果是可靠的(不可靠的)。如果 $u, v \in F$ 且 $w \in V(G) \setminus F$, 则 $(u, v)_w \rightarrow 1$ 。如果 $u \in F$ 且 $v, w \in V(G) \setminus F$, 则 $(u, v)_w \rightarrow 1$ 。如果 $v \in F$ 且 $u, w \in V(G) \setminus F$, 则 $(u, v)_w \rightarrow 1$ 。如果 $u, v, w \in V(G) \setminus F$, 则 $(u, v)_w \rightarrow 0$ 。 $M = (V(G), L)$ 中所有比较结果的集合称为诊断的症候, 用 σ 表示。如果比较 $(u, v)_w$ 的结果不一致, 则 $\sigma((u, v)_w) = 1$; 否则, $\sigma((u, v)_w) = 0$ 。因此, 一个症候是从 L 到 $\{0, 1\}$ 的一个函数。MM* 中每个节点必须测试其任意一对相邻节点。即如果 $uw, vw \in E(G)$, 则 $(u, v)_w \in L$ 。在系统中, 所有故障处理器的集合叫做一个故障集, 它可以是 $V(G)$ 的任意一个子集。在 MM* 模型下, 对于一个给定的症候 σ , 如果对任意的 $(u, v)_w \in L$ 满足 $w \in V \setminus F$, $\sigma((u, v)_w) = 1$ 当且仅当 $u, v \in F$ 或 $u \in F$ 或 $v \in F$, 则我们称故障子集 $F \subseteq V(G)$ 和 σ 是一致的。我们用 $\sigma(F)$ 表示和 F 一致的所有症候的集合。设 F_1 和 F_2 是 $V(G)$ 中两个不同的子集。如果 $\sigma(F_1) \cap \sigma(F_2) \neq \emptyset$, 则 (F_1, F_2) 是不可区分对; 否则, (F_1, F_2) 是可区分对。

引理 3.1 [22] 一个系统 $G = (V, E)$ 是 t -可诊断的, 当且仅当对于每一对不同的顶点集 (F_1, F_2) 且 $|F_1|, |F_2| \leq t$, (F_1, F_2) 是可区分对。

4. 局部诊断度

一个图 $G = (V, E)$, 设 F_1 和 F_2 是 V 的两个不同子集, 对称差分 $F_1 \Delta F_2 = (F_1 \setminus F_2) \cup (F_2 \setminus F_1)$ 。

引理 4.1 [1] 一个系统 $G = (V, E)$ 在顶点 x 处是局部 t -可诊断的, 如果假定测试症候 σ_F 是由系统内存在一组包含 x 的故障顶点集 F 且 $|F| \leq t$ 生成的, 那么每个故障顶点集 F' 要与 σ_F 保持一致且 $|F'| \leq t$ 必须包含顶点 x 。

引理 4.2 [5] 一个系统 $G = (V, E)$, 如果 $x \in F_1 \Delta F_2$ 且对于 V 的每一对不同的故障子集 F_1 和 F_2 是可区分的, 其中 $|F_1| \leq t$, $|F_2| \leq t$, 则点 x 是局部 t -可诊断的。

定理 4.1 [3] [4] 一个系统 $G = (V, E)$ 在 MM* 模型下是 t -可诊断的, 当且仅当对于 V 的每一对不同的故障集 F_1 和 F_2 , 其中 $|F_1| \leq t$, $|F_2| \leq t$ 且 $x \in F_1 \Delta F_2$, (F_1, F_2) 满足下列条件之一:

- (1) 有两个顶点 $u, w \in V(G) \setminus (F_1 \cup F_2)$, 有一个顶点 $v \in F_1 \Delta F_2$, 使得 $uw \in E(G)$ 和 $vw \in E(G)$ 。
- (2) 有两个顶点 $u, v \in F_1 \setminus F_2$, 有一个顶点 $w \in V(G) \setminus (F_1 \cup F_2)$, 使得 $uw \in E(G)$ 和 $vw \in E(G)$ 。
- (3) 有两个顶点 $u, v \in F_2 \setminus F_1$, 有一个顶点 $w \in V(G) \setminus (F_1 \cup F_2)$, 使得 $uw \in E(G)$ 和 $vw \in E(G)$ (见图 3)。

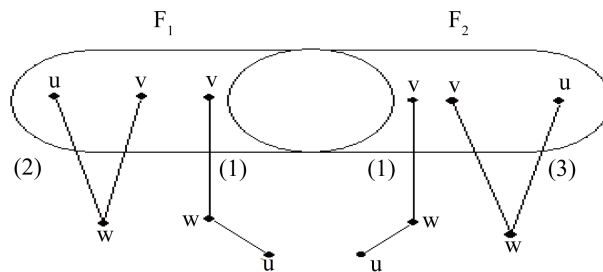


Figure 3. Illustration of a distinguishable pair (F_1, F_2) under the MM* model

图 3. MM*模型下的可区分对 (F_1, F_2) 示图

引理 4.3 [8] 一个系统 $G = (V, E)$ 中, G 中 x 点是局部 t -可诊断的 t 的最大值被定义为点 x 的局部诊断度 $t_l(x)$, 即 $t_l(x) = \max \{t : G \text{ 在 } x \text{ 点是局部 } t\text{-可诊断的}\}$ 。

引理 4.4 [8] 一个系统 $G = (V, E)$ 是 t -可诊断的当且仅当 G 中每个点都是局部 t -可诊断的。

引理 4.5 [8] 一个系统 $G = (V, E)$ 的诊断度 $t(G)$ 等于 G 中每个点的局部诊断度的最小值, 即 $t(G) = \min \{t_l(x) : \text{对于所有的 } x \in V(G)\}$ 。

定理 4.2 [8] 设 x 是一个图 $G = (V, E)$ 中的一个点。若 $d_G(x) \geq n$, 我们定义一个扩展星图 $ES(x; n)$, 其中 $d_{ES(x; n)}(x) = n$, 点集 $V(ES(x; n)) = \{x\} \cup \{v_{ij} : i = 1, 2, \dots, n, j = 1, 2, 3, 4\}$, 边集 $E(ES(x; n)) = \{(x, v_{k1}), (v_{k1}, v_{k2}), (v_{k2}, v_{k3}), (v_{k3}, v_{k4}) : k = 1, 2, \dots, n\}$ 。

注意 x 称为 $ES(x; n)$ 的根。

引理 4.6 [8] 设 x 是系统 $G = (V, E)$ 中的一个点且 $d_G(x) = n$ 。如果点 x 在 G 中存在一个扩展星图 $ES(x; n)$, 则 x 的局部诊断度是 n 。

引理 4.7 [8] 设 x 是图 $G = (V, E)$ 中的一个点。如果 x 的局部诊断度等于它在 G 中的度, 即 $t_l(x) = d_G(x)$, 则这个点 x 有强局部诊断性。

引理 4.8 [8] 设 $G = (V, E)$ 是一个图。如果 G 中每个点的局部诊断度都等于它在 G 中的度, 即对于所有的 $x \in V(G)$ 都有 $t_l(x) = d_G(x)$, 则 G 有强局部诊断性。

5. n 维增强超立方体 $Q_{n,k}$ 的局部诊断性

引理 5.1 [18] 在 n 维超立方体 $Q_n (n \geq 6)$ 中每个顶点 x 处都存在一个扩展星图 $ES(x; n)$ 。

引理 5.2 [18] 在 n 维折叠超立方体 $FQ_n (n \geq 6)$ 中每个顶点 x 处都存在一个扩展星图 $ES(x; n+1)$ 。

由增强超立方体 $Q_{n,k}$ 的性质和引理 2.1, 我们把证明过程分为声明一: $i \geq k$ 和声明二: $i < k$ 两个部分。

下面先证明声明一: $i \geq k$ 。

引理 5.3 对于增强超立方体 $Q_{n,k}$ 且 $n \geq 6$ 中的每一个顶点 x , 在顶点 x 处存在一个扩展星图 $ES(x; n+1)$ 。

证明 我们可以沿着最后一个位置把 $Q_{n,k}$ 分解为两个不同的子图 $Q_{n,k}^0$ 和 $Q_{n,k}^1$, 在子图中每个顶点 $x = u_1 u_2 \dots u_n \in V(Q_{n,k}^j) (j \in \{0, 1\})$ 在最后一个位置 u_n 处都有一个固定的整数 $j (j \in \{0, 1\})$ 。显然, $Q_{n,k}^j$ 同构于 Q_{n-1} , 且 Q_{n-1} 是一个 $n-1$ 维超立方体。我们需要在顶点 x 处找到一个扩展星图 $ES(x; n-1)$ 作为 $Q_{n,k}$ 的子图。由引理 5.1, 在 n 维超立方体 $Q_n (n \geq 6)$ 中每个顶点 x 处都存在一个扩展星图 $ES(x; n)$ 。因此在 $Q_{n,k}^j$ 中顶点 x 处存在一个扩展星图 $ES(x; n-1)$ 。由引理 2.5, $Q_{n,k}$ 是点传递的。因此, 顶点

$x = u_1 u_2 \cdots u_k u_{k+1} \cdots u_n \in V(Q_{n,k}^j)$ 可以作为延展星图 $ES(x; n-1)$ 的根。由引理 2.5, 子图 $Q_{n,k}^j$ 中每个顶点都存在两个外部邻点。设顶点 x 的两个外部邻点分别是 $y_0 = u_1 u_2 \cdots u_k u_{k+1} \cdots u_{n-1} \bar{u}_n$ 和 $y_1 = u_1 u_2 \cdots u_{k-1} \bar{u}_k \cdots \bar{u}_{n-1} \bar{u}_n$ 。注意有两条不同的 3 长路

$$P_1 = \langle u_1 u_2 \cdots u_k u_{k+1} \cdots u_{n-1} \bar{u}_n, u_1 \cdots u_{n-2} \bar{u}_{n-1} \bar{u}_n, u_1 \cdots u_{n-3} \bar{u}_{n-2} \bar{u}_{n-1} \bar{u}_n, u_1 \cdots u_{n-4} \bar{u}_{n-3} \bar{u}_{n-2} \bar{u}_{n-1} \bar{u}_n \rangle;$$

$$P_2 = \langle u_1 \cdots u_{k-1} \bar{u}_k \cdots \bar{u}_{n-1} \bar{u}_n, u_1 \cdots u_{k-1} \bar{u}_k \bar{u}_{k+1} \cdots \bar{u}_{n-2} u_{n-1} \bar{u}_n, u_1 u_2 \cdots \bar{u}_k \bar{u}_{k+1} \cdots \bar{u}_{n-3} u_{n-2} u_{n-1} \bar{u}_n, u_1 u_2 \cdots \bar{u}_k \bar{u}_{k+1} \cdots \bar{u}_{n-4} u_{n-3} u_{n-2} u_{n-1} \bar{u}_n \rangle$$

我们连接 P_1 和 P_2 到 x , 然后把它与 $ES(x; n-1)$ 结合。这样, 我们就在 $Q_{n,k}$ 中顶点 x 处找到一个延展星图 $ES(x; n+1)$ 。

定理 5.1 设 $Q_{n,k}$ 是增强超立方体且 $n \geq 6$, 则 $Q_{n,k}$ 的诊断度是 $n+1$, 即 $t(Q_{n,k}) = n+1$, $Q_{n,k}$ 有强局部诊断性。

证明 由引理 4.6 和 5.3, $Q_{n,k}$ 中每个顶点 x 的局部可诊断性是 $n+1$ 。由引理 4.5, $Q_{n,k}$ 的局部诊断性是 $n+1$, 即 $t(Q_{n,k}) = n+1$ 。由于 $Q_{n,k}$ 中每个顶点 x 的度是 $n+1$, 每个顶点的局部可诊断性等于它的度, 由引理 5.1, $Q_{n,k}$ 有强局部可诊断性。

引理 5.4 设 F_e 是任意缺失边集且 $|F_e| \leq n-1$ 。对于 $Q_{n,k} (n \geq 6)$ 中每一个顶点 x , 在 $Q_{n,k} - F_e$ 中的 x 处存在一个延展星图 $ES(x; d_{Q_{n,k}-F_e}(x))$ 。

证明 由引理 2.5, $Q_{n,k}$ 是点传递的。因此, $x = u_1 \cdots u_k \cdots u_{n-1} 0 (x \in V(Q_{n,k}^0))$ 可以被作为延展星图 $ES(x; d_{Q_{n,k}-F_e}(x))$ 的一个根。增强超立方体 $Q_{n,k} (1 \leq k \leq n-1)$ 可以被分解为两个不同的子图 $Q_{n,k}^0$ 和 $Q_{n,k}^1$, 其中每个子图的顶点 $x = u_1 u_2 \cdots u_n \in V(Q_{n,k}^j) (j \in \{0,1\})$ 在最后一位 u_n 处都有一个固定整数 j 。显然 $Q_{n,k}^j$ 同构于 Q_{n-1} , Q_{n-1} 是一个 $n-1$ 维的超立方体。设 $F_j = F \cap E(Q_{n,k}^j)$ 对于 $j \in \{1,0\}$, $|F_0| = \max\{|F_0|, |F_1|\}$ 。由 $Q_{n,k}$ 的定义, $Q_{n,k}^j$ 同构于 Q_{n-1} 且 $Q_{n,k}^j$ 中的每个顶点在另外一个子图中有两个外部邻域。设 x 在 $Q_{n,k}^0$ 中, 那么 $y_0 = u_1 u_2 \cdots u_k u_{k+1} \cdots u_{n-1} \bar{u}_n \in V(Q_{n,k}^0)$ 和 $y_1 = u_1 u_2 \cdots \bar{u}_k \bar{u}_{k+1} \cdots \bar{u}_{n-1} \bar{u}_n \in V(Q_{n,k}^1)$ 是 x 的邻域。为了证明这个引理, 我们首先需要在 $Q_{n,k}^0 - F_0$ 中顶点 x 处找到一个延展星图 $ES(x; d_{Q_{n,k}^0-F_0}(x))$ 。然后找到两条不同的 3 长路 P_{y_0} 和 P_{y_1} , 而且都在 $Q_{n,k}^1$ 中。我们连接 P_{y_0} 和 P_{y_1} 到 x , 把它结合到 $ES(x; d_{Q_{n,k}^0-F_0}(x))$ 。那么, 我们可以在 $Q_{n,k} - F_e$ 中顶点 x 处找到一个延展星图 $ES(x; d_{Q_{n,k}-F_e}(x))$ 。考虑下面三种情形。

情形 1 $|F_0| \leq n-3$ 。

注意到 $Q_{n,k}^0$ 同构于 Q_{n-1} 且 $|F_0| \leq n-3$ 。由引理 2.7, 设 F_e 是一个任意缺失边集且 $|F_e| \leq n-3$, 对于 Q_{n-1} 中每一个顶点 x , 在 $Q_{n-1} - F_e$ 中顶点 x 处都可以找到一个延展星图 $ES(x; d_{Q_{n-1}-F_e}(x))$ 。那么我们可以在 $Q_{n,k}^0 - F_0$ 中顶点 x 处找到一个延展星图 $ES(x; d_{Q_{n,k}^0-F_0}(x))$ 。假设 $A = ES(x; d_{Q_{n,k}^0-F_0}(x))$ 。如果 $xy_0 \in F_e$, $xy_1 \in F_e$, 那么我们不需要去找到 P_{y_0} 、 P_{y_1} 。如果 xy_0 和 xy_1 中只有一条边属于 F_e , 则不妨假设 $xy_0 \in F_e$ 。我们需要在 $Q_{n,k}^1 - F_1$ 中找到一条从 y_1 开始的 3 长路 P_{y_1} 并且把它连接到 A 。由引理 2.5, $\kappa(Q_{n,k}^1) = \kappa(Q_{n-1}) = n-1 > n-3 > |F_1|$ 。因此, $Q_{n,k}^1 - F_1$ 是连通的。当 $n \geq 6$ 时, $|V(Q_{n,k}^1)| = |V(Q_{n-1})| = 2^{n-1} \geq 2^5 = 32$ 。因此在 $Q_{n,k}^1 - F_1$ 中存在一条从 y_0 开始的 3 长路 P_{y_0} 并且把 P_{y_0} 连接到 x , 再与 A 结合。最后我们在 $Q_{n,k} - F_e$ 中顶点 x 处找到一个延展星图 $ES(x; d_{Q_{n,k}-F_e}(x))$ 。如果 $xy_0 \notin F_e$ 、 $xy_1 \notin F_e$, 我们需要分别找到两条不同的路径 3 长路 P_{y_0} 和 P_{y_1} 。设 $H_j (j \in \{0,1\})$ 是由第 $n-1$ 位是 j 、第 1 位是 0 的点集导出的 $Q_{n,k}^1$ 的子图。由 $Q_{n,k}$ 的定义, H_j 同构于 Q_{n-2} 。由引理 2.5, $\kappa(H_j) = \kappa(Q_{n-2}) = n-2 > |F_1|$, 那么 $H_j - F_1$ 是连通的。当 $n \geq 6$ 时, $|V(H_j)| = |V(Q_{n-2})| = 2^{n-2} \geq 2^4 = 16$ 。

所以, 在 $H_j - F_1$ 中存在两条不同的 3 长路 P_{y_0} 和 P_{y_1} , 然后连接 P_{y_0} 和 P_{y_1} 到 x 。最后我们可以在 $Q_{n,k} - F_e$ 中顶点 x 处找到一个延展星图 $ES(x; d_{Q_{n,k}-F_e}(x))$ 。

情形 2 $|F_0| = n - 2$ 。

注意到 $y_0 = u_1 u_2 \cdots u_k u_{k+1} \cdots u_{n-1} \bar{u}_n$ 和 $y_1 = u_1 u_2 \cdots \bar{u}_k \bar{u}_{k+1} \cdots \bar{u}_{n-1} \bar{u}_n$ 。那么 $y_0 \in V(Q_{n,k}^1)$, $y_1 \in V(Q_{n,k}^1)$, 即 $y_0 = u_1 u_2 \cdots u_k u_{k+1} \cdots u_{n-1} 1$, $y_1 = u_1 u_2 \cdots u_{k-1} \bar{u}_k \bar{u}_{k+1} \cdots \bar{u}_{n-1} 1$ 。我们可以分别找到从 y_0 、 y_1 开始的两条不同 3 长路,

$$P_{y_0}^1 = \langle u_1 u_2 \cdots u_k u_{k+1} \cdots u_{n-1} 1, u_1 u_2 \cdots u_{n-3} \bar{u}_{n-2} u_{n-1} 1, u_1 \cdots u_{n-4} \bar{u}_{n-3} \bar{u}_{n-2} u_{n-1} 1, u_1 \cdots u_{n-5} \bar{u}_{n-4} \bar{u}_{n-3} \bar{u}_{n-2} u_{n-1} 1 \rangle;$$

$$P_{y_0}^2 = \langle u_1 u_2 \cdots u_k u_{k+1} \cdots u_{n-1} 1, u_1 \bar{u}_2 u_3 \cdots u_k u_{k+1} \cdots u_{n-1} 1, u_1 \bar{u}_2 \bar{u}_3 u_4 \cdots u_k u_{k+1} \cdots u_{n-1} 1, u_1 \bar{u}_2 \bar{u}_3 \bar{u}_4 u_5 \cdots u_k u_{k+1} \cdots u_{n-1} 1 \rangle;$$

$$P_{y_1}^1 = \langle u_1 u_2 \cdots u_{k-1} \bar{u}_k \bar{u}_{k+1} \cdots \bar{u}_{n-1} 1, u_1 u_2 \cdots u_{k-1} \bar{u}_k \cdots \bar{u}_{n-3} u_{n-2} \bar{u}_{n-1} 1, u_1 \cdots u_{k-1} \bar{u}_k \cdots \bar{u}_{n-4} u_{n-3} u_{n-2} \bar{u}_{n-1} 1, \\ u_1 \cdots u_{k-1} \bar{u}_k \cdots \bar{u}_{n-5} u_{n-4} u_{n-3} u_{n-2} \bar{u}_{n-1} 1 \rangle;$$

$$P_{y_1}^2 = \langle u_1 u_2 \cdots u_{k-1} \bar{u}_k \bar{u}_{k+1} \cdots \bar{u}_{n-1} 1, u_1 \bar{u}_2 u_3 \cdots u_{k-1} \bar{u}_k \cdots \bar{u}_{n-1} 1, u_1 \bar{u}_2 \bar{u}_3 u_4 \cdots u_{k-1} \bar{u}_k \cdots \bar{u}_{n-1} 1, u_1 \bar{u}_2 \bar{u}_3 \bar{u}_4 u_5 \cdots u_{k-1} \bar{u}_k \cdots \bar{u}_{n-1} 1 \rangle。$$

$P_{y_0}^1, P_{y_0}^2, P_{y_1}^1$ 和 $P_{y_1}^2$ 都在 $Q_{n,k}^1$ 中。显然, $P_{y_0}^1, P_{y_0}^2, P_{y_1}^1$ 和 $P_{y_1}^2$ 除了 y_0 和 y_1 之外没有公共顶点。因为 $|F| \leq n - 1$ 且 $|F_0| = n - 2$, 那么在 $Q_{n,k}^0$ 外部最多存在一条缺失边 F , 即 $|F| \leq 1$ 。因此, 我们可以从 $P_{y_0}^1$ 和 $P_{y_0}^2$ 中选择 $P_{y_0}^1$ 作为一条不包含缺失边的 3 长路。 $P_{y_1}^1$ 类似。设 f 是 F_0 中的一个任意元素(即 $f \in F_0$), 让 $F' = F_0 \setminus \{f\}$ 。那么 $|F'| = n - 3$, 由归纳假设, 在 $Q_{n,k}^0 - F'$ 中存在一个延展星图 $ES(x; d_{Q_{n,k}^0-F'}(x))$ 。设 $A = ES(x; d_{Q_{n,k}^0-F'}(x))$ 。

如果 A 不包含 f , 那么我们可以在 $Q_{n,k}^0 - F_0$ 中顶点 x 处找到一个延展星图 $ES(x; d_{Q_{n,k}^0-F_0}(x)) = A$ 。现在我们讨论 A 包含 f 。

情形 2.1 f 与 x 相关联。

我们可以通过删除包含 f 的这条路找到一个延展星图 $ES(x; d_{Q_{n,k}^0-F_0}(x))$ 。然后连接 P_{y_0} 到 x , 与 $ES(x; d_{Q_{n,k}^0-F_0}(x))$ 结合。因此, 我们在 $Q_{n,k} - F_e$ 中点 x 处可以找到一个延展星图。

情形 2.2 f 与 x 不相关联。

令 P_u 是一条从 u 开始的 3 长路并且它包含 f , 然后 u 与 x 相关联。注意 $u \in V(Q_{n,k}^0)$ 。由引理 2.5, 不失一般性, 令 $u = \bar{u}_1 u_2 \cdots u_{n-1} 0$, u 有两个外部邻域 $u_0 = \bar{u}_1 u_2 \cdots u_k u_{k+1} \cdots u_{n-1} 1 \in V(Q_{n,k}^1)$ 和 $u_1 = \bar{u}_1 u_2 \cdots \bar{u}_k \bar{u}_{k+1} \cdots \bar{u}_{n-1} 1 \in V(Q_{n,k}^1)$ 。因为 $|F_e| \leq n - 1$, $|F_0| = n - 2$, 在 $Q_{n,k}^0$ 外面至多存在 F_e 中的一条边, 我们取 u 的一个外部邻域 u_0 且 $uu_0 \notin F_e$ 。设 $H_{ij}(i \in \{u_1, \bar{u}_1\}, j \in \{u_{n-1}, \bar{u}_{n-1}\})$ 是由第 1 位是 i 、第 $n - 1$ 位是 j 、第 n 位是 1 的点集导出的 $Q_{n,k}^1$ 的子图。由 $Q_{n,k}$ 的定义, H_{ij} 同构于 Q_{n-3} 。 $Q_{n,k}^1$ 可以被分解为四个不同的子图 $H_{\bar{u}_1, u_{n-1}}, H_{\bar{u}_1, \bar{u}_{n-1}}, H_{u_1, u_{n-1}}, H_{u_1, \bar{u}_{n-1}}$ 。由此可知, $u_0 \in V(H_{\bar{u}_1, u_{n-1}})$, $u_1 \in V(H_{\bar{u}_1, \bar{u}_{n-1}})$, $y_0 \in V(H_{u_1, u_{n-1}})$, $y_1 \in V(H_{u_1, \bar{u}_{n-1}})$ 。由引理 2.5, $\kappa(H_{ij}) = \kappa(Q_{n-3}) = n - 3 > |F_1|$, 我们可以得到 $H_{ij} - F_1$ 是连通的。当 $n \geq 6$ 时, $|V(H_{ij})| = |V(Q_{n-3})| = 2^{n-3} \geq 2^3 = 8$ 。因此我们在 $H_{\bar{u}_1, u_{n-1}} - F_1$ 中找到 3 长路 P_{y_0} , 在 $H_{\bar{u}_1, \bar{u}_{n-1}} - F_1$ 中找到 3 长路 P_{y_1} , 在 $H_{u_1, u_{n-1}} - F_1$ 中找到 2 长路 P_{u_0} , 在 $H_{u_1, \bar{u}_{n-1}} - F_1$ 找到 2 长路 P_{u_1} 。显然, 这四条路没有公共顶点。我们连接 P_{y_0} 到 x , P_{y_1} 到 x , P_{u_0} 到 u , 然后把它与 $ES(x; d_{Q_{n,k}^0-F_0}(x))$ 结合。那么, 我们可以在 $Q_{n,k} - F_e$ 中顶点 x 处找到一个延展星图 $ES(x; d_{Q_{n,k}-F_e}(x))$ 。 $uu_1 \notin F_e$ 的讨论与上述类似。

情形 3 $|F_0| = n - 1$ 。

设 f, f' 是 F_0 中任意元素, $F' = F_0 \setminus \{f, f'\}$ 。那么 $|F'| = n - 3$ 。由归纳假设, 我们可以在 $Q_{n,k}^0 - F'$ 中得到一个延展星图 $ES(x; d_{Q_{n,k}^0 - F'}(x))$ 。令 $A = ES(x; d_{Q_{n,k}^0 - F'}(x))$ 。

情形 3.1 A 不包含 f 和 f' 。

我们可以发现这个延展星图 $ES(x; d_{Q_{n,k}^0 - F_0}(x)) = A$ 。注意 $|F_e| \leq n - 1$, $|F_0| = n - 1$ 。那么在 $Q_{n,k}^1$ 中不存在缺失边 F_e 。因此我们可以找到两条不同的 3 长路 P_{y_0} 和 P_{y_1} , 然后我们连接 P_{y_0} 和 P_{y_1} 到 x 。因此, 我们在 $Q_{n,k} - F_e$ 中得到一个延展星图 $ES(x; d_{Q_{n,k} - F_e}(x))$ 。

情形 3.2 A 包含 f 或 f' 中的一条。

不失一般性, 我们假设 A 包含 f 。现在我们考虑 f 是否和 x 相关联。如果 f 与 x 相关联, 证明类似于情形 2.1。如果 f 不与 x 相关联, 证明类似于情形 2.2。

情形 3.3 A 包含 f 和 f' 。

如果 f 和 f' 都与 x 相关联, 我们可以通过删除这两条分别包含 f 和 f' 的边得到延展星图 $ES(x; d_{Q_{n,k}^0 - F_0}(x))$ 。后面的证明完全类似于情形 3.1。如果 $\{f, f'\}$ 中只有一条边与 x 相关联, 不失一般性, 令 f' 与 x 相关联, f 不与 x 相关联。我们可以在 $Q_{n,k}^0 - \{F_0 \cup f'\}$ 中找到一个延展星图 $ES(x; d_{Q_{n,k}^0 - \{F_0 \cup f'\}}(x))$ 。证明类似于情形 2.2。如果 f 和 f' 都不与 x 相关联, 我们考虑 f 和 f' 是否属于一条路。如果 f 和 f' 都属于同一条路, 那么后面的证明类似于情形 2.2。因此我们假设 f 和 f' 属于 A 中不同的两条路。设 P_u 是一条从 $u(u = \bar{u}_1 \bar{u}_2 \cdots \bar{u}_{n-1} 0)$ 开始的 3 长路并且包含 f 。设 P_v 是一条从 $v(v = \bar{u}_1 \bar{u}_2 \cdots \bar{u}_{n-1} 0)$ 开始的 3 长路并且包含 f' 。 u 和 v 在 $Q_{n,k}^1$ 中分别有两个外部邻域, 设 u 和 v 的一个外部邻域分别是 u_0 和 v_0 , $u_0, v_0 \in V(Q_{n,k}^1)$ 。注意到 $|F_e| \leq n - 1$, $|F_0| = n - 1$, 那么在 $Q_{n,k}^0$ 外部不存在 F_e 中的任何边。设 $H_{ij}(i \in \{u_1, \bar{u}_1\}, j \in \{u_{n-1}, \bar{u}_{n-1}\})$ 是由第 1 位是 i 、第 $n-1$ 位是 j 、第 n 位是 1 的点集导出的 $Q_{n,k}^1$ 的子图。由 $Q_{n,k}$ 的定义, H_{ij} 同构于 Q_{n-3} 。 $Q_{n,k}^1$ 可以被分解为四个不同的子图 $H_{\bar{u}_1, u_{n-1}}, H_{\bar{u}_1, \bar{u}_{n-1}}, H_{u_1, u_{n-1}}, H_{u_1, \bar{u}_{n-1}}$ 。因此, $v_0 \in V(H_{\bar{u}_1, \bar{u}_{n-1}})$, 由引理 2.5, $\kappa(H_{ij}) = \kappa(Q_{n-3}) = n - 3 > |F_1|$, $H_{ij} - F_1$ 是连通的。我们可以在 $Q_{n,k}^1$ 中分别找到一条从 u_0 、 v_0 开始的 3 长路。最后我们在 $Q_{n,k} - F_e$ 中顶点 x 处得到一个延展星图 $ES(x; d_{Q_{n,k} - F_e}(x))$ 。

定理 5.2 令 $Q_{n,k}(n \geq 6)$, 设 F_e 是任意缺失边集且 $|F_e| \leq n - 1$ 。对于 $Q_{n,k}$ 中每个顶点 x , $Q_{n,k} - F_e$ 有强局部可诊断性。

证明 由引理 4.6 和 5.4, 对于 $n \geq 6$ 且 $|F_e| \leq n - 1$, $Q_{n,k} - F_e$ 的每一个顶点 x 的局部可诊断度等于它剩余的度。由引理 4.8, 在 $Q_{n,k} - F_e$ 中的每个顶点 x 有强局部可诊断性。由引理 5.1, $Q_{n,k} - F_e$ 有强局部可诊断性。

现在我们证明声明二: $i < k$ (即 $1 \leq i < k \leq n - 1$)。

由引理 2.1, 增强超立方体 $Q_{n,k}(1 \leq k \leq n - 1)$ 可以被分解为两个子图 $Q_{n,k}^0$ 和 $Q_{n,k}^1$, 它们是两个 $n - 1$ 维增强超立方体。由引理 2.3, $Q_{n,k}^0$ 和 $Q_{n,k}^1$ 同构于 $Q_{n-1, k-1}$ 。首先, 我们讨论 $Q_{n,2}$ 。

引理 5.5 对于增强超立方体 $Q_{n,2}$ 且 $n \geq 6$ 中的每一个顶点 x , 在顶点 x 处存在一个延展星图 $ES(x; n + 1)$ 。

证明 我们可以沿着第一个位置把 $Q_{n,2}$ 分解为两个不同的子图 $Q_{n,2}^0$ 和 $Q_{n,2}^1$, 在子图中每个顶点 $x = u_1 u_2 \cdots u_n \in V(Q_{n,2}^j)(j \in \{0, 1\})$ 在第一个位置 u_1 处都有一个固定的整数 $j(j \in \{0, 1\})$ 。显然, $Q_{n,2}^j$ 同构于 $Q_{n-1,1}$, 且 $Q_{n-1,1}$ 是一个 $n - 1$ 维增强超立方体。由引理 2.2, $Q_{n-1,1}$ 是折叠超立方体 FQ_{n-1} 。

我们应该在顶点 x 处找到一个延展星图作为 $Q_{n,2}$ 的子图。由引理 2.5, $Q_{n,2}$ 是点传递的。因此, 顶点 $x = 00 \cdots 00 \in V(Q_{n,2}^0)$ 可以作为延展星图 $ES(x; n)$ 的根。由引理 5.2, 在 n 维折叠超立方体 $FQ_n(n \geq 6)$ 中

每个顶点 x 处都存在一个延展星图 $ES(x; n+1)$ 。因此在 $Q_{n,2}^0$ 中顶点 x 处存在一个延展星图 $ES(x; n)$ 。注意顶点 x 存在一个外部邻点 $y = 100 \cdots 00 \in V(Q_{n,2}^1)$ 。注意到 3 长路 $P_y = \langle 100 \cdots 00, 110 \cdots 00, 1110 \cdots 00, 11110 \cdots 00 \rangle$ 在 $Q_{n,2}^1$ 中。我们连接 P_y 到 x ，然后与 $ES(x; n)$ 结合。因此，我们在 $Q_{n,2}$ 中点 x 处得到一个延展星图 $ES(x; n+1)$ 。

定理 5.3 设 $Q_{n,2}$ 是增强超立方体且 $n \geq 6$ ，则 $Q_{n,2}$ 的诊断度是 $n+1$ ，即 $t(Q_{n,2}) = n+1$ ， $Q_{n,2}$ 有强局部诊断性。

证明 由引理 4.6 和 5.5， $Q_{n,2}$ 每个顶点 x 的局部可诊断度是 $n+1$ 。由引理 4.5， $Q_{n,2}$ 的局部可诊断度是 $n+1$ ，即 $t(Q_{n,2}) = n+1$ 。由于 $Q_{n,2}$ 中每个顶点 x 的度是 $n+1$ ，每个顶点的局部可诊断度等于它的度，由引理 5.1， $Q_{n,2}$ 有强局部可诊断性。

引理 5.6 设 F_e 是任意缺失边集且 $|F_e| \leq n-1$ 。对于 $Q_{n,2} (n \geq 6)$ 中每一个顶点 x ，在 $Q_{n,2} - F_e$ 中的 x 处存在一个延展星图 $ES(x; d_{Q_{n,2}-F_e}(x))$ 。

证明 由引理 2.5， $Q_{n,2}$ 是点传递的。因此， $x = 00 \cdots 00 \in V(Q_{n,2}^0)$ 可以被作为延展星图 $ES(x; d_{Q_{n,2}-F_e}(x))$ 的一个根。增强超立方体 $Q_{n,2}$ 可以被分解为两个不同的子图 $Q_{n,2}^0$ 和 $Q_{n,2}^1$ ，其中每个子图的顶点 $x = u_1 u_2 \cdots u_n \in V(Q_{n,2}^j) (j \in \{0,1\})$ 在第一位 u_1 处都有一个固定整数 j 。显然 $Q_{n,2}^j$ 同构于 $Q_{n-1,1}$ ， $Q_{n-1,1}$ 是一个 $n-1$ 维的增强超立方体。由引理 2.2， $Q_{n-1,1}$ 是折叠超立方体 FQ_{n-1} 。设 $F_j = F \cap E(Q_{n,2}^j)$ 对于 $j \in \{1,0\}$ ， $|F_0| = \max\{|F_0|, |F_1|\}$ 。由 $Q_{n,k}$ 的定义， $Q_{n,2}^j$ 同构于 Q_{n-1} 且 $Q_{n,2}^j$ 中的每个顶点在另外一个子图有一个外部邻域。设 x 在 $Q_{n,2}^0$ 中，那么 $y = 100 \cdots 00$ 且 $y \in V(Q_{n,2}^1)$ 是 x 的邻域。为了证明这个引理，我们首先需要在 $Q_{n,2}^0 - F_0$ 中顶点 x 处找到一个延展星图 $ES(x; d_{Q_{n,2}^0-F_0}(x))$ 。然后找到一条 3 长路 P_y ，并且在 $Q_{n,2}^1$ 中。我们连接 P_y 到 x ，把它结合到 $ES(x; d_{Q_{n,2}^0-F_0}(x))$ 。故我们可以在 $Q_{n,2} - F_e$ 中顶点 x 处找到一个延展星图 $ES(x; d_{Q_{n,2}-F_e}(x))$ 。考虑下面两种情形。

情形 1 $|F_0| \leq n-2$ 。

注意到 $Q_{n,2}^0$ 同构于 FQ_{n-1} ， $|F_0| \leq n-2$ 。由引理 2.6，令 F_e 是一个任意缺失边集且 $|F_e| \leq n-2$ ，对于 FQ_{n-1} 中每一个顶点 x ，在 $FQ_{n-1} - F_e$ 中都可以找到一个延展星图 $ES(x; d_{FQ_{n-1}-F_e}(x))$ 。那么我们可以在 $Q_{n,2}^0 - F_0$ 中顶点 x 处找到一个延展星图 $ES(x; d_{Q_{n,2}^0-F_0}(x))$ 。设 $A = ES(x; d_{Q_{n,2}^0-F_0}(x))$ 。如果 $xy \in F_e$ ，那么我们不需要通过 xy 来扩展 A 。假设 $xy \notin F_e$ 。由引理 2.5， $\kappa(Q_{n,2}^1) = \kappa(FQ_{n-1}) = n > n-2 > |F_1|$ ，那么 $Q_{n,2}^1 - F_1$ 是连通的。当 $n \geq 6$ 时， $|V(Q_{n,2}^1)| = |V(FQ_{n-1})| = 2^{n-1} \geq 2^5 = 32$ 。因此在 $Q_{n,2}^1 - F_1$ 中存在一条从 y 开始的 3 长路 $P_y = \langle 100 \cdots 00, 110 \cdots 00, 1110 \cdots 00, 11110 \cdots 00 \rangle$ ，把它连接到 A ，那么我们可以在 $Q_{n,2} - F_e$ 中 x 处找到一个延展星图 $ES(x; d_{Q_{n,2}-F_e}(x))$ 。

情形 2 $|F_0| = n-1$ 。

令 f 是 F_0 的任意一个元素(即 $f \in F_0$)且 $F' = F_0 \setminus \{f\}$ 。那么 $|F'| = n-2$ 。由归纳假设，我们可以在 $Q_{n,2}^0 - F'$ 中得到一个延展星图 $ES(x; d_{Q_{n,2}^0-F'}(x))$ 。令 $A = ES(x; d_{Q_{n,2}^0-F'}(x))$ 。

情形 2.1 A 不包含 f 。

我们可以找到一个延展星图 $ES(x; d_{Q_{n,2}^0-F_0}(x)) = A$ 。注意到 $|F_e| \leq n-1$ ， $|F_0| = n-1$ ，那么在 $Q_{n,2}^1$ 中不存在 F_e 中的任何缺失边。因此在 $Q_{n,2}^1 - F_1$ 中存在一条从 y 开始的 3 长路 P_y ，通过 xy 连接到 A ，在 $Q_{n,2} - F_e$ 中 x 处得到一个延展星图 $ES(x; d_{Q_{n,2}-F_e}(x))$ 。

情形 2.2 A 包含 f 。

如果 f 与 x 相关联, 我们可以通过删除这条包含 f 的路得到延展星图 $ES(x; d_{Q_{n,2}^0 - F_e}(x))$ 。后面的证明完全类似于情形 2.1。如果 f 不与 x 相关联, 令 P_u 是一条从 u 开始的 3 长路并且包含 f , u 在 $Q_{n,2}^1$ 有一个邻域 u_0 。由 $Q_{n,k}$ 的定义, $N_{Q_{n,2}^0}(x) = \{0100 \cdots 00, 0010 \cdots 00, \dots, 00 \cdots 01, 011 \cdots 11\}$ 。不失一般性, 令 $u = 010 \cdots 00$, 则 $u_0 = 110 \cdots 00$ 。我们需要在 $Q_{n,2}^1$ 找到一条不包含缺失边的 3 长路 P_{u_0} 。设 $H_j (j \in \{0,1\})$ 是由第 1 位是 1、第 2 位是 j 的点集导出的 $Q_{n,2}^1$ 的子图。由增强超立方体 $Q_{n,k}$ 的定义, H_j 同构于 Q_{n-2} 。 $Q_{n,2}^1$ 可以被分解为两个不同的子图 H_0, H_1 , 且 $u_0 \in V(H_1)$, $y \in V(H_0)$ 。显然, P_y 和 P_{u_0} 之间没有公共点。由引理 2.5, $\kappa(H_j) = \kappa(Q_{n-2}) = n-2 > |F_1|$, 故 $H_j - F_1$ 是连通的。当 $n \geq 6$ 时, $|V(H_j)| = |V(Q_{n-2})| = 2^{n-2} \geq 2^4 = 16$, 因此我们可以在 $H_0 - F_1$ 和 $H_1 - F_1$ 中分别找到一条 3 长路 P_y 和一条 2 长路 P_{u_0} 。显然, 这两条路是点不交的。因此我们在 $Q_{n,2} - F_e$ 中 x 点处得到了一个延展星图 $ES(x; d_{Q_{n,2} - F_e}(x))$ 。

定理 5.4 令 $Q_{n,2} (n \geq 6)$, 设 F_e 是任意缺失边集且 $|F_e| \leq n-1$ 。对于 $Q_{n,2}$ 中每个顶点 x , $Q_{n,2} - F_e$ 有强局部可诊断性。

证明 由引理 4.6 和 5.6, $Q_{n,2} - F_e$ 的每一个顶点 x 的局部诊断度等于它剩余的度对于 $n \geq 6$ 且 $|F_e| \leq n-1$ 。由引理 4.8, 在 $Q_{n,2} - F_e$ 中的每个顶点 x 有强局部诊断性。由引理 5.2, $Q_{n,2} - F_e$ 有强局部诊断性。

根据上述证明, 对于 $Q_{n,2} (n \geq 6)$ 中的每个顶点 x 且 $|F_e| \leq n-1$, 我们可以在 $Q_{n,2} - F_e$ 中顶点 x 处找到一个延展星图 $ES(x; d_{Q_{n,2} - F_e}(x))$ 。由引理 2.1, 增强超立方体 $Q_{n,3}$ 可以被分解为两个子图 $Q_{n,3}^0$ 和 $Q_{n,3}^1$, 其中的每个点 $x = u_1 u_2 \cdots u_n \in V(Q_{n,3}^j) (j \in \{0,1\})$ 在第一位 u_1 处有一个固定整数 j 。显然, $Q_{n,3}^j$ 同构于 $Q_{n-1,2}$ 且 $Q_{n-1,2}$ 是 $n-1$ 维的增强超立方体。由于 $Q_{n,2}$ 和 $Q_{n,2} - F_e$ 具有强局部可诊断性, 利用相同的证明方法得到 $Q_{n,3}$ 有强局部可诊断性。设 F_e 是任意缺失边集且 $|F_e| \leq n-1$ 。对于 $Q_{n,3}$ 中每个顶点 x , $Q_{n,3} - F_e$ 有强局部可诊断性。再利用相同的证明方法, 我们使用 $Q_{n,3}$ 和 $Q_{n,3} - F_e$ 的结果可以证明出 $Q_{n,4}$ 和 $Q_{n,4} - F_e$ 也具有强局部诊断性。以此类推, $Q_{n,n-1}$ 具有强的局部可诊断性。设 F_e 是任意缺失边集且 $|F_e| \leq n-1$ 。对于 $Q_{n,n-1}$ 中每个顶点 x , $Q_{n,n-1} - F_e$ 有强局部诊断性。最后, 我们可以得到对于 $1 \leq i < k \leq n-1$, $Q_{n,k}$ 和 $Q_{n,k} - F_e$ 有强的局部可诊断性。

综上所述, 两种声明证明完毕。

定理 5.5 根据两种声明, 我们发现 $Q_{n,k} - F_e$ 有强的局部诊断性。设 F_e 是 $n (n \geq 6)$ 维增强超立方体 $Q_{n,k}$ 中任意缺失边集且 $|F_e| \leq n-1$, 则缺失边 F_e 的个数是最优的。

证明 我们举例说明当 $|F| = n$ 时, $Q_{n,k} - F_e$ 不具有强局部可诊断性。由于 $Q_{n,k}$ 是点传递的, 不失一般性, 假设 $x = \underbrace{00 \cdots 00}_n$ 。我们假设 $Q_{n,k}$ 中 n 条遗失边 F 都与 x 关联(见图 4), 那么在 $Q_{n,k}$ 中 x 的剩余度就变成了 1, 即 $d_{Q_{n,k} - F}(x) = 1$ 。假设 y 是 x 唯一的邻点。令 $F_1 = (\{y\} \cup N(y)) \setminus \{x\}$, $F_2 = N(y)$ 。此时

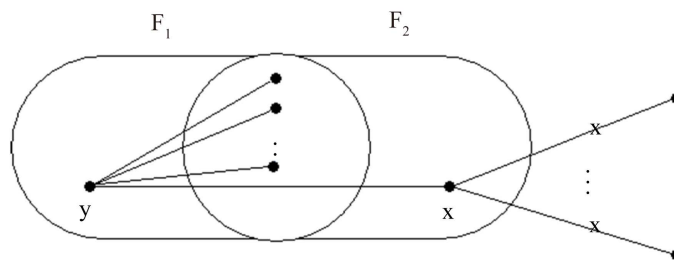


Figure 4. Illustration of the proof in Theorem 5.5
图 4. 定理 5.5 的示意图

$|F_1| = |F_2| = n+1$ 。显然, $V(Q_{n,k}) \setminus (F_1 \cup F_2)$ 和 $F_1 \Delta F_2$ 之间没有边。点集对 (F_1, F_2) 不满足定理 4.1 的(1)~(3), 因此 $Q_{n,k} - F$ 中 y 在 MM*模型下不是局部 $n+1$ 可诊断的。由于 $Q_{n,k} - F$ 中 y 的局部可诊断度(少于 $n+1$) 不等于它的度(等于 $n+1$), 那么 y 没有强局部可诊断性。故 $Q_{n,k}$ 有 n 条缺失边不能保证有强局部可诊断性。

6. 结论

在这篇文章中, 我们研究了 n 维增强超立方体 $Q_{n,k}$ ($n \geq 6$) 在 MM*模型下的局部诊断度。我们证明了 $Q_{n,k}$ 的诊断度是 $n+1$, 以及即使 $Q_{n,k}$ 中存在高达 $n-1$ 条缺失边, 它仍保持这种强的性质。因此, 在 n 维增强超立方体 $Q_{n,k}$ 的缺失边数不超过 $n-1$ 的条件下, 它的诊断度等于每个处理器剩余度的最小值。

致 谢

本论文的完成是在我们的导师王老师的细心指导下进行的。在每次论文遇到问题时老师不辞辛苦地讲解才使得我的论文顺利进行。从论文的选题到资料的搜集直至最后论文的修改, 整个过程中花费了王老师很多的宝贵时间和精力, 在此向导师表示衷心地感谢! 导师严谨的治学态度, 开拓进取的精神和高度的责任心都将使学生受益终生!

还要感谢我同小组的赵丽娜师姐和两位同门, 是你们在平时论文中和我一起探讨问题, 并指出我论文上的误区, 使我能及时地发现问题把论文顺利地进行下去, 没有你们的帮忙我不可能这样顺利地结稿, 在此表示深深的谢意。

参考文献

- [1] Feng, W. and Wang, S. (2020) The Diagnosability of Wheel Networks with Missing Edges under the Comparison Model. *Mathematics*, **8**, Article No. 1818. <https://doi.org/10.3390/math8101818>
- [2] Maeng, J. and Malek, M. (1981) A Comparison Connection Assignment for Self-Diagnosis of Multiprocessors Systems. *Proceeding of the 11th International Symposium on Fault-Tolerant Computing*, Portland, 24-26 June 1981, 173-175.
- [3] Sengupta, A. and Dahbura, A.T. (1992) On Self-Diagnosable Multiprocessor Systems: Diagnosis by the Comparison Approach. *IEEE Transactions on Computers*, **41**, 1386-1396. <https://doi.org/10.1109/12.177309>
- [4] Dahbura, A.T. and Masson, G.M. (1984) An $O(n^{2.5})$ Fault identification Algorithm for Diagnosable Systems. *IEEE Transactions on Computers*, **33**, 486-492. <https://doi.org/10.1109/TC.1984.1676472>
- [5] 樊畅畅, 王世英, 马晓蕾. 有遗失边的 n 维超立方体和折叠超立方体在 MM*模型下的诊断度[J]. *应用数学进展*, 2021, 10(1): 150-159. <https://doi.org/10.12677/AAM.2021.101018>
- [6] Hsu, G.-H. and Tan, J.J.M. (2007) A Local Diagnosability Measure for Multiprocessor Systems. *IEEE Transactions on Parallel and Distributed Systems*, **18**, 598-607. <https://doi.org/10.1109/TPDS.2007.1022>
- [7] Chiang, C.-F. and Tan, J.J.M. (2009) Using Node Diagnosability to Determine t -Diagnosability under the Comparison Diagnosis Model. *IEEE Transactions on Computers*, **58**, 251-259. <https://doi.org/10.1109/TC.2008.158>
- [8] Chiang, C.-F., Hsu, G.-H., Shih, L.-M. and Tan, J.J.M. (2012) Diagnosability of Star Graphs with Missing Edges. *Information Sciences*, **188**, 253-259. <https://doi.org/10.1016/j.ins.2011.11.012>
- [9] Cheng, E. and Lipták, L. (2013) Diagnosability of Cayley Graphs Generated by Transposition Trees with Missing Edges. *Information Sciences*, **238**, 250-252. <https://doi.org/10.1016/j.ins.2013.03.009>
- [10] Cheng, E., Lipták, L. and Steffy, D.E. (2013) Strong Local Diagnosability of (n, k) -Star Graphs and Cayley Graphs Generated by 2-Trees with Missing Edges. *Information Processing Letters*, **113**, 452-456. <https://doi.org/10.1016/j.ipl.2013.03.002>
- [11] Hsieh, S. (2006) Fault-Tolerant Cycles Embedding in the Hypercube with More Both Faulty Vertices and Faulty Edges. *Parallel Computing*, **32**, 84-91. <https://doi.org/10.1016/j.parco.2005.09.003>
- [12] Li, T.-K., Tsai, C.H., Tan, J.J.M. and Hsu, L.-H. (2003) Bipanconnectivity and Edge-Fault-Tolerant Bipancyclicity of Hypercubes. *Information Processing Letters*, **87**, 107-110. [https://doi.org/10.1016/S0020-0190\(03\)00258-8](https://doi.org/10.1016/S0020-0190(03)00258-8)
- [13] Tsai, C.-H., Tan, J.J.M., Liang, T. and Hsu, L.-H. (2002) Fault-Tolerant Hamiltonian Laceability of Hypercubes. *In-*

-
- formation Processing Letters, **83**, 301-306. [https://doi.org/10.1016/S0020-0190\(02\)00214-4](https://doi.org/10.1016/S0020-0190(02)00214-4)
- [14] Tsai, C.-H. (2007) Cycles Embedding in Hypercubes with Node Failures. *Information Processing Letters*, **102**, 242-246. <https://doi.org/10.1016/j.ipl.2006.12.016>
- [15] Tzeng, N.F. and Wei, S. (1991) Enhanced Hypercube. *IEEE Transactions on Computers*, **40**, 284-294. <https://doi.org/10.1109/12.76405>
- [16] Liu, H. (2009) The Structural Features of Enhanced Hypercube Networks. *Proceedings of the 5th International Conference on Natural Computation*, Tianjian, 14-16 August 2009, 345-348. <https://doi.org/10.1109/ICNC.2009.191>
- [17] Liu, H. (2008) Properties and Performance of Enhanced Hypercube Networks. *Fourth International Conference on Networked Computing and Advanced Information Management*, Vol. 1, Gyeongju, 2-4 September 2008, 580-583. <https://doi.org/10.1109/NCM.2008.264>
- [18] Wang, D. (1999) Diagnosability of Hypercubes and Enhanced Hypercubes under the Comparison Diagnosis Model. *IEEE Transactions on Computers*, **48**, 1369-1374. <https://doi.org/10.1109/12.817401>
- [19] Sabir, E., Mamut, A. and Vumar, E. (2019) The Extra Connectivity of the Enhanced Hypercubes. *Theoretical Computer Science*, **799**, 22-31. <https://doi.org/10.1016/j.tcs.2019.09.035>
- [20] Bondy, J.A. and Murty, U.S.R. (2008) *Graph Theory*. Springer, New York.
- [21] Liu, M. and Liu, H. (2013) Paths and Cycles Embedding on Faulty Enhanced Hypercube Networks. *Acta Mathematica Scientia*, **33**, 227-246. [https://doi.org/10.1016/S0252-9602\(12\)60207-0](https://doi.org/10.1016/S0252-9602(12)60207-0)
- [22] Yuan, J., Liu, A., Ma, X., Liu, X. and Qin, X. (2015) The g -Good-Neighbor Conditional Diagnosability of k -Ary n -Cubes under the PMC Model and MM* Model. *IEEE Transactions on Parallel and Distributed Systems*, **26**, 1165-1177. <https://doi.org/10.1109/TPDS.2014.2318305>