Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, 2022, 11(7), 4979-4989
Published Online July 2022 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2022.117522

一类耦合k-Hessian 系统非线性径向k-凸解的渐近行为

岳存燕*

西北师范大学，数学与统计学院，甘肃 兰州

收稿日期：2022年6月25日；录用日期：2022年7月20日；发布日期：2022年7月27日

摘 要

基于锥上的不动点定理，本文主要研究一类耦合k-**Hessian** 系统非线性径向k-凸解的渐近行为。

关键词

耦合k-**Hessian**系统，非线性径向k-凸解，渐近行为，不动点定理

The Asymptotic Behavior of Nontrivial Radial k-Convex Solutions for a Class of Coupled k-Hessian System

Cunyan Yue*

College of Mathematics and Statistics, Northwest Normal University, Lanzhou Gansu

Received: Jun. 25^{th}, 2022; accepted: Jul. 20^{th}, 2022; published: Jul. 27^{th}, 2022

Abstract

Based on the fixed-point theorem in cone, we study the asymptotic behavior of nontrivial radial k-convex solutions for a class of coupled k-Hessian system.

* Email: yuecunyan@163.com

文章引用: 岳存燕. 一类耦合k-Hessian 系统非线性径向k-凸解的渐近行为[J]. 应用数学进展, 2022, 11(7): 4979-4989. DOI: 10.12677/aam.2022.117522

Keywords

Coupled k-Hessian System, Nontrivial Radial k-Convex Solution, Asymptotic Behavior, Fixed-Point Theorem

1. 介绍

本文主要考虑一类耦合 k-Hessian 系统

$$\begin{cases} S_k(D^2u_1) = \lambda_1 f_1(-u_2) \text{ in } \Omega, \\ S_k(D^2u_2) = \lambda_2 f_2(-u_3) \text{ in } \Omega, \\ \qquad\vdots \\ S_k(D^2u_n) = \lambda_n f_n(-u_1) \text{ in } \Omega, \\ u_1 = u_2 = \cdots = u_n = 0 \text{ on } \partial\Omega, \end{cases} \tag{1.1}$$

非线性径向k-凸解的存在性和渐近行为, 其中 λ_i 是正参数, $f_i \in C([0,+\infty),[0,+\infty))$, $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^N : |x| \le 1\}(N \ge 2)$, $u_i \in C^2(\mathbb{R}^N)$, D^2u_i 是二阶连续微分函数 u_i 的 Hessian 矩阵, $S_k(\lambda(D^2u_i))$ 是第 k 阶初等对称多项式, 是 Hessian 矩阵 D^2u_i 的所有 $k \times k$ 阶主子式的和, $i = 1, 2, \cdots, n$.

一般地, 我们定义如下的 k-Hessian 算子:

$$S_k(\lambda(D^2u)) = \sum_{1\le j_1<\ldots<j_k\le N} \lambda_{j_1}\lambda_{j_2}\ldots\lambda_{j_k}, k = 1, 2, \cdots, N.$$

特别地, 当 $k = 1$ 时, k-Hessian 算子退化为 Laplace 算子 $S_1(\lambda(D^2u)) = \sum_{i=1}^{N}\lambda_i = \Delta u$, 详见 [1, 2]; 当 $k = N$ 时, k-Hessian 算子退化为 Monge-Ampère 算子 $S_N(\lambda(D^2u)) = \prod_{i=1}^{N} = \det(\lambda(D^2u))$, 详见 [3–7].

近年来, Laplace 问题和 Monge-Ampère 问题已广泛的应用于数学与应用数学的主要分支. 有关 Laplace 问题和 Monge-Ampère 问题解的存在性、 不存在性、 多解性、 唯一性和渐近稳定性的相关结果详见文献 [1–7]. 特别地, 在 2021 年, 冯美强 [7] 中运用锥上的不动点定理得到

了Monge-Ampère 系统

$$\begin{cases} \det(D^2u_1) = \lambda_1 f_1(-u_2) \text{ in } \Omega, \\ \det(D^2u_2) = \lambda_2 f_2(-u_3) \text{ in } \Omega, \\ \qquad\qquad \vdots \\ \det(D^2u_n) = \lambda_n f_n(-u_1) \text{ in } \Omega, \\ u_1 = u_2 = \cdots = u_n = 0 \text{ on } \partial\Omega, \end{cases}$$

非线性径向凸解的存在性和渐近行为.

k-Hessian 方程是一类非线性完全偏微分方程, 在几何学、 流体力学和其他应用学科中有着重要的应用. 许多学者通过单调迭代方法、 上下解方法、 变分方法、 不动点定理以及移动平面等方法得到了诸多有关 k-Hessian 方问题解的存在性、 不存在性、 多解性、 唯一性和渐近稳定性的优秀结果, 详见文献 [8–12]. 例如, 在 2019 年, 冯美强 [8] 中运用锥上的不动点定理得到了k-Hessian 系统

$$\begin{cases} S_k(D^2u_1) = \lambda_1 f_1(-u_2) \text{ in } \Omega, \\ S_k(D^2u_2) = \lambda_2 f_2(-u_1) \text{ in } \Omega, \\ u_1 = u_2 = 0 \text{ on } \partial\Omega, \end{cases}$$

非线性径向凸解的存在性和渐近行为.

受文献 [7]和 [8]的启发, 本文将通过不动点定理研究耦合 k-Hessian 系统 (1.1) 非线性径向k-凸解的存在性及渐近行为. 本文的主要工作是对文献 [7,8]的推广.

2. 预备知识

本节给出一些必要的引理和主要工具.

对任意的 $k = 1, 2, \cdots, N$, 定义集合

$$\Gamma_k := \{\nu \in \mathbb{R}^N : S_k(\nu) > 0, 1 \le k \le N\} \subset \mathbb{R}^N.$$

定义 1.1. ([13]) 设 Ω 是 $\mathbb{R}^N$ 中的一个有界开集, 若对任意的 $x \in \Omega$, Hessian 矩阵的特征向量 $\nu_1, \nu_2, \cdots, \nu_N$ 满足条件 $(\nu_1, \nu_2, \cdots, \nu_N) \in \Gamma_k$, 则称 $u(x) \in C^2(\Omega)$ 是 k- 凸函数.

引理 2.1 ([14]) 设 $v(r) \in C^2[0, R)$ 是一个径向对称函数且 $v'(0) = 0$, 则函数 $u(|x|) = v(r) \in C^2(B_R)$, $r = |x| < R$, 且

$$\lambda(D^2u) = \begin{cases} \left(v''(r), \dfrac{v'(r)}{r}, \ldots, \dfrac{v'(r)}{r}\right), & r \in (0, R), \\ (v''(0), v''(0), \ \ldots, v''(0)), & r = 0; \end{cases}$$

$$S_k(\lambda(D^2u)) = \begin{cases} C_{N-1}^{k-1} v''(r) + \left(\dfrac{v'(r)}{r}\right)^{k-1} + C_{N-1}^{k}\left(\dfrac{v'(r)}{r}\right)^{k}, & r \in (0, R), \\ C_N^k (v''(0))^k, & r = 0, \end{cases}$$

其中 $r=|x|=\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{N}x_i^2}$, $B_R:=\{x\in\mathbb{R}^N:|x|<R\}$, $C_N^k=\frac{N!}{k!(N-k)!}$.

通过引理 3.1, 我们可以将 k-Hessian 系统 (1.1) 转化为如下的常微分边值问题

$$\begin{cases}\left\{\dfrac{r^{N-k}}{k}\left[u_1'(r)\right]^k\right\}'=\lambda_1(C_{N-1}^{k-1})^{-1}r^{N-1}f_1(-u_2(r)), & 0<r<1,\\ \left\{\dfrac{r^{N-k}}{k}\left[u_2'(r)\right]^k\right\}'=\lambda_2(C_{N-1}^{k-1})^{-1}r^{N-1}f_2(-u_3(r)), & 0<r<1,\\ \qquad\vdots \\ \left\{\dfrac{r^{N-k}}{k}\left[u_n'(r)\right]^k\right\}'=\lambda_n(C_{N-1}^{k-1})^{-1}r^{N-1}f_n(-u_1(r)), & 0<r<1,\\ u_i'(0)=u_i(0)=0,\ i=1,2,\cdots,n. \end{cases} \tag{2.1}$$

作变换 $v_i=-u_i(i=1,2,\cdots,n)$, 则可将常微分系统 (2.1) 转化为如下的常微分系统

$$\begin{cases}\left\{\dfrac{r^{N-k}}{k}\left[-v_1'(r)\right]^k\right\}'=\lambda_1(C_{N-1}^{k-1})^{-1}r^{N-1}f_1(v_2(r)), & 0<r<1,\\ \left\{\dfrac{r^{N-k}}{k}\left[-v_2'(r)\right]^k\right\}'=\lambda_2(C_{N-1}^{k-1})^{-1}r^{N-1}f_2(v_3(r)), & 0<r<1,\\ \qquad\vdots \\ \left\{\dfrac{r^{N-k}}{k}\left[-v_n'(r)\right]^k\right\}'=\lambda_n(C_{N-1}^{k-1})^{-1}r^{N-1}f_n(v_1(r)), & 0<r<1,\\ v_i'(0)=v_i(0)=0,\ i=1,2,\cdots,n. \end{cases} \tag{2.2}$$

则 $(u_1,u_2)=(-v_1,-v_2)$ 是 k-Hesian系统 (1.1) 的径向解当且仅当 (v_1,v_2) 是积分系统

$$\begin{cases} v_1(r)=\lambda_1^{\frac{1}{k}}\displaystyle\int_t^1\left(\int_0^\tau k\tau^{k-N}s^{N-1}(C_{N-1}^{k-1})^{-1}f_1(v_2(s))ds\right)^{\frac{1}{k}}d\tau,\\ v_2(r)=\lambda_2^{\frac{1}{k}}\displaystyle\int_t^1\left(\int_0^\tau k\tau^{k-N}s^{N-1}(C_{N-1}^{k-1})^{-1}f_2(v_3(s))ds\right)^{\frac{1}{k}}d\tau,\\ \qquad\qquad\vdots \\ v_n(r)=\lambda_n^{\frac{1}{k}}\displaystyle\int_t^1\left(\int_0^\tau k\tau^{k-N}s^{N-1}(C_{N-1}^{k-1})^{-1}f_n(v_1(s))ds\right)^{\frac{1}{k}}d\tau. \end{cases} \tag{2.3}$$

的一个解.

定义函数空间 $E=C[0,1]$, 则按范数 $\|x\|=\max\limits_{0\le t\le 1}|x(t)|$ 构成 Banach 空间. 定义

$$P:=\Big\{x\in E:x(t)\ge 0,t\in[0,1],x(t)\ge\theta\|x\|,t\in[\theta,1-\theta]\Big\}\subset E$$

是 E 上的一个锥, 其中 $\theta\in(0,\frac{1}{2})$. 显然, P 是 E 上的一个正规锥.

对任意的 $v \in P$, 我们定义算子 $T_i : P \to E(i = 1, 2, \cdots, n)$ 为

$$\begin{aligned}
(T_1 v)(t) &= \lambda_1^{\frac{1}{k}} \int_t^1 \left(\int_0^\tau k\tau^{k-N} s^{N-1} (C_{N-1}^{k-1})^{-1} f_1(v(s)) ds \right)^{\frac{1}{k}} d\tau, \\
(T_2 v)(t) &= \lambda_2^{\frac{1}{k}} \int_t^1 \left(\int_0^\tau k\tau^{k-N} s^{N-1} (C_{N-1}^{k-1})^{-1} f_2(v(s)) ds \right)^{\frac{1}{k}} d\tau, \\
&\vdots \\
(T_n v)(t) &= \lambda_n^{\frac{1}{k}} \int_t^1 \left(\int_0^\tau k\tau^{k-N} s^{N-1} (C_{N-1}^{k-1})^{-1} f_n(v(s)) ds \right)^{\frac{1}{k}} d\tau.
\end{aligned} \tag{2.4}$$

定义一个复合算子 $\widetilde{T_1} = T_1 T_2 \cdots T_n$.

引理 2.2 ([6]) 算子 $T_i(i = 1, 2, , n)$ 是非负凸函数, 因此由 Arzelà 定理可知 $T_i : P \to E(i = 1, 2, \cdots, n)$ 是全连续算子. 进一步地, 由 T 的定义可知 T 也是一个全连续算子.

由文献 [5] 可知, 当 $\lambda_1 = \lambda_1 = \cdots = \lambda_n$ 时, $(v_1, v_2, \cdots, v_n) \in \underbrace{C^1[0,1] \times C^1[0,1] \times \cdots \times C^1[0,1]}_{n}$ 是积分系统 (2.3) 的解当且仅当 $(v_1, v_2, \cdots, v_n) \in \underbrace{P \setminus \{0\} \times P \setminus \{0\} \times \cdots \times P \setminus \{0\}}_{n}$ 并且满足 $v_1 = T_1 v_2, v_2 = T_2 v_3, \cdots, v_n = T_n v_1$. 这表明若 $v_1 \in P \setminus \{0\}$ 是 $\widetilde{T_1}$ 的一个不动点, 那么当我们定义 $v_2 = T_2 v_3, \cdots, v_n = T_n v_1$ 时, $(v_1, v_2, \cdots, v_n) \in \underbrace{C^1[0,1] \times C^1[0,1] \times \cdots \times C^1[0,1]}_{n}$ 是积分系统 (2.3) 的一个解. 另一方面, 若 $(v_1, v_2, \cdots, v_n) \in \underbrace{C^1[0,1] \times C^1[0,1] \times \cdots \times C^1[0,1]}_{n}$ 是积分系统 (2.3) 的一个解, 则 v_1 是全连续算子 $\widetilde{T_1}$ 的一个非零不动点.

因此, 要证积分系统 (2.3) 有一个解, 我们只需证全连续算子 $\widetilde{T_1}$ 有一个非零不动点即可.

类似的, 我们可以定义其他的复合算子, 如下:

$$\begin{aligned}
\widetilde{T_2} &= T_2 T_3 \cdots T_n T_1, \\
\widetilde{T_3} &= T_3 \cdots T_n T_1 T_2, \\
&\vdots \\
\widetilde{T_n} &= T_n \cdots T_1 T_2 T_3.
\end{aligned}$$

下面给出本文的主要研究工具.

引理 2.3 ([15]) 令 Ω_1 和 Ω_2 是 Banach 空间 E 上的两个有界开集, 且 $0 \in \Omega$, $\bar{\Omega}_1 \subset \Omega_2$, 令 $P : P \cap (\bar{\Omega}_2 \setminus \Omega_1) \to P$ 是一个全连续算子, 其中 P 是 E 上的一个锥. 若

(i) $\|Tx\| \le \|x\|, \forall x \in P \cap \partial\Omega_1$, 且 $\|Tx\| \ge \|x\|, \forall x \in P \cap \partial\Omega_2$;

或

(ii) $\|Tx\| \ge \|x\|, \forall x \in P \cap \partial\Omega_1$, 且 $\|Tx\| \le \|x\|, \forall x \in P \cap \partial\Omega_2$.

则 T 在 $P \cap (\bar{\Omega}_2 \setminus \Omega_1)$ 中至少有一个不动点.

3. 主要结果

首先, 对 $i=1,2,\cdots,n$, 我们给出如下记号:

$$f_i^0=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^k},\quad f_i^\infty=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^k}.$$

定理 3.1 假设 $f_i\in C([0,+\infty),[0,+\infty))$, 且 $f_i^0=0,\ f_i^\infty=\infty$, 则对 $\lambda_i>0$, k-Hessian 系统 (1.1) 存在一个非线性径向凸解 $u=(u_{\lambda_1},u_{\lambda_2},\cdots,u_{\lambda_n})$ 满足 $\lim\limits_{\lambda_i\to 0^+}\|u_{\lambda_i}\|=\infty$, 其中 $i=1,2,\cdots,n$.

证明: 对$i=1,2,\cdots,n$, 我们只需证明对$\lambda_i>0$,积分系统(2.3)存在一个解$v=(v_{\lambda_1},v_{\lambda_2},\cdots,v_{\lambda_n})$ 满足 $\lim\limits_{\lambda_i\to 0^+}\|v_{\lambda_i}\|=\infty$ 即可. 因为 $f_i^0=0$, 则存在一个常数 $r_1>0$ 使得对任意的 $\varepsilon>0$, 有

$$\begin{aligned}
&f_1(v_2)\le\varepsilon v_2^k,\quad\forall\ 0\le v_2\le r_1,\\
&f_2(v_3)\le\varepsilon v_3^k,\quad\forall\ 0\le v_3\le r_1,\\
&\qquad\vdots\\
&f_n(v_1)\le\varepsilon v_1^k,\quad\forall\ 0\le v_1\le r_1,
\end{aligned}$$

其中 ε 满足

$$(\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n)^{\frac{1}{k}}\varepsilon^{\frac{n}{k}}\le 1. \tag{3.1}$$

因此, 对 $v_i\in P\cap\partial\Omega_{r_1}$, $i=1,2,\cdots,n$, $\Omega_{r_1}=\{x\in R^N:\|x\|\le r_1\}$, 有

$$\begin{aligned}
(T_1v_2)(t)&=\lambda_1^{\frac{1}{k}}\int_t^1\left(\int_0^\tau k\tau^{k-N}s^{N-1}(C_{N-1}^{k-1})^{-1}f_1(v_2(s))ds\right)^{\frac{1}{k}}d\tau\\
&\le\lambda_1^{\frac{1}{k}}\int_0^1\left(\int_0^1 k\tau^{k-N}s^{N-1}(C_{N-1}^{k-1})^{-1}f_1(v_2(s))ds\right)^{\frac{1}{k}}d\tau\\
&\le\lambda_1^{\frac{1}{k}}\int_0^1\left(\int_0^1 k\tau^{k-N}s^{N-1}(C_{N-1}^{k-1})^{-1}\varepsilon v_2^k(s)ds\right)^{\frac{1}{k}}d\tau\\
&\le\lambda_1^{\frac{1}{k}}\varepsilon^{\frac{1}{k}}\left(\frac{k}{C_{N-1}^{k-1}}\right)^{\frac{1}{k}}\|v_2\|\int_0^1\left(\int_0^1\tau^{k-N}s^{N-1}ds\right)^{\frac{1}{k}}d\tau\\
&\le\lambda_1^{\frac{1}{k}}\varepsilon^{\frac{1}{k}}\|v_2\|,\quad t\in[0,1],
\end{aligned}$$

同理可得,

$$\begin{aligned}
(T_2v_3)(t)&=\lambda_2^{\frac{1}{k}}\int_t^1\left(\int_0^\tau k\tau^{k-N}s^{N-1}(C_{N-1}^{k-1})^{-1}f_2(v_3(s))ds\right)^{\frac{1}{k}}d\tau\\
&\le\lambda_2^{\frac{1}{k}}\varepsilon^{\frac{1}{k}}\|v_3\|,\quad t\in[0,1],\\
&\ \ \vdots\\
(T_nv_1)(t)&=\lambda_n^{\frac{1}{k}}\int_t^1\left(\int_0^\tau k\tau^{k-N}s^{N-1}(C_{N-1}^{k-1})^{-1}f_n(v_1(s))ds\right)^{\frac{1}{k}}d\tau\\
&\le\lambda_n^{\frac{1}{k}}\varepsilon^{\frac{1}{k}}\|v_1\|,\quad t\in[0,1].
\end{aligned}$$

故而由 $\widetilde{T_1}$ 的定义和 (3.1) 可知,

$$
\begin{aligned}
\|\widetilde{T_1}v_1\| &= \|T_1T_2\cdots T_nv_1\| \\
&\le \lambda_1^{\frac{1}{k}}\varepsilon^{\frac{1}{k}}\|T_2\cdots T_nv_1\| \\
&\le (\lambda_1\lambda_2)^{\frac{1}{k}}\varepsilon^{\frac{2}{k}}\|T_3\cdots T_nv_1\| \\
&\quad\vdots \\
&\le (\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n)^{\frac{1}{k}}\varepsilon^{\frac{n}{k}}\|v_1\| \\
&\le \|v_1\|, \quad v_1\in P\cap\partial\Omega_{r_1}.
\end{aligned} \tag{3.2}
$$

因为 $f_i^\infty=\infty$, 则存在一个常数 $R_0(0<r_1<R_0)$ 使得对任意的常数 $\eta>0$, 有

$$
\begin{aligned}
&f_1(v_2)\ge \eta v_2^k, \quad \forall v_2\ge R_0, \\
&f_2(v_3)\ge \eta v_3^k, \quad \forall v_3\ge R_0, \\
&\quad\vdots \\
&f_n(v_1)\ge \eta v_1^k, \quad \forall v_1\ge R_0,
\end{aligned}
$$

其中 η 满足

$$
(\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n)^{\frac{1}{k}}\left(\frac{\eta k}{C_{N-1}^{k-1}}\right)^{\frac{n}{k}}(1-\theta)^{\frac{n(k-N)}{k}}\theta^{\frac{n(2k+N-1)}{k}}\ge 1. \tag{3.3}
$$

令 $R_1>\max\{R_0,\frac{R_0}{\theta}\}$, 则对 $v_i\in P\cap\partial\Omega_{R_1}$, $i=1,2,\cdots,n$, $\Omega_{R_1}=\{x\in R^N:\|x\|\le R_1\}$, 有

$$
v_i(t)\ge\theta\|v_i\|=\theta R_1\ge R_0, \quad t\in[\theta,1-\theta].
$$

因此, 对 $v_i\in P\cap\partial\Omega_{R_1}$, 有

$$
\begin{aligned}
(T_1v_2)(t) &= \lambda_1^{\frac{1}{k}}\int_t^1\left(\int_0^\tau k\tau^{k-N}s^{N-1}(C_{N-1}^{k-1})^{-1}f_1(v_2(s))ds\right)^{\frac{1}{k}}d\tau \\
&\ge \lambda_1^{\frac{1}{k}}\int_{1-\theta}^1\left(\int_\theta^{1-\theta} k\tau^{k-N}s^{N-1}(C_{N-1}^{k-1})^{-1}f_1(v_2(s))ds\right)^{\frac{1}{k}}d\tau \\
&\ge \lambda_1^{\frac{1}{k}}\int_{1-\theta}^1\left(\int_\theta^{1-\theta} k\tau^{k-N}s^{N-1}(C_{N-1}^{k-1})^{-1}\eta v_2^k(s)ds\right)^{\frac{1}{k}}d\tau \\
&\ge \lambda_1^{\frac{1}{k}}\int_{1-\theta}^1\left(\int_\theta^{1-\theta} k(1-\theta)^{k-N}\theta^{N-1}(C_{N-1}^{k-1})^{-1}\eta(\theta\|v_2\|)^kds\right)^{\frac{1}{k}}d\tau \\
&= \left(\frac{\lambda_1\eta k}{C_{N-1}^{k-1}}\right)^{\frac{1}{k}}(1-\theta)^{\frac{k-N}{k}}\theta^{\frac{2k+N-1}{k}}\|v_2\|, \quad t\in[0,1],
\end{aligned}
$$

同理可得,

$$
\begin{aligned}
(T_2v_3)(t) &= \lambda_2^{\frac{1}{k}} \int_t^1 \left(\int_0^\tau k\tau^{k-N} s^{N-1} (C_{N-1}^{k-1})^{-1} f_2(v_3(s)) ds \right)^{\frac{1}{k}} d\tau \\
&\geq \left(\frac{\lambda_2 \eta k}{C_{N-1}^{k-1}} \right)^{\frac{1}{k}} (1-\theta)^{\frac{k-N}{k}} \theta^{\frac{2k+N-1}{k}} \|v_3\|, \quad t \in [0,1], \\
&\vdots \\
(T_nv_1)(t) &= \lambda_n^{\frac{1}{k}} \int_t^1 \left(\int_0^\tau k\tau^{k-N} s^{N-1} (C_{N-1}^{k-1})^{-1} f_n(v_1(s)) ds \right)^{\frac{1}{k}} d\tau \\
&\geq \left(\frac{\lambda_n \eta k}{C_{N-1}^{k-1}} \right)^{\frac{1}{k}} (1-\theta)^{\frac{k-N}{k}} \theta^{\frac{2k+N-1}{k}} \|v_1\|, \quad t \in [0,1].
\end{aligned}
$$

故而由 $\widetilde{T_1}$ 的定义和 (3.3) 可知,

$$
\begin{aligned}
\|\widetilde{T_1}v_1\| &= \|T_1T_2\cdots T_nv_1\| \\
&\geq \left(\frac{\lambda_1 \eta k}{C_{N-1}^{k-1}} \right)^{\frac{1}{k}} (1-\theta)^{\frac{k-N}{k}} \theta^{\frac{2k+N-1}{k}} \|T_2\cdots T_nv_1\| \\
&\geq (\lambda_1\lambda_2)^{\frac{1}{k}} \left(\frac{\eta k}{C_{N-1}^{k-1}} \right)^{\frac{2}{k}} (1-\theta)^{\frac{2(k-N)}{k}} \theta^{\frac{2(2k+N-1)}{k}} \|T_3\cdots T_nv_1\| \\
&\vdots \\
&\geq (\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n)^{\frac{1}{k}} \left(\frac{\eta k}{C_{N-1}^{k-1}} \right)^{\frac{n}{k}} (1-\theta)^{\frac{n(k-N)}{k}} \theta^{\frac{n(2k+N-1)}{k}} \|v_1\| \\
&\geq \|v_1\|, \quad v_1 \in P \cap \partial\Omega_{R_1}.
\end{aligned}
\tag{3.4}
$$

结合引理 2.3 可知, 算子 $\widetilde{T_1}$ 有一个不动点 $v_1 \in P \cap (\bar{\Omega}_{R_1} \backslash \Omega_{r_1})$. 定义 $T_2v_3 = v_2, \cdots, T_nv_1 = v_n$, 则 $(v_1, v_2, \cdots, v_n)$ 是 常微分系统 (2.2) 的一个非线性径向凹解.

同理, 我们也可以得出算子 $\widetilde{T_2}$ 有一个不动点 $v_2 \in P \cap (\bar{\Omega}_{R_1} \backslash \Omega_{r_1})$, $\cdots$, 算子 $\widetilde{T_n}$ 有一个不动点 $v_n \in P \cap (\bar{\Omega}_{R_1} \backslash \Omega_{r_1})$.

接下来, 我们证明当 $\lambda_i \to 0^+$ 时, $\|v_{\lambda_i}\| \to +\infty$, $i = 1, 2, \cdots, n$. 假设存在常数 $\beta_i > 0$ 和序列 $\lambda_{im} \to 0^+$ 使得

$$
\|v_{\lambda_{im}}\| \leq \beta_i \ (m = 1, 2, \cdots).
$$

则序列 $\{\|v_{\lambda_{im}}\|\}$ 存在一个收敛于常数 $\alpha_i (0 \leq \alpha_i \leq \beta_i)$ 的子序列, 为简便起见, 我们假设 $\{\|v_{\lambda_{im}}\|\}$ 收敛于 α_i.

(i) 若 $\alpha_i > 0$, 则对于充分大的 $m (m > k)$, 有 $\{\|v_{i\lambda_{im}}\|\} > \frac{\alpha_i}{2}$. 令

$$
\begin{aligned}
F_1 &= \max\{f_1(v_2), \quad r_1 \leq \|v_2\| \leq R_1\}, \\
F_1 &= \max\{f_2(v_3), \quad r_1 \leq \|v_3\| \leq R_1\}, \\
&\vdots \\
F_1 &= \max\{f_n(v_1), \quad r_1 \leq \|v_1\| \leq R_1\}.
\end{aligned}
$$

DOI: 10.12677/aam.2022.117522

由 $T_1v_2 = v_1, T_2v_3 = v_2, \cdots, T_nv_1 = v_1$ 可知

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\lambda_{1m}^{\frac{1}{k}}} &= \frac{\| \int_t^1 \left(\int_0^\tau k\tau^{k-N} s^{N-1} (C_{N-1}^{k-1})^{-1} f_1(v_2(s)) ds \right)^{\frac{1}{k}} d\tau \|}{\|v_{1\lambda_{1m}}\|} \\
&\le \frac{\| \int_0^1 \left(\int_0^1 k\tau^{k-N} s^{N-1} (C_{N-1}^{k-1})^{-1} F_1 ds \right)^{\frac{1}{k}} \|}{\|v_{1\lambda_{1m}}\|} \\
&\le \frac{F_1^{\frac{1}{k}} |\frac{k}{2k-N}|}{\|v_{1\lambda_{1m}}\|} \\
&\le \frac{2kF_1^{\frac{1}{k}}}{|2k-N|\alpha_1}, \\
\frac{1}{\lambda_{2m}^{\frac{1}{k}}} &= \frac{\| \int_t^1 \left(\int_0^\tau k\tau^{k-N} s^{N-1} (C_{N-1}^{k-1})^{-1} f_2(v_3(s)) ds \right)^{\frac{1}{k}} d\tau \|}{\|v_{2\lambda_{2m}}\|} \le \frac{2kF_2^{\frac{1}{k}}}{|2k-N|\alpha_2}, \\
&\vdots \\
\frac{1}{\lambda_{nm}^{\frac{1}{k}}} &= \frac{\| \int_t^1 \left(\int_0^\tau k\tau^{k-N} s^{N-1} (C_{N-1}^{k-1})^{-1} f_n(v_1(s)) ds \right)^{\frac{1}{k}} d\tau \|}{\|v_{n\lambda_{nm}}\|} \le \frac{2kF_n^{\frac{1}{k}}}{|2k-N|\alpha_n}.
\end{aligned} \tag{3.5}$$

(3.5) 表明 $\lambda_{im} \to +\infty (m \to +\infty)$, 这与 $\lambda_{im} \to 0^+$ 矛盾, $i = 1, 2, \cdots, n$.

(ii) 若 $\alpha_i = 0$, 则对于充分大的 $m (m > k)$, 有 $\{\|v_{i\lambda_{im}}\|\} \to 0$. 由 $f_i^0 = 0$ 可知, 对任意的 $\delta > 0$, 存在一个常数 $r_0 > 0$, 使得

$$\begin{aligned}
f_1(v_{2\lambda_{2m}}) &\le \delta v_{2\lambda_{2m}}^k, \quad \forall\, 0 \le v_{2\lambda_{2m}} \le r_0, \\
f_2(v_{3\lambda_{3m}}) &\le \delta v_{3\lambda_{3m}}^k, \quad \forall\, 0 \le v_{3\lambda_{3m}} \le r_0, \\
&\vdots \\
f_n(v_{1\lambda_{1m}}) &\le \delta v_{1\lambda_{1m}}^k, \quad \forall\, 0 \le v_{1\lambda_{1m}} \le r_0.
\end{aligned}$$

因此, 对 $v_{i\lambda_{im}} \in P \cap \partial\Omega_{r_0}$, $\|v_{i\lambda_{im}}\| = r_0$, 有

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\lambda_{1m}^{\frac{1}{k}}} &= \frac{\| \int_t^1 \left(\int_0^\tau k\tau^{k-N} s^{N-1} (C_{N-1}^{k-1})^{-1} f_1(v_2(s)) ds \right)^{\frac{1}{k}} d\tau \|}{\|v_{1\lambda_{1m}}\|} \\
&\le \frac{\| \int_0^1 \left(\int_0^1 k\tau^{k-N} s^{N-1} (C_{N-1}^{k-1})^{-1} \delta v_{2\lambda_{2m}}^k ds \right)^{\frac{1}{k}} \|}{\|v_{1\lambda_{1m}}\|} \\
&\le \frac{k\delta^{\frac{1}{k}} \|v_2\|}{|2k-N| r_0},
\end{aligned}$$

$$\frac{1}{\lambda_{2m}^{\frac{1}{k}}} = \frac{\| \int_t^1 \left(\int_0^\tau k\tau^{k-N} s^{N-1} (C_{N-1}^{k-1})^{-1} f_2(v_3(s)) ds \right)^{\frac{1}{k}} d\tau \|}{\|v_{2\lambda_{2m}}\|} \le \frac{k\delta^{\frac{1}{k}} \|v_3\|}{|2k-N| r_0}, \tag{3.6}$$

$$\vdots$$

$$\frac{1}{\lambda_{nm}^{\frac{1}{k}}} = \frac{\| \int_t^1 \left(\int_0^\tau k\tau^{k-N} s^{N-1} (C_{N-1}^{k-1})^{-1} f_n(v_1(s)) ds \right)^{\frac{1}{k}} d\tau \|}{\|v_{n\lambda_{nm}}\|} \leq \frac{k\delta^{\frac{1}{k}} \|v_1\|}{|2k-N| r_0}.$$

(3.6) 表明 $\lambda_{im} \to +\infty (m \to +\infty)$, 这与 $\lambda_{im} \to 0^+$ 矛盾, $i = 1, 2, \cdots, n$.

综上可知, 当 $\lambda_i \to 0^+$ 时, $\|v_{\lambda_i}\| \to +\infty$, $i = 1, 2, \cdots, n$.

类似于定理 3.1 的证明, 我们有如下定理.

定理 3.2 假设 $f_i \in C([0, +\infty), [0, +\infty))$, 且 $f_i^0 = \infty$, $f_i^\infty = 0$, 则对所有的 $\lambda_i > 0$, k-Hessian 方程 (1.1) 存在一个非线性径向凸解 $u = (u_{\lambda_1}, u_{\lambda_2}, \cdots, u_{\lambda_n})$ 满足 $\lim_{\lambda_i \to 0^+} \|u_{\lambda_i}\| = 0$, 其中 $i = 1, 2, \cdots, n$.

参考文献

[1] Trudinger, N. and Wang, X. (2008) The Monge-Ampère Equations and Its Geometric Applications. *Handbook of Geometric Analysis*, **1**, 467-524.

[2] Shivaji, R., Sim, I. and Son, B. (2017) A Uniqueness Result for a Semipositone p-Laplacian Problem on the Exterior of a Ball. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **445**, 459-475. https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2016.07.029

[3] Zhang, Z. (2015) Boundary Behavior of Large Solutions to the Monge-Ampère Equations with Weight. *Journal of Differential Equations*, **259**, 2080-2100. https://doi.org/10.1016/j.jde.2015.03.040

[4] Zhang, Z. (2018) Large Solutions to the Monge-Ampère Equations with Nonlinear Gradient Terms: Existence and Boundary Behavior. *Journal of Differential Equations*, **264**, 263-296. https://doi.org/10.1016/j.jde.2017.09.010

[5] Zhang, Z. and Qi, Z. (2015) On a Power-Type Coupled of Monge-Ampère Equations. *Topological Methods in Nonlinear Analysis*, **46**, 717-729.

[6] Lazer, A. and McKenna, P. (1996) On Singular Boundary Value Problems for the Monge Ampère Operator. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **197**, 342-362. https://doi.org/10.1006/jmaa.1996.0024

[7] Feng, M. (2021) Convex Solutions of Monge-Ampère Equations and Systems: Existence, Uniqueness and Asymptotic Behavior. *Advances in Nonlinear Analysis*, **10**, 371-399. https://doi.org/10.1515/anona-2020-0139

[8] Feng, M. and Zhang, X. (2021) A Coupled System of k-Hessian Equations. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, **44**, 7377-7394. https://doi.org/10.1002/mma.6053

[9] Gao, C., He, X. and Ran, M. (2021) On a Power-Type Coupled System of k-Hessian Equations. *Quaestiones Mathematicae*, **44**, 1593-1612. https://doi.org/10.2989/16073606.2020.1816586

[10] Zhang, X. and Feng, M. (2019) The Existence and Asymptotic Behavior of Boundary Blow-Up Solutions to the k-Hessian Equation. *Journal of Differential Equations*, **267**, 4626-4672. https://doi.org/10.1016/j.jde.2019.05.004

[11] Wan, H., Shi, Y. and Qiao, X. (2021) Entire Large Solutions to the k-Hessian Equations with Weights: Existence, Uniqueness and Asymptotic Behavior. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **503**, Article ID: 125301. https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2021.125301

[12] Sun, H. and Feng, M. (2018) Boundary Behavior of k-Convex Solutions for Singular k-Hessian Equations. *Nonlinear Analysis*, **176**, 141-156. https://doi.org/10.1016/j.na.2018.06.010

[13] Trudinger, N. (1995) On the Dirichlet Problem for Hessian Equations. *Acta Mathematica*, **175**, 151-164. https://doi.org/10.1007/BF02393303

[14] Ji, X. and Bao, J. (2010) Necessary and Sufficient Condition on Solvability for Hessian Inequalities. *Proceedings of the AMS*, **138**, 175-188. https://doi.org/10.1090/S0002-9939-09-10032-1

[15] Guo, D. and Lakshmikantham, V. (1988) Nonlinear Problems in Abstract Cones. Academic Press, Inc., Cambridge, MA.