Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, 2022, 11(7), 4537-4542
Published Online July 2022 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2022.117480

Hans汉斯

2 + 1维Caputo型时间分数阶膜振动方程的各种精确解

李　文

重庆师范大学数学科学学院，重庆

收稿日期：2022年6月11日；录用日期：2022年7月3日；发布日期：2022年7月14日

摘　要

本文利用变量分离法研究了一个2 + 1维Caputo型时间分数阶膜振动方程的精确求解问题。通过Laplace变换及其逆变换，在一定的初始条件下，借助于Bessel方程的解的相关性质，系统地对此方程的解进行了研究，获得了Caputo型时间分数阶膜振动方程的几种精确解的一般表达式。

关键词

Caputo型时间分数阶膜振动方程，Bessel方程的解，Laplace变换，分离变量法

Different Kinds of Exact Solutions to 2 + 1-Dimensional Time Fractional Membrane Vibration Equation of Caputo Type

Wen Li

School of Mathematical Sciences, Chongqing Normal University, Chongqing

Received: Jun. 11th, 2022; accepted: Jul. 3rd, 2022; published: Jul. 14th, 2022

Abstract

In this paper, the exact solution of a 2 + 1-dimensional time fractional membrane vibration equation of Caputo type is studied by using the separation method of variables. Through Laplace transformation and its inverse transformation, under certain initial conditions, with the help of

文章引用: 李文. 2 + 1 维 Caputo 型时间分数阶膜振动方程的各种精确解[J]. 应用数学进展, 2022, 11(7): 4537-4542.
DOI: 10.12677/aam.2022.117480

the relevant properties of the solution of Bessel equation, the solutions of this equation are studied systematically, and the general expressions of several exact solutions of time fractional membrane vibration equation of Caputo type are obtained.

Keywords

Time Fractional Membrane Vibration Equation of Caputo Type, Solution of Bessel Equation, Laplace Transform, Separation Method of Variables

1. 引言

17 世纪 90 年代 L'Hospital 给 Leibnitz 写信时问到：当函数的导数的阶数为分数时应该怎么计算和理解这种导数的问题？打这开始，分数阶微积分的思想提出已经有三百多年的历史了，几乎在提出古典微积分概念的那个时代(即 Leibnitz 时代)，分数阶微积分概念就已经诞生了。由于分数阶导数的几何意义和物理意义不是很明确，所以长期以来，人们都是从纯数学的角度去研究这个问题。近几十年以来，随着研究的深入，人们逐渐解决了分数阶导数在实际应用中的建模问题，才使得分数阶导数与实际的物理现象能够联系起来，致使分数阶微积分理论得以快速发展。到目前为止，分数阶微积分在许多领域都得到了较好的应用，如在能量交换[1] [2]、粘弹性材料[3] [4]、生物学[5] [6]、信号处理[7] [8]以及磁力学[9]等领域都已经体现了分数阶导数的应用。然而对于用其建立的分数阶微分方程模型，在求解方面与整数阶微分模型的求解相比，是很难获得这些分数阶微分方程的解析解的。在以往的研究中，有许多关于分数阶方程的求解研究都是关于求数值解的方面的研究或者仅讨论解的存在性和稳定性，这离精确求解目标还有一定的差距，因此如何求分数阶微分方程的精确解是当今国内外研究团队的热门课题之一。在这个背景下，本文将系统地研究 2 + 1 维 Caputo 型时间分数阶膜振动方程的精确求解问题。

薄膜在空气中的膜振动可以直接地应用整数阶波动方程来描述和刻画。但在一些特殊情况下，即在其他介质中的膜振动问题，例如薄膜在油介质中的振动问题，或者薄膜本身就是用具有粘弹性的物质做成的，就难于利用整数阶波动方程来描述和刻画其振动现象，这种问题只能用分数阶模型来描述和刻画。近年来，由于时间分数阶膜振动方程的独特的性质以及分数阶微分方程求解方面的难度，其精确解的求解方法以及精确解所蕴含的性质方面的研究备受关注，而且这类模型在许多方面都有很好的应用。本文将利用变量分离法和 Laplace 变换法来研究下列 2 + 1 维 Caputo 型时间分数阶膜振动方程的精确解：

$$\frac{\partial^\alpha u}{\partial t^\alpha}=c^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}\right), \tag{1}$$

其边界条件如下：

$$0\le r\le a,\quad 0\le\theta\le 2\pi,\quad t>0, \tag{2}$$

这里函数 $u=u(t,r,\theta)$，$\frac{\partial^\alpha}{\partial t^\alpha}={}_0^C D_t^\alpha$ 为 Caputo 型分数阶微分算子且 $1<\alpha<2$，其中 u 表示薄膜在极坐标 (r,θ) 上的位移，(r,θ) 为极坐标系，t 表示时间，c 为常数。当 $\alpha=2$ 时，模型(1)表示薄膜在空气中振动，当 $1<\alpha<2$ 时，模型(1)表示薄膜在其他介质中振动。

分数阶微分方程的求解往往是较为复杂的，一般而言，都是试图找到一种方法，将复杂的时间分数阶偏微分方程转化为我们常见易解的整数阶微分方程来研究。本文通过变量分离法以及 Laplace 变换等手段来求解 Caputo 型分数阶膜振动方程(1)，并对这些解的动力学性质以及实际物理意义进行分析和探讨。

2. 分数阶膜振动方程的解

首先，我们假设方程(1)的解可以表示成下列变量分离的形式：

$$u=T(t)R(r)\Theta(\theta), \tag{3}$$

在 Caputo 型分数阶微分算子的作用下，将其代入(1)式后化简得：

$$\frac{{}^{C}D_t^{\alpha}T(t)}{c^2T(t)}=\frac{1}{r}\frac{R'(r)}{R(r)}+\frac{R''(r)}{R(r)}+\frac{1}{r^2}\frac{\Theta''(\theta)}{\Theta(\theta)}.$$

设等式两边的比值为 $-\rho$ (其为任意常数)，则上式化为：

$$\frac{{}^{C}D_t^{\alpha}T(t)}{c^2T(t)}=-\rho, \tag{4}$$

$$\frac{R''(r)}{R(r)}+\frac{1}{r}\frac{R'(r)}{R(r)}+\frac{1}{r^2}\frac{\Theta''(\theta)}{\Theta(\theta)}=-\rho, \tag{5}$$

再次利用变量分离方法将方程(5)化为：

$$r^2\frac{R''(r)}{R(r)}+r\frac{R'(r)}{R(r)}+\rho r^2=-\frac{\Theta''(\theta)}{\Theta(\theta)}. \tag{6}$$

设等式两边的比值为 $-\lambda$ (其比值为常数)，则(6)化为：

$$-\frac{\Theta''(\theta)}{\Theta(\theta)}=-\lambda. \tag{7}$$

$$r^2\frac{R''(r)}{R(r)}+r\frac{R'(r)}{R(r)}+\rho r^2=-\lambda, \tag{8}$$

至此，求方程(1)形如(3)的解便转化为求方程(4)、(7)、(8)的解。其中，方程(4)是线性的分数阶微分方程，可以通过 Laplace 变换获得它的通解，方程(7)是二阶线性常系数微分方程，通过它的特征方程也较为容易获得它的通解，而方程(8)是一个二阶的变系数微分方程，求解它是比较困难的。在本文中，我们将借助于 Bessel 方程的解的结构[10] [11]，来获得方程(8)的通解。下面，我们给出全部的求解过程：

将方程(4)整理成

$${}^{C}D_t^{\alpha}T(t)=-\rho c^2T(t). \tag{9}$$

显然 $\rho=0$ 时，$T(t)=C$ (任意常数)，表示时间对膜振动无影响，不符合实际情况，因此此种情况不存在。故下面只需对 $\rho\neq 0$ 的情形进行讨论。

在 Caputo 型分数阶导数的定义下，对(9)式两边做 Laplace 变换得：

$$L\left[{}^{C}D_t^{\alpha}T(t),s\right]=L\left[-\rho c^2T(t),s\right]. \tag{10}$$

由 Caputo 型分数阶导数的 Laplace 变换公式，不难得到：

$$s^{\alpha}\Phi(s)-s^{\alpha-2}T'(0)-s^{\alpha-1}T(0)=-\rho c^2\Phi(s).$$

上式中解出 $\Phi(s)$ 得：

$$\Phi(s)=\frac{s^{\alpha-1}T(0)+s^{\alpha-2}T'(0)}{s^{\alpha}+\rho c^2}, \tag{11}$$

对(11)式做 Laplace 逆变换，得到：

$$T(t)=T(0)E_{\alpha}\left(-\rho c^2t^{\alpha}\right)+T'(0)tE_{\alpha,2}\left(-\rho c^2t^{\alpha}\right). \tag{12}$$

方程(7)化为：

$$\Theta''(\theta)-\lambda\Theta(\theta)=0,$$

1* 当 $\lambda<0$ 时，$-\lambda>0$，此方程为二阶线性微分方程，故其通解为

$$\Theta(0)=A_1\cos\left(\sqrt{-\lambda}\theta\right)+B_1\sin\left(\sqrt{-\lambda}\theta\right),\ (A_1,B_1\text{ 为任意常数}) \tag{13}$$

2* 当 $\lambda>0$ 时，由常微分，则此时方程的通解为

$$\Theta(\theta)=A_2\mathrm{e}^{\sqrt{\lambda}\theta}+B_2\mathrm{e}^{-\sqrt{\lambda}\theta},\ (A_2,B_2\text{ 为任意常数}) \tag{14}$$

3* 当 $\lambda=0$ 时，则此时方程的通解为

$$\Theta(\theta)=A_3\theta+B_3,\ (A_3,B_3\text{ 为任意常数}) \tag{15}$$

方程(8)化为：

$$r^2R''(r)+rR'(r)+\left(\rho r^2+\lambda\right)R(r)=0. \tag{16}$$

下面我们分情况来讨论方程(16)的解。

情形 1 $\rho>0$ 的情况

当 $\lambda\le 0$ 时，$-\lambda\ge 0$，此时方程(16)显然为 $m=\sqrt{-\lambda}$ 阶 Bessel 方程，由 Bessel 方程的性质，故其解为：

$$R(r)=A_4J_m\left(\sqrt{\rho}r\right)+B_4Y_m\left(\sqrt{\rho}r\right), \tag{17}$$

其中 A_4,B_4 为任意常数，而

$$J_m(\chi)=\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(-1)^j}{j!\Gamma(j+m+1)}\left(\frac{\chi}{2}\right)^{2j+m},Y_m(\chi)=\lim_{v\to m}\frac{J_v(\chi)\cos v\pi-J_{-v}(\chi)}{\sin v\pi}. \tag{18}$$

当 $\lambda>0$ 时，方程(16)显然为虚数阶 $\mathrm{i}\sqrt{\lambda}$ 阶 Bessel 方程，由虚阶 Bessel 方程的性质，故通解为：

$$R(r)=A_5J_{\mathrm{i}\sqrt{\lambda}}\left(\left(\sqrt{\rho}\right)r\right)+B_5Y_{\mathrm{i}\sqrt{\lambda}}\left(\left(\sqrt{\rho}\right)r\right). \tag{19}$$

其中 A_6,B_6 为任意常数，且

$$J_{\mathrm{i}n}(\chi)=\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(-1)^j}{j!\Gamma(j+\mathrm{i}n+1)}\left(\frac{\chi}{2}\right)^{2j+\mathrm{i}n},Y_{\mathrm{i}n}(\chi)=\frac{J_{\mathrm{i}n}(\chi)\cosh(n\pi)-J_{-\mathrm{i}n}(\chi)}{\mathrm{i}\sinh(n\pi)}. \tag{20}$$

情形 2 $\rho<0$ 的情况

当 $\rho<0$ 时，方程(16)变为 $r^2R''(r)+rR'(r)-\left(-\rho r^2-\lambda\right)R(r)=0$，当 $\lambda\le 0$ 时，$-\lambda\ge 0$，此时方程为 $q=\sqrt{-\lambda}$ 阶变型 Bessel 方程，由变型的 Bessel 方程的性质[10]，则其解为：

$$R(r)=A_6I_q\left(\sqrt{-\rho}r\right)+B_6K_q\left(\sqrt{-\rho}r\right), \tag{21}$$

其中 A_6,B_6 为任意常数，且

$$I_q(\chi)=\mathrm{i}^{-q}J_q(\mathrm{i}\chi)=\sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{j!\Gamma(j+q+1)}\left(\frac{\chi}{2}\right)^{2j+q},\ K_q(\chi)=\begin{cases}\dfrac{\frac{1}{2}\pi\left[I_{-q}(\chi)-I_q(\chi)\right]}{\sin(q\pi)}(q\notin Z)\\ \lim\limits_{v\to q}\dfrac{\frac{1}{2}\pi\left[I_{-v}(\chi)-I_v(\chi)\right]}{\sin(v\pi)}(q\in Z)\end{cases}. \tag{22}$$

当 $\lambda>0$ 时，则 $-\lambda<0$，方程(16)变为：

$$r^2R''(r)+rR'(r)-\left(-\rho r^2+\left(\mathrm{i}\sqrt{\lambda}\right)^2\right)R(r)=0, \tag{23}$$

此时方程(23)显然为 $\mathrm{i}\sqrt{\lambda}$ 阶变型 Bessel 方程[11]，故其通解为：

$$R(r)=A_7I_{\mathrm{i}\sqrt{\lambda}}\left(\sqrt{-\rho}r\right)+B_7K_{\mathrm{i}\sqrt{\lambda}}\left(\sqrt{-\rho}r\right), \tag{24}$$

其中 A_7,B_7 为任意常数， $I_{\mathrm{i}\sqrt{\lambda}}(\chi),K_{\mathrm{i}\sqrt{\lambda}}(\chi)$ 形如(22)式。

通过上述讨论，我们可以获得方程(1)的各种精确解。当 $\rho>0$ 且 $\lambda=0$ 时，方程(1)具有如下解形式的精确解：

$$u=\left[T(0)E_\alpha\left(-\rho c^2t^\alpha\right)+T'(0)tE_{\alpha,2}\left(-\rho c^2t^\alpha\right)\right]\left[A_4J_0\left(\sqrt{\rho}r\right)+B_4Y_0\left(\sqrt{\rho}r\right)\right]\left[A_3\theta+B_3\right], \tag{25}$$

当 $\rho>0$ 且 $\lambda<0$ 时，方程(1)具有如下解形式的精确解：

$$\begin{aligned}u=&\left[T(0)E_\alpha\left(-\rho c^2t^\alpha\right)+T'(0)tE_{\alpha,2}\left(-\rho c^2t^\alpha\right)\right]\times\left[A_4J_{\sqrt{-\lambda}}\left(\sqrt{\rho}r\right)+B_4Y_{\sqrt{-\lambda}}\left(\sqrt{\rho}r\right)\right]\\&\times\left[A_1\cos\left(\sqrt{-\lambda}\theta\right)+B_1\sin\left(\sqrt{-\lambda}\theta\right)\right],\end{aligned} \tag{26}$$

当 $\rho>0$ 且 $\lambda>0$ 时，方程(1)具有如下解形式的精确解：

$$u=\left[T(0)E_\alpha\left(-\rho c^2t^\alpha\right)+T'(0)tE_{\alpha,2}\left(-\rho c^2t^\alpha\right)\right]\left[A_5J_{\mathrm{i}\sqrt{\lambda}}\left(\sqrt{\rho}r\right)+B_5Y_{\mathrm{i}\sqrt{\lambda}}\left(\sqrt{\rho}r\right)\right]\left[A_2\mathrm{e}^{\sqrt{\lambda}\theta}+B_2\mathrm{e}^{-\sqrt{\lambda}\theta}\right], \tag{27}$$

当 $\rho<0$ 且 $\lambda=0$ 时，方程(1)具有如下解形式的精确解：

$$u=\left[T(0)E_\alpha\left(-\rho c^2t^\alpha\right)+T'(0)tE_{\alpha,2}\left(-\rho c^2t^\alpha\right)\right]\left[A_6I_0\left(\sqrt{-\rho}r\right)+B_6K_0\left(\sqrt{-\rho}r\right)\right]\left[A_3\theta+B_3\right], \tag{28}$$

当 $\rho<0$ 且 $\lambda<0$ 时，方程(1)具有如下解形式的精确解：

$$\begin{aligned}u=&\left[T(0)E_\alpha\left(-\rho c^2t^\alpha\right)+T'(0)tE_{\alpha,2}\left(-\rho c^2t^\alpha\right)\right]\left[A_6I_{\sqrt{-\lambda}}\left(\sqrt{-\rho}r\right)+B_6K_{\sqrt{-\lambda}}\left(\sqrt{-\rho}r\right)\right]\\&\times\left[A_1\cos\left(\sqrt{-\lambda}\theta\right)+B_1\sin\left(\sqrt{-\lambda}\theta\right)\right],\end{aligned} \tag{29}$$

当 $\rho<0$ 且 $\lambda>0$ 时，方程(1)具有如下解形式的精确解：

$$u=\left[T(0)E_\alpha\left(-\rho c^2t^\alpha\right)+T'(0)tE_{\alpha,2}\left(-\rho c^2t^\alpha\right)\right]\left[A_7I_{\mathrm{i}\sqrt{\lambda}}\left(\sqrt{-\rho}r\right)+B_7K_{\mathrm{i}\sqrt{\lambda}}\left(\sqrt{-\rho}r\right)\right]\left[A_2\mathrm{e}^{\sqrt{\lambda}\theta}+B_2\mathrm{e}^{-\sqrt{\lambda}\theta}\right]. \tag{30}$$

3. 结论

本文利用变量分离法研究了一个具有实际应用背景的 2 + 1 维 Caputo 型时间分数阶膜振动方程，在不同参数条件下，获得了 6 种精确解，即解(25)、(26)、(27)、(28)、(29)和解(30)。这些解有一个共同的性质，它们均含有以时间 t 为变量的 Mittag-Leffler 函数，这些 Mittag-Leffler 函数都具有随着时间的增加而衰减性质，因此，所有的解均具有随着时间的增加而衰减的性质，这表明薄膜的振动会随着时间的延

长而衰减，最终趋于平衡位置。特别地，当$\lambda<0$时，解在θ轴方向上做周期振动，但这种周期性的振动仍然会随着时间的增加而衰减。

参考文献

[1] Zingales, M. (2014) Fractional-Order Theory of Heat Transport in Rigid Bodies. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, **19**, 3938-3953. https://doi.org/10.1016/j.cnsns.2014.04.004

[2] Blasiak, S. (2016) Time-Fractional Heat Transfer Equations in Modeling of the Non-Contacting Face Seals. *International Journal of Heat & Mass Transfer*, **100**, 79-88. https://doi.org/10.1016/j.ijheatmasstransfer.2016.04.040

[3] Nobuyuki, S. and Wei, Z. (1999) Fractional Calculus Approach to Dynamic Problems of Viscoelastic Materials. *JSME International Journal Series C*, **42**, 825-837. https://doi.org/10.1299/jsmec.42.825

[4] Adolfsson, K., Enelund, M. and Olsson, P. (2005) On the Fractional Order Model of Viscoelasticity. *Mechanics of Time-Dependent Materials*, **9**, 15-34. https://doi.org/10.1007/s11043-005-3442-1

[5] Mahata, S., Saha, S.K., Kar, R. and Mandal, D. (2018) Optimal Design of Wideband Fractional Order Digital Integrator Using Symbiotic Organisms Search Algorithm. *IET Circuits, Devices & Systems*, **12**, 362-373. https://doi.org/10.1049/iet-cds.2017.0162

[6] Babaei, A., Jafari, H. and Ahmadi, M. (2019) A Fractional Order HIV/AIDS Model Based on the Effect of Screening of Unaware Infectives. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, **42**, 2334-2343. https://doi.org/10.1002/mma.5511

[7] Chen, Y.Q., Sun, R.T. and Zhou, A.H. (2007) An Overview of Fractional Order Signal Processing (FOSP) Techniques. *International Design Engineering Technical Conferences and Computers and Information in Engineering Conference*, Las Vegas, Nevada, 4-7 September 2007, 1205-1222. https://doi.org/10.1115/detc2007-34228

[8] Pei, S.C. and Ding, J.J. (2007) Relations between Gabor Transforms and Fractional Fourier Transforms and Their Applications for Signal Processing. *IEEE Transactions on Signal Processing*, **55**, 4 839-4 850. https://doi.org/10.1109/TSP.2007.896271

[9] Shah, N.A., Vieru, D. and Fetecau, C. (2016) Effects of the Fractional Order and Magnetic Field on the Blood Flow in Cylindrical Domains. *Journal of Magnetism and Magnetic Materials*, **409**, 10-19. https://doi.org/10.1016/j.jmmm.2016.02.013

[10] Matyshev, A.A. and Fohtung, E.B. (2014) On the Computation and Applications of Bessel Functions with Pure Imaginary Indices (Orders) in Physics and Specifically in Corpuscular Optics. *Научное приборостроение*, **24**, 144-151.

[11] 范国新, 杨奔疾. 虚阶 Bessel 函数的计算[J]. 计算物理, 1994(4): 444-445.