Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, 2023, 12(8), 3495-3500
Published Online August 2023 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2023.128347

点稳定子为F_{20}的5度无核2-正则Cayley图

茹　昕*，**赵路清**

云南民族大学数学与计算机科学学院，云南　昆明

收稿日期：2023年7月1日；录用日期：2023年7月23日；发布日期：2023年8月1日

摘　要

在具有较高对称性的图中，正则Cayley图是一类特殊的对称图。称一个图Γ为2-正则图，如果Γ的全自同构群$\mathrm{Aut}\Gamma$作用在2-弧集上正则。本文给出了点稳定子为F_{20}的5度无核2-正则Cayley图的部分分类。

关键词

无核，2-正则，Cayley图

Core-Free Pentavalent 2-Regular Cayley Graphs with Vertex Stabilizer F_{20}

Xin Ru*, **Luqing Zhao**

School of Mathematics and Computer Sciences, Yunnan Minzu University, Kunming Yunnan

Received: Jul. 1st, 2023; accepted: Jul. 23rd, 2023; published: Aug. 1st, 2023

Abstract

Among graphs with higher symmetry, regular Cayley graphs are a special class of symmetric graphs. A graph Γ is called 2-regular if its full automorphism group $\mathrm{Aut}\Gamma$ acts regularly on its 2-arcs. In this paper, it is given that a partial classification of core-free pentavalent 2-regular Cayley graphs with the vertex stabilizer F_{20}.

Keywords

Core-Free, 2-Regular, Cayley Graph

*通讯作者。

文章引用: 茹昕, 赵路清. 点稳定子为 F_{20} 的 5 度无核 2-正则 Cayley 图[J]. 应用数学进展, 2023, 12(8): 3495-3500.
DOI: 10.12677/aam.2023.128347

1. 引言

为方便研究，本文假设所有的图都是有限、简单、连通和无向的。

设 Γ 是一个图，$V\Gamma$、$E\Gamma$、$\mathrm{Arc}\Gamma$ 和 $\mathrm{Aut}\Gamma$ 分别代表图的顶点集、边集、弧集和全自同构群，$\mathrm{val}\Gamma$ 表示图 Γ 的度数。

设 $X \le \mathrm{Aut}\Gamma$，s 是一个正整数。一个图 Γ 被称为是 (X,s)-弧传递的，如果 X 传递作用在 Γ 的 s-弧集上，其中，s-弧是一个由 $s+1$ 个顶点组成的 $(s+1)$-数组，且对于 $\forall i, v_{i-1} \ne v_{i+1}$，满足 $(v_{i-1}, v_i) \in E\Gamma$。称图 Γ 为 s-弧正则图，如果它的全自同构群在其弧集上是正则的。

设 G 是有限群，其单位元素是 1，一个图 Γ 被称为 G 的一个 Cayley 图，如果在 G 中有一个子集 S，满足 $1 \notin S$，且 $S = S^{-1}$，使得

$$V\Gamma = G, E\Gamma = \{(s, sg) \mid g \in G, s \in S\},$$

其中 $S^{-1} = \{s^{-1} \mid s \in S\}$。我们用 $\mathrm{Cay}(G,S)$ 表示 Cayley 图 Γ，Cayley 图 Γ 的度数为 $|S|$，另外，G 可以被看作 $\mathrm{Aut}\Gamma$ 的一个正则子群，其中 G 右乘作用在 $V\Gamma$ 上。为了方便，我们仍然用 G 代表这个正则子群，则 Cayley 图是点传递的；相反，一个点传递图 Γ 是群 G 的一个 Cayley 图，当且仅当 $\mathrm{Aut}\Gamma$ 包含同构于 G 的一个正则子群。一个 Cayley 图 $\mathrm{Cay}(G,S)$ 被称为 G 的一个正规 Cayley 图，如果 G 是 $\mathrm{Aut}(\mathrm{Cay}(G,S))$ 的一个正规子群；称 $\mathrm{Cay}(G,S)$ 是无核的，如果 G 在某些 $X \le \mathrm{Aut}(\mathrm{Cay}(G,S))$ 中是无核的，即 $\mathrm{Core}_X(G) := \bigcap_{x \in X} G^x = 1$。

正则 Cayley 图是一类对称性较高的点传递图，代数图论中对这类图的研究一直是一个热门问题。图论学者最初从 3 度 1-正则图开始研究，R.Frucht 在文献[1]中构造出第一个 3 度 1-正则图的例子；Li 和 Lou 等在文献[2]中证明了如果一个 5 度的 $(X,1)$-正则 Cayley 图不是正规的或双正规的；Ling 和 Lou 在文献[3]中给出了连通无核 5 度 1-传递 Cayley 图的特征和分类；Li 和 Lou 在文献[4]中给出了 7 度无核 1-正则 Cayley 图的一个分类；奇素数度的 1-正则 Cayley 图的完全分类及其相关结论可参见文献[5]；另外，关于 5 度图的更多性质和分类结果可参见文献[6] [7] [8] [9] [10]。

本文主要针对点稳定子为 F_{20} 的 5 度无核 2-正则 Cayley 图进行研究和分类，考虑前 10 种共轭类的情况，得到以下主要结果：

定理 1.1 设 $\Gamma = \mathrm{Cay}(G,S)$ 是无核 5 度 2-正则 Cayley 图，$(\mathrm{Aut}\Gamma)_1$ 是 1 在 $\mathrm{Aut}\Gamma$ 中的稳定子，且同构于 F_{20}，则下列之一成立：

1) Γ 同构于表 1 中的一个图；

2) 存在一个 $\mathrm{Aut}\Gamma$ 的子群 X，使得 $G \le X$，且 G 在 X 中无核。进一步，G 和 X 的描述见表 2。

Table 1. Core-free pentavalent 2-regular Cayley graphs with vertex stabilizer F_{20}
表 1. 点稳定子为 F_{20} 的 5 度无核 2-正则 Cayley 图

$\mathrm{Aut}\Gamma$	G	Γ
$\mathbb{Z}_2^2:\mathrm{S}_5$	$\mathbb{Z}_2^2:\mathrm{S}_3$	引理 3.1
$(\mathrm{A}_5\times\mathrm{A}_5):\mathbb{Z}_4$	$\mathrm{A}_4\times\mathrm{A}_5$	引理 3.1

Table 2. Candidates for core-Free pentavalent 2-regular Cayley graphs with vertex stabilizer F_{20}
表 2. 点稳定子为 F_{20} 的 5 度无核 2-正则 Cayley 图的候选

X	G	Γ	备注
$(\mathrm{A}_{10}\times\mathrm{A}_{10}):\mathbb{Z}_4$	$\mathrm{A}_9:\mathrm{S}_{10}$	引理 3.2	
$\mathbb{Z}_2^{10}:\mathrm{S}_{10}$	$\mathbb{Z}_2^9:\mathrm{S}_9$	引理 3.3	
$\mathrm{A}_{20}:\mathbb{Z}_2$	$\mathrm{A}_{19}:\mathbb{Z}_2$	引理 3.4	至少 2 个图

2. 预备知识

设 X 是有限群，H 是 X 的无核子群，对于一个元素 $g \in X-H$，定义图 $\Gamma=\mathrm{Cos}(X,H,g)$，顶点集 $[X:H]$ 是 H 在 X 中的右陪集，使得 Hx 和 Hy 相邻当且仅当 $yx^{-1}\in HgH$，则 $X \le \mathrm{Aut}\Gamma$ 在它的弧集上传递，其中 X 右乘作用在 $[X:H]$ 上，这样的图叫做陪集图，且 Γ 连通当且仅当 $\langle H,g\rangle = X$，Γ 的度为 $|H:H\cap H^g|$。另外，若有一个正则子群 G，则 $\Gamma \cong \mathrm{Cay}(G,G\cap HgH)$。

对于一个无核 X-弧传递 Cayley 图 $\Gamma=\mathrm{Cay}(G,S)$，其中 $G\le X\le \mathrm{Aut}(\Gamma)$，设 $v\in V\Gamma$，$H=X_v$ 是 v 在 X 中的稳定子群，假设 $|H|=n$，考虑 X 在 $[X:G]$ 上的右乘作用，则 X 是对称群 S_n 的一个子群，在这个作用下，H 是 S_n 的一个正则子群，且 G 是 X 中 $i\in\{1,2,\cdots,n\}$ 的一个稳定子，不失一般性，我们可以假设 G 稳定 1。由(文献[11]，命题 3.2)，我们有以下结论：

引理 2.1 设 $\Gamma=\mathrm{Cay}(G,S)$ 一个无核 X-弧传递 Cayley 图，$G\le X\le \mathrm{Aut}(\Gamma)$，设 $v\in V\Gamma$，$H=X_v$ 是 v 在 X 中的稳定子群，假设 $|H|=n$，则 X 是 S_n 的一个子群，且 H 正则作用在 $\{1,2,\cdots,n\}$ 上。另外，若 S 包含一个对合 τ，则 $\tau\in \mathrm{N}_{S_n}(H\cap H^{\tau}) - \left(\bigcup_{1\ne K\lhd H}\mathrm{N}_{S_n}(K)\right)$，$\Gamma\cong \mathrm{Cos}(X,H,\tau)$，$X=\langle H,\tau\rangle$，$G=\{\sigma\in X \mid 1^{\sigma}=1\}$，$S=\{\sigma\in H\tau H \mid 1^{\sigma}=1\}$。

对于连通 5 度 (X,s)-传递图，由文献[12]和[13]，我们有以下引理：

引理 2.2 设 Γ 是一个 5 度 (X,s)-传递图，$X\le \mathrm{Aut}\Gamma$，且 $s\ge 1$，设 $v\in V\Gamma$，F_{20} 表示 20 阶的 Frobenius 群，则：

1) 如果 X_v 是可解的，则 $|X_v| \mid 80$，且 $s\le 3$，其中，(X_v,s) 在表 3 中；
2) 如果 X_v 是不可解的，则 $|X_v| \mid 2^9\cdot 3^2\cdot 5$，且 $2\le s\le 5$，其中，(X_v,s) 在表 4 中。

Table 3. The soluble vertex stabilizer
表 3. 可解的点稳定子

s	1	2	3
X_v	$\mathbb{Z}_5, \mathrm{D}_{10}, \mathrm{D}_{20}$	$\mathrm{F}_{20}, \mathrm{F}_{20}\times\mathbb{Z}_2$	$\mathrm{F}_{20}\times\mathbb{Z}_4$

Table 4. The insoluble vertex stabilizer
表 4. 不可解的点稳定子

s	2	3	4	4
X_v	$\mathrm{A}_5, \mathrm{S}_5$	$\mathrm{A}_4\times\mathrm{A}_5$，$(\mathrm{A}_4\times\mathrm{A}_5):\mathbb{Z}_2$，$\mathrm{S}_4\times\mathrm{S}_5$	$\mathrm{ASL}(2,4)$，$\mathrm{AGL}(2,4)$，$\mathrm{A\Sigma L}(2,4)$，$\mathrm{A\Gamma L}(2,4)$	$\mathbb{Z}_2^6:\Gamma\mathrm{L}(2,4)$
$\lvert X_v\rvert$	60，120	720, 1440, 2880	960, 1920, 2880, 5760	23040

3. 主要结论

设 $\Gamma=\mathrm{Cay}(G,S)$ 是无核 5 度 2-正则 Cayley 图，则 S 中一定包含一个对合 τ，由引理 2.1 可知，H 是 S_n 的一个正则子群。我们可以假设 $H=\langle a,b\rangle\cong \mathrm{F}_{20}$，其中 $a=(1\ 13\ 7\ 20)(2\ 15\ 6\ 18)(3\ 12\ 10\ 16)(4\ 14\ 9\ 19)(5\ 11\ 8\ 17)$，$b=(1\ 15\ 8\ 19)(2\ 12\ 7\ 17)(3\ 14\ 6\ 20)(4\ 11\ 10\ 18)(5\ 13\ 9\ 16)$。假设 $P=\langle a\rangle$，则 $\mathrm{Cay}(G,S)\cong \mathrm{Cos}(X,H,\tau)$，其中 $\tau\in \mathrm{N}_{S_{20}}(P)-\left(\bigcup_{1\ne K\lhd H}\mathrm{N}_{S_{20}}(K)\right)$，$X=\langle H,\tau\rangle\le S_{20}$，$G=\{\sigma\in X\mid 1^{\sigma}=1\}$，$S=\{\sigma\in H\tau H\mid 1^{\sigma}=1\}$。由 Magma (文献[14])易计算出 τ 有 846 种选择，它们在 $\mathrm{N}_{S_{20}}(H)$ 中被分为 159 种共轭类。本文仅考虑前 10 种共轭类，它们的代表元如下：

$\tau_1=(4\ 5)(8\ 9)(11\ 14)(17\ 19)$,

$\tau_2=(11\ 17)(12\ 16)(13\ 20)(14\ 19)(15\ 18)$,

$\tau_3=(4\ 5)(8\ 9)(11\ 19)(12\ 16)(13\ 20)(14\ 17)(15\ 18)$,

$\tau_4=(2\ 6)(3\ 10)(4\ 9)(5\ 8)(11\ 17)(12\ 16)(14\ 19)(15\ 18)$,

$\tau_5=(2\ 3)(4\ 5)(6\ 10)(8\ 9)(11\ 14)(12\ 15)(16\ 18)(17\ 19)$,

$\tau_6=(2\ 6)(3\ 10)(4\ 9)(5\ 8)(13\ 20)$,

$\tau_7=(2\ 6)(3\ 10)(4\ 8)(5\ 9)(11\ 19)(12\ 16)(14\ 17)(15\ 18)$,

$\tau_8=(2\ 15)(3\ 12)(4\ 14)(5\ 11)(6\ 18)(8\ 17)(9\ 19)(10\ 16)(13\ 20)$,

$\tau_9=(2\ 15)(3\ 12)(4\ 11)(5\ 14)(6\ 18)(8\ 19)(9\ 17)(10\ 16)(13\ 20)$,

$\tau_{10}=(2\ 18)(3\ 16)(4\ 17)(5\ 19)(6\ 15)(8\ 14)(9\ 11)(10\ 12)(13\ 20)$.

现在设 $\Omega=\{1,2,\cdots,20\}$，$X_j=\langle H,\tau_j\rangle$，$\Gamma_j=\mathrm{Cos}(X_j,H,\tau_j)$，其中 $j=1,2,\cdots,10$。设 $G_j=\{\sigma\in X_j \mid 1^\sigma=1\}$，$S_j=\{\sigma\in H\tau_jH \mid 1^\sigma=1\}$。注意到，$H$ 是 X_j 的一个正则子群，G_j 是 X_j 作用在 Ω 上的 1 的点稳定子。由此，$X_j=G_jH$，且 $G_j\cap H=1$，则 G_j 正则作用在 $[X_j:H]$ 上，进而得 $\Gamma_j=\mathrm{Cay}(G_j,S_j)$。本文主要结论如下：

引理 3.1 对于 $j=1,2,\cdots,6$，如果 Γ_j 是 2-正则图，则：

1) $j=3$，$G_3\cong\mathbb{Z}_2^2:\mathrm{S}_3$，$\mathrm{Aut}\Gamma_3\cong\mathbb{Z}_2^2:\mathrm{S}_5$，$S_3=\{\tau_3,a_3,b_3,b_3^{-1},c_3\}$，且 $\Gamma_3\cong\mathrm{Cay}(G_3,S_3)$；

2) $j=5$，$G_5\cong\mathrm{A}_4\times\mathrm{A}_5$，$\mathrm{Aut}\Gamma_5\cong(\mathrm{A}_5\times\mathrm{A}_5):\mathbb{Z}_4$，$S_5=\{\tau_5,a_5,a_5^{-1},b_5,b_5^{-1}\}$，且 $\Gamma_5\cong\mathrm{Cay}(G_5,S_5)$；

其中 $a_3=(3\ 4)(7\ 8)(11\ 20)(12\ 19)(13\ 16)(14\ 17)(15\ 18)$，

$b_3=(2\ 5\ 4\ 3)(6\ 9\ 8\ 7)(11\ 18\ 13\ 20)(12\ 19\ 15\ 16)(14\ 17)$，

$c_3=(2\ 3)(6\ 7)(11\ 18)(12\ 20)(13\ 16)(14\ 17)(15\ 19)$，

$a_5=(2\ 5\ 4)(6\ 10\ 8)(11\ 13\ 14\ 15\ 12)(16\ 17\ 19\ 18\ 20)$，

$b_5=(2\ 5\ 3)(6\ 9\ 8)(11\ 12\ 13\ 15\ 14)(16\ 18\ 19\ 20\ 17)$。

证明：首先，我们可由 Magma (文献[14])分别计算出 $\mathrm{Aut}\Gamma_j$ 和 G_j 的阶以及 S_j 中的元素。

对于一个顶点 $v\in V\Gamma_j$，由 Magma (文献[14])计算得，$|(\mathrm{Aut}\Gamma_1)_v|=|(\mathrm{Aut}\Gamma_6)_v|=40$，$|(\mathrm{Aut}\Gamma_2)_v|=2880$，$|(\mathrm{Aut}\Gamma_4)_v|=120$，则由引理 2.2，这些图都不是 2-正则图。

当 $j=3$ 时，由 Magma (文献[14])计算可得，G_3 有一个 4 阶的正规子群是初等交换群 $\mathbb{Z}_2^2$，且它的补与 S_3 同构；$\mathrm{Aut}\Gamma_3$ 存在一个正规子群是初等交换群 $\mathbb{Z}_2^2$，它的补是一个 120 阶的非交换群，易验证其与 S_3 同构。所以，我们得 $G_3\cong\mathbb{Z}_2^2:\mathrm{S}_3$，$\mathrm{Aut}\Gamma_3\cong\mathbb{Z}_2^2:\mathrm{S}_5$。

当 $j=5$ 时，由 Magma (文献[14])易得，G_5 的阶为 720，它有 6 个正规子群，其中阶为 12 的正规子群和阶为 60 的正规子群的交为 1，且这两个正规子群分别同构于 A_4 和 A_5，从而得 $G_5\cong\mathrm{A}_4\times\mathrm{A}_5$。另外，$\mathrm{Aut}\Gamma_5$ 有一个阶为 3600 的正规子群，它显然同构于 $\mathrm{A}_5\times\mathrm{A}_5$，且它的补是阶为 4 的交换群，与 $\mathbb{Z}_4$ 同构，因此 $\mathrm{Aut}\Gamma_5\cong(\mathrm{A}_5\times\mathrm{A}_5):\mathbb{Z}_4$，引理得证。

引理 3.2 $G_7\cong\mathrm{A}_9:\mathrm{S}_{10}$，$X_7\cong(\mathrm{A}_{10}\times\mathrm{A}_{10}):\mathbb{Z}_4$，且 $S_7=\{\tau_7,a_7,b_7,b_7^{-1},c_7\}$，其中

$a_7=(3\ 4)(5\ 6)(7\ 8)(12\ 19)(13\ 15)(16\ 18)$，$b_7=(2\ 5\ 4\ 3\ 8\ 7\ 6\ 9)(11\ 12)(13\ 15\ 16\ 18\ 17\ 14)(19\ 20)$，

$c_7=(2\ 3)(4\ 10)(6\ 7)(11\ 18)(12\ 14)(17\ 20)$。

证明：假设 $j=7$，由 Magma (文献[14])可以直接计算出 Cayley 子集 S_7 中的元素，且 G_7 有一个同构于 A_9 的正规子群，它在 G_7 中的补同构于 S_{10}，进而我们得 $G_7\cong\mathrm{A}_9:\mathrm{S}_{10}$。

另外，由于 $X_7=\langle a,b,\tau_7\rangle$，我们由 Magma (文献[14])可以计算出 X_7 的正规子群有 4 个，其中一个正规子群的阶为 3292047360000，易验证它是 A_{10} 和 A_{10} 的直积，进一步地，我们得到它的补与 $\mathbb{Z}_4$ 同构，最终我们有 $X_7\cong(\mathrm{A}_{10}\times\mathrm{A}_{10}):\mathbb{Z}_4$，引理得证。

引理 3.3 $G_8\cong\mathbb{Z}_2^9:\mathrm{S}_9$，$X_8\cong\mathbb{Z}_2^{10}:\mathrm{S}_{10}$，且 $S_8=\{\tau_8,a_8,b_8,c_8,d_8\}$，其中

$a_8=(5\ 19)(6\ 12)(11\ 20)(13\ 18)(14\ 17)(15\ 16)$，$b_8=(3\ 17)(9\ 15)(11\ 16)(12\ 20)(13\ 19)(14\ 18)$，

$c_8=(2\ 16)(8\ 14)(11\ 19)(12\ 18)(13\ 17)(15\ 20)$，$d_8=(4\ 18)(10\ 11)(12\ 17)(13\ 16)(14\ 20)(15\ 19)$。

证明：假设 $j=8$，由 Magma (文献[14])，我们可以直接计算出 Cayley 子集 S_8 中的元素，且 G_8 有一个阶为 512 的正规子群是初等交换群，即 $\mathbb{Z}_2^9$，它在 G_8 中的补的阶为 362880，易验证其与 S_9 同构，从而得 $G_8\cong\mathbb{Z}_2^9:\mathrm{S}_9$。

进一步地，因 $X_8=\langle a,b,\tau_8\rangle$，我们可得 X_8 有 9 个正规子群，由 Magma (文献[14])验证其中一个阶为 1024 的正规子群是初等交换群 $\mathbb{Z}_2^{10}$，它的补同构于 S_{10}，从而得 $X_8\cong\mathbb{Z}_2^{10}:\mathrm{S}_{10}$，引理得证。

引理 3.4 $G_9\cong G_{10}\cong\mathrm{A}_{19}:\mathbb{Z}_2$，$X_9\cong X_{10}\cong\mathrm{A}_{20}:\mathbb{Z}_2$，且 $S_9=\{\tau_9,a_9,b_9,b_9^{-1},c_9\}$，$S_{10}=\{\tau_{10},a_{10},b_{10},b_{10}^{-1},c_{10}\}$，其中 $a_9=(3\ 4)(5\ 19)(6\ 12)(7\ 8)(11\ 20)(13\ 16)(14\ 17)(15\ 18)$，

$b_9=(2\ 5\ 4\ 3\ 16\ 12\ 19\ 15\ 8\ 7\ 6\ 9\ 14\ 17)(11\ 18\ 13\ 20)$，

$c_9=(2\ 3)(4\ 18)(6\ 7)(10\ 11)(12\ 20)(13\ 16)(14\ 17)(15\ 19)$，

$a_{10}=(3\ 4)(5\ 12)(6\ 19)(7\ 8)(11\ 20)(13\ 16)(14\ 17)(15\ 18)$，

$b_{10}=(2\ 5\ 4\ 3\ 14\ 17\ 8\ 7\ 6\ 9\ 16\ 12\ 19\ 15)(11\ 18\ 13\ 20)$，

$c_{10}=(2\ 3)(4\ 11)(6\ 7)(10\ 18)(12\ 20)(13\ 16)(14\ 17)(15\ 19)$。

证明：首先，我们可以由 Magma (文献[14])直接计算出 Cayley 子集 S_9 和 S_{10} 中的元素。

假设 $j=9$，由 Magma (文献[14])，我们可以得到 G_9 的 3 个正规子群，易验证 G_9 的非单位真正规子群是单群，且与 A_{19} 同构，它在 G_9 中的补同构于 $\mathbb{Z}_2$，因此 $G_9\cong\mathrm{A}_{19}:\mathbb{Z}_2$。

另外，因 $X_9=\langle a,b,\tau_9\rangle$，我们可由 Magma (文献[14])计算出 X_9 的阶和正规子群，从而得到 X_9 的非单位真正规子群同构于 A_{20}，它的补与 $\mathbb{Z}_2$ 同构，因此 $X_9\cong\mathrm{A}_{20}:\mathbb{Z}_2$。

进一步，由 Magma (文献[14])，我们有 $G_9\cong G_{10}$，且 $X_9\cong X_{10}$，引理得证。

对于点稳定子为 F_{20} 的无核 5 度 2-正则 Cayley 图 Γ，其 Cayley 子集 S 中包含的对合 τ 在 $\mathrm{N}_{S_{20}}(H)$ 中共有 159 种共轭类，本文在定理 1.1 中仅描述前 10 种共轭类的情况。综合引理 3.1、引理 3.2、引理 3.3 和引理 3.4 的证明，定理 1.1 得证。

参考文献

[1] Frucht, R. (1952) A One-Regular Graph of Degree Three. *Canadian Journal of Mathematics*, **4**, 240-247. https://doi.org/10.4153/CJM-1952-022-9

[2] Li, J.J., Lou, B.G. and Zhang, X.J. (2013) Finite 1-Regular Cayley Graphs of Valency 5. *International Journal of Combinatorics*, **2013**, Article ID: 125916. https://doi.org/10.1155/2013/125916

[3] Ling, B., Lou, B.G. and Li, J.J. (2016) On Pentavalent 1-Transitive Cayley Graphs. *Discrete Mathematics*, **3399**, 1335-1343. https://doi.org/10.1016/j.disc.2015.11.018

[4] Li, J.J., Zhang, G.R. and Ling, B. (2013) 1-Regular Cayley Graphs of Valency 7. *Bulletin of the Australian Mathematical Society*, **88**, 479-485. https://doi.org/10.1017/S0004972713000087

[5] 李靖建，朱文英，解雅婷. 奇素数度的 1-正则 Cayley 图[J]. 广西师范大学学报(自然科学版), 2019, 37(2): 121-125.

[6] Guo, S.T., Feng, Y.Q. and Li, C.H. (2013) The Finite Edge-Primitive Pentavalent Graphs. *Journal of Algebraic Combinatorics*, **38**, 491-497. https://doi.org/10.1007/s10801-012-0412-y

[7] Hua, X.H., Feng, Y.Q. and Lee, J. (2011) Pentavalent Symmetric Graphs of Order 2pq. *Discrete Mathematics*, **311**,

2259-2267. https://doi.org/10.1016/j.disc.2011.07.007

[8] Li, Y.T. and Feng, Y.Q. (2010) Pentavalent One-Regular Graphs of Square-Free Order. *Algebra Colloquium*, **17**, 515-524. https://doi.org/10.1142/S1005386710000490

[9] Pan, J.M., Lou, B.G. and Liu, C.F. (2013) Arc-Transitive Pentavalent Graphs of Order 4pq. *The Electronic Journal of Combinatorics*, **20**, P36. https://doi.org/10.37236/2373

[10] Guo, S.T., Zhou, J.X. and Feng, Y.Q. (2011) Pentavalent Symmetric Graphs of Order 12p. *The Electronic Journal of Combinatorics*, **18**, P233. https://doi.org/10.37236/720

[11] Li, J.J. and Lu, Z.P. (2009) Cubic *s*-Arc-Transitive Cayley Graphs. *Discrete Mathematics*, **309**, 6014-6025. https://doi.org/10.1016/j.disc.2009.05.002

[12] Zhou, J.X. and Feng, Y.Q. (2010) On Symmetric Graphs of Valency Five. *Discrete Mathematics*, **310**, 1725-1732. https://doi.org/10.1016/j.disc.2009.11.019

[13] Guo, S.T. and Feng, Y.Q. (2012) A Note on Pentavalent *s*-Transitive Graphs. *Discrete Mathematics*, **312**, 2214 -2216. https://doi.org/10.1016/j.disc.2012.04.015

[14] Bosma, W., Cannon, C. and Playoust, C. (1997) The MAGMA Algebra System I: The User Language. *Journal of Symbolic Computation*, **24**, 235-265. https://doi.org/10.1006/jsco.1996.0125