

随机退化系统中最佳生产和维修策略的联合研究

周筱雯, 张 斌, 杨风萍

南京信息工程大学数学与统计学院, 江苏 南京

收稿日期: 2022年12月15日; 录用日期: 2023年1月8日; 发布日期: 2023年1月17日

摘 要

在市场需求率不变的情况下, 研究了随机退化系统中生产和维修计划的决策问题。系统的随机退化服从伽马过程, 退化将导致次品率增加和系统状态异常。根据生产过程中系统是否发生故障, 分别采用预防性维修和纠正性维修两种不同的方案。在综合考虑次品报废成本、库存成本、维修成本、缺货损失、检验成本等基础上, 建立了以批量和生产率为决策变量的平均利润模型。数值分析验证了模型的有效性, 灵敏度分析讨论了模型参数对最佳决策方案的影响。

关键词

随机退化, 生产计划, 利润模型

Joint Optimization of Optimal Production and Maintenance Strategies for a Stochastic Degradation System

Xiaowen Zhou, Bin Zhang, Fengping Yang

School of Mathematics and Statistics, Nanjing University of Information Science & Technology, Nanjing Jiangsu

Received: Dec. 15th, 2022; accepted: Jan. 8th, 2023; published: Jan. 17th, 2023

Abstract

The decision problem of production and maintenance planning in a stochastic degradation system is studied with a constant market demand rate. The random degradation of the system obeys gamma process, which will lead to the increase of defective rate and abnormal state of the system.

文章引用: 周筱雯, 张斌, 杨风萍. 随机退化系统中最佳生产和维修策略的联合研究[J]. 应用数学进展, 2023, 12(1): 62-72. DOI: 10.12677/aam.2023.121009

According to whether the system breaks down in the production process, preventive maintenance and corrective maintenance are adopted. Based on the comprehensive consideration of defective scrap cost, inventory cost, maintenance cost, out-of-stock loss and inspection cost, an average profit model with batch quantity and productivity as decision variables is proposed. Numerical analysis verifies the validity of the model. Sensitivity analysis discusses the influence of model parameters on the best decision option.

Keywords

Stochastic Degradation, Production Planning, Profit Model

Copyright © 2023 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

生产系统在运行过程中, 由于受到内外部环境因素的影响, 会出现退化现象, 从而对生产有效性造成不利影响。为了提高生产系统的运行效益, 必须对生产和维修进行合理规划。生产和维修规划是制造过程中非常重要的管理流程, 将它们联合处理可以降低运行成本, 提高收益。Jafari 等(2015) [1]研究了经济生产批量和预防性维修的联合优化问题。Guo 等(2022) [2]在考虑缺货损失的情况下, 研究了生产批量和非周期预防性维修联合优化问题。Hosseini 等(2020) [3]在综合各类成本基础上, 提出生产批量和维修周期优化方案, 使长期运行单位时间平均成本最小。Bouslah 等(2018) [4]针对多部件串联系统, 提出一种集生产、质量和维修计划联合控制的经济模型。Peng 等[5]利用更新理论计算退化系统的长期平均成本, 提出基于状态的维修方案, 并确定最佳的生产批量。Cheng 等(2018) [6]建立了基于状态维修和经济生产批量联合优化模型, 通过确定生产批量、库存和维修阈值, 使单位时间总成本最小。Zheng 等(2021) [7]针对生产系统的退化, 以成本最小为目标, 提出基于状态维修的经济生产批量模型。Khatab 等(2019) [8]提出了一种生产质量与基于状态维修相结合的优化模型, 以确定最优的检查周期和退化阈值水平。以上研究大都仅考虑了生产批量的优化问题, 而生产计划的制定, 除了批量还要考虑生产进度或生产率, 以尽可能少的成本达到期望的生产效果。Bouslah 等(2013) [9]以批量和生产率为决策变量, 建立了相关成本最小化问题的随机动态规划模型。制定生产计划是一项复杂的任务, 包括多个与生产阶段相关的决策问题, 如产能与需求相匹配、批量大小、维修方案, 同时考虑较低的成本或较大的利润等。本文以批产品生产及系统维修为研究对象, 在分析系统随机退化过程对产品质量和运行状态影响的基础上, 考虑预防性维修和纠正性维修两种维修方案, 通过确定最佳的批量和生产率, 使生产系统在单位时间内平均收益最大。

2. 问题描述及模型假设

2.1. 问题描述

考虑产品的生产加工过程, 由于受磨损、劣化、应力等诸多因素影响, 生产系统会出现退化现象, 退化量是随机变量且与系统运行时间有关。当累积退化量达到阈值时, 系统发生故障。系统退化会影响加工的产品质量, 退化程度越高, 产品的不合格品率越大。生产企业对加工的产品进行全检, 将合格品以固定价格在市场上销售, 不合格品作报废处理。以批量产品的生产为研究对象, 在生产过程中, 根据

退化量是否达到阈值, 系统的运行可能会出现两种情形: 1) 退化量小于阈值, 系统没有发生故障; 2) 退化量达到阈值, 系统发生故障。考虑两种维修方案, 如果系统没有发生故障, 则在生产加工结束时, 进行预防性维修, 以修复系统已有的退化, 否则进行纠正性维修。为了实现生产效益最大化, 需要在综合考虑各类成本的基础上, 制定最佳的批量和生产率决策方案。

2.2. 模型假设

- 1) 产品以批为单位组织生产, 固定的生产成本忽略不计;
- 2) 产品的市场需求率为固定常数。生产过程中, 只有合格品销往市场且不允许缺货, 次品作报废处理;
- 3) 系统退化是单调递增的随机过程, 且服从伽马过程。随着系统的退化, 次品率会增加[6];
- 4) 系统只有在加工运行时才可能退化, 停机维修时不发生退化。当退化达到临界阈值时, 系统故障并停止运行;
- 5) 预防性维修成本与退化量有关, 纠正性维修成本为固定常数。两类维修均可使系统恢复到初始状态, 即修旧如新;
- 6) 预防性维修和纠正性维修的时长均为随机变量, 且服从威布尔分布[4]。

3. 模型构建

生产运行过程中, 系统在 t 时的累积退化量 $X(t)$ 为随机变量, 且服从伽马分布, 其概率密度为: $X(t) \sim f_{X(t)}(x; \alpha t, \beta) = \beta^{\alpha t} x^{\alpha t - 1} e^{-\beta x} / \Gamma(\alpha t), x \geq 0$ 。系统退化对加工的产品质量产生不利影响, 在 t 时的次品率 $P(X(t))$ 是退化量 $X(t)$ 的指数函数[10], 其表达式为: $P(X(t)) = P_0 + \eta [1 - e^{-\lambda X(t)}]$, 其中 P_0 是零退化时的次品率, η, λ 为非负常数。基于生产经济性考虑, 同时也有利于合理组织生产和维修资源, 提高过程管理的有效性。在生产加工前, 生产部门需要确定生产批量 Q 和生产率 P , 以实现生产效益最大化。

根据生产过程中系统的运行状态, 分两种情形分别计算涉及各类成本损失。

3.1. 情形 1: 系统没有发生故障

在批量产品加工完成时, 由于系统没有发生故障, 故批量产品能够被全部生产, 生产加工的计划时长为 $\Delta = Q/P$, 系统的累积退化量 $X(\Delta) < L$ 。此时, 对系统进行预防性维修, 修复已有的退化。将系统从开始生产到销售或维修结束记作一个生产周期, 则一个生产周期内涉及各类成本包括: 次品报废成本 $C_{Re}^{(1)}$ 、库存成本 $C_I^{(1)}$ 、预防性维修成本 $C_{PM}^{(1)}$ 、缺货损失 $C_L^{(1)}$ 和产品检验成本 $C_S^{(1)}$ 。故, 总成本为:

$$C_T^{(1)} = C_{Re}^{(1)} + C_I^{(1)} + C_{PM}^{(1)} + C_L^{(1)} + C_S^{(1)}. \quad (1)$$

1) 次品报废成本

在一个生产周期内, 生产的次品总数由生产率 P 及次品率 $P(X(t))$ 决定, 且为随机变量, 其表达式为: $\int_0^\Delta [P \cdot P(X(t))] dt$ 。故, 次品报废成本可表示为: $C_{Re}^{(1)} = c_{re} \cdot P \cdot \int_0^\Delta P(X(t)) dt$, 其中 c_{re} 为单位次品报废成本, $\int_0^\Delta P(X(t)) dt = (P_0 + \eta)\Delta - \eta \int_0^\Delta e^{-\lambda X(t)} dt$ 。

由于对 $\forall t \in (0, \Delta]$, 都有 $X(t) < L$ 。在 $X(\Delta) < L$ 的条件下, 记

$$g_1(t) \triangleq E(e^{-\lambda X(t)}) = \int_0^L e^{-\lambda x} dP(X(t) < x | X(\Delta) < L) = \frac{1}{P(X(\Delta) < L)} \int_0^L e^{-\lambda x} dP(X(t) < x, X(\Delta) < L).$$

其中 $P(X(t) \leq x, X(\Delta) < L) = \int_0^x P(X(\Delta) - X(t) < L - u) f_{X(t)}(u) du$

由伽马过程的独立增量性, 得 $X(\Delta) - X(t) \sim \Gamma(x; \alpha(\Delta - t), \beta)$, 从而

$$\int_0^x P(X(\Delta) - X(t) < L - u) f_{X(t)}(u) du = \int_0^x \left[1 - \frac{\Gamma(\alpha(\Delta - t), \beta(L - u))}{\Gamma(\alpha(\Delta - t))} \right] \frac{\beta^{\alpha t} u^{\alpha t - 1}}{\Gamma(\alpha t)} e^{-\beta u} du. \quad (2)$$

其中 $\Gamma(\cdot, \cdot)$ 为上不完全 Γ 函数。

对式(2)两边同时求微分, 得: $dP(X(t) < x, X(\Delta) < L) = \left[1 - \frac{\Gamma(\alpha(\Delta - t), \beta(L - x))}{\Gamma(\alpha(\Delta - t))} \right] \frac{\beta^{\alpha t} x^{\alpha t - 1}}{\Gamma(\alpha t)} e^{-\beta x} dx$,

又, $P(X(\Delta) < L) = 1 - \Gamma(\alpha\Delta, L\beta) / \Gamma(\alpha\Delta)$ 。带入 $g_1(t)$ 右边表达式中, 得:

$$g_1(t) = \frac{1}{1 - \frac{\Gamma(\alpha\Delta, L\beta)}{\Gamma(\alpha\Delta)}} \int_0^L \left[1 - \frac{\Gamma(\alpha(\Delta - t), \beta(L - x))}{\Gamma(\alpha(\Delta - t))} \right] \frac{\beta^{\alpha t} x^{\alpha t - 1}}{\Gamma(\alpha t)} e^{-(\lambda + \beta)x} dx. \quad (3)$$

故, 次品报废的平均成本为:

$$C_{Re}^{(1)} = E(C_{Re}^1) = c_{re} \cdot P \cdot \left[(P_0 + \eta)\Delta - \eta \int_0^\Delta g_1(t) dt \right] = c_{re} \cdot N_{def}^{(1)}. \quad (4)$$

其中 $N_{def}^{(1)} = P \cdot \left[(P_0 + \eta)\Delta - \eta \int_0^\Delta g_1(t) dt \right]$ 为情形 1 下生产的平均次品总数。

2) 库存成本

在生产过程中, 为了满足市场需求, 将合格品以市场需求率 D 发往市场, 多余的产品将积压库存, 从而产生库存成本。由于次品直接作报废处理, 故本文不考虑次品的库存问题。另外, 在生产加工结束后的系统维修期间, 产品仍以速率 D 发往市场, 由于清空库存需要时间, 故还需要考虑生产加工结束后的库存成本。因此, 将库存成本分为生产过程中库存成本和生产结束后库存成本两部分。

在生产过程中, $t(t \in (0, \Delta))$ 时的合格品产出率为 $P[1 - P(X(t))]$ 。因此, 在 t 时的库存速率为 $P[1 - P(X(t))] - D$ 。故, 生产过程中的库存成本可表示为:

$$\begin{aligned} C_I^1(I) &= c_h \int_0^\Delta (\Delta - t) \{ P[1 - P(X(t))] - D \} dt \\ &= c_h \left[\frac{\Delta^2}{2} (P(1 - P_0 - \eta) - D) + P\eta \int_0^\Delta (\Delta - t) e^{-\lambda X(t)} dt \right]. \end{aligned} \quad (5)$$

其中 c_h 为单位时间库存成本, $C_I^1(I)$ 为随机变量。

对式(5)两边同时求期望, 得出生产过程中的平均库存成本为:

$$C_I^{(1)}(I) = E(C_I^1(I)) = c_h \left[\frac{\Delta^2}{2} (P(1 - P_0 - \eta) - D) + P\eta \int_0^\Delta (\Delta - t) g_1(t) dt \right]. \quad (6)$$

在生产过程结束时, 产品的库存数等于合格品总数减去已销售产品数。此时的库存数达到最大, 其最大平均库存数为: $I_{E(1)} = (P - D)\Delta - N_{def}^{(1)}$, 销售清空最大库存的平均时长为: $I_{E(1)} / D$ 。因此, 在生产过程结束后, 销售清空最大库存的平均库存成本为:

$$C_I^{(1)}(II) = c_h \int_0^{\frac{I_{E(1)}}{D}} (I_{E(1)} - Dt) dt = \frac{c_h}{2D} I_{E(1)}^2. \quad (7)$$

故, 平均总库存成本为: $C_I^{(1)} = C_I^{(1)}(I) + C_I^{(1)}(II)$ 。

3) 预防性维修成本

预防性维修是在批量产品生产加工结束时进行, 维修成本与系统的退化量 $X(\Delta)$ 有关。由于退化程

度越高,将会给修复退化造成更大的难度。因此,本文假设预防性维修成本是退化量 $X(\Delta)$ 的线性函数,即 $C_{PM} = C_0 + aX(\Delta)$, 其中 C_0 和 a 为非负常数。在 $X(\Delta) < L$ 的条件下, 由于

$$E(X(\Delta)) = \int_0^L xf_{X(\Delta)|X(\Delta)<L}(x; \alpha\Delta, \beta) dx = \frac{1}{\beta} \frac{\Gamma(\alpha\Delta+1) - \Gamma(\alpha\Delta+1, L\beta)}{\Gamma(\alpha\Delta) - \Gamma(\alpha\Delta, L\beta)} \triangleq g_2(\Delta), \text{ 所以, 预防性维修的平均}$$

成本为:

$$C_{PM}^{(1)} = E(C_{PM}) = C_0 + ag_2(\Delta) \quad (8)$$

4) 缺货损失

在生产结束时停机进行预防性维修, 停机的时间取决于预防性维修的时间 τ_{PM} 。另外, 库存产品被销售清空的平均时间为 $I_{E(1)}/D$ 。分两种情况: a) 如果 $\tau_{PM} < I_{E(1)}/D$, 在库存产品被销售清空前, 已完成预防性维修, 缺货的产品数为 0; b) 如果 $\tau_{PM} \geq I_{E(1)}/D$, 在库存产品被销售清空后, 预防性维修还将延续时长 $\tau_{PM} - I_{E(1)}/D$, 故缺货的产品总数为 $(\tau_{PM} - I_{E(1)}/D)D$ 。因此, 缺货损失可表示为:

$$C_L^1 = \begin{cases} 0, \tau_{PM} < I_{E(1)}/D, \\ c_s (\tau_{PM} - I_{E(1)}/D)D, \tau_{PM} \geq I_{E(1)}/D. \end{cases} \quad (9)$$

其中 c_s 为单位产品缺货损失。

设预防性维修时长 τ_{PM} 服从威布尔分布, 其概率密度为 $\tau_{PM} \sim h_1(t) = \alpha_1 \lambda_1^{\alpha_1} t^{\alpha_1-1} e^{-(\lambda_1 t)^{\alpha_1}}, t > 0$ 。对式(9)求期望, 得平均缺货损失为:

$$\begin{aligned} C_L^{(1)} &= E(C_L^1) = \int_{I_{E(1)}/D}^{\infty} c_s (t - I_{E(1)}/D) Dh_1(t) dt \\ &= c_s \left[\frac{1}{\lambda_1} \Gamma \left(\frac{1}{\alpha_1} + 1, \left(\frac{\lambda_1 I_{E(1)}}{D} \right)^{\alpha_1} \right) - \frac{I_{E(1)}}{D} e^{-\left(\frac{\lambda_1 I_{E(1)}}{D} \right)^{\alpha_1}} \right] D. \end{aligned} \quad (10)$$

5) 检验成本

在情形 1 下, 批量产品能够全部被生产加工, 由于执行全检, 故检验成本 $C_S^{(1)}$ 等于单位产品检验成本 c_i 和批量 Q 的乘积, 即 $C_S^{(1)} = c_i Q$ 。

3.2. 情形 2: 系统发生故障

当系统发生故障时, 通过纠正性维修使系统恢复至初始状态。故障的发生取决于退化量是否大于故障阈值 L , 由于退化是随机的, 所以故障发生的时间是随机的, 故障前产品的次品率也是随机的。为了能够对这种高度随机的生产模型进行求解, 本文采用近似的处理方法, 首先确定系统故障的平均时间, 然后据此求解各类成本、生产利润和周期时长。

假设在 $t(t \in (0, \Delta])$ 时, 退化量 $X(t)$ 首次大于 L 。记 T_f 是系统故障时已运行的时长, 即 $T_f = \inf \{t | X(t) \geq L\}$ 。则, 在 $(0, \Delta]$ 内系统发生故障的条件下, T_f 的分布函数为:

$$F_{T_f}(t) = P(T_f \leq t) = P(X(t) \geq L | X(\Delta) \geq L) = \frac{\Gamma(\alpha t, L\beta)}{\Gamma(\alpha t)} \bigg/ \frac{\Gamma(\alpha\Delta, L\beta)}{\Gamma(\alpha\Delta)}, 0 < t \leq \Delta. \quad (11)$$

T_f 的期望为:

$$T_f' = E(T_f) = \int_0^\Delta P(T_f > t) dt = \int_0^\Delta [1 - P(T_f \leq t)] dt = \Delta - \frac{\Gamma(\alpha\Delta)}{\Gamma(\alpha\Delta, L\beta)} \int_0^\Delta \frac{\Gamma(\alpha t, L\beta)}{\Gamma(\alpha t)} dt. \quad (12)$$

在系统发生故障的情况下，一个生产周期内涉及的各类成本包括：次品报废成本 $C_{Re}^{(2)}$ 、库存成本 $C_I^{(2)}$ 、纠正性维修成本 $C_{CM}^{(2)}$ 、缺货损失 $C_L^{(2)}$ 和产品检验成本 $C_S^{(2)}$ 。故，总成本为：

$$C_T^{(2)} = C_{Re}^{(2)} + C_I^{(2)} + C_{CM}^{(2)} + C_L^{(2)} + C_S^{(2)}. \quad (13)$$

1) 次品报废成本

在情形 2 下，一个生产周期内的平均生产时长为 T'_f 。因此，次品报废成本可表示为：

$$C_{Re}^2 = c_{re} P \cdot \int_0^{T'_f} P(X(t)) dt = c_{re} P \cdot \left[(P_0 + \eta) T'_f - \eta \int_0^{T'_f} e^{-\lambda X(t)} dt \right]. \quad (14)$$

由于 $X(T'_f) \geq L$ ，且当 $t \in (0, T'_f)$ 时， $X(t) < L$ 。故在 $X(T'_f) \geq L$ 的条件下，有：

$$E(e^{-\lambda X(t)}) = \frac{1}{P(X(T'_f) \geq L)} \int_0^L e^{-\lambda x} dP(X(t) \leq x, X(T'_f) \geq L). \quad (15)$$

其中 $P(X(T'_f) \geq L) = \Gamma(\alpha T'_f, \beta L) / \Gamma(\alpha T'_f)$ ，

$$P(X(t) \leq x, X(T'_f) \geq L) = \int_0^x P(X(T'_f) - X(t) \geq L - u) f_{X(t)}(u) du$$

由伽马过程的独立增量性， $X(T'_f) - X(t) \sim \Gamma(x; \alpha(T'_f - t), \beta)$ 。从而

$$\int_0^x P(X(T'_f) - X(t) \geq L - u) f_{X(t)}(u) du = \int_0^x \frac{\Gamma(\alpha(T'_f - t), \beta(L - u)) \beta^{\alpha t} u^{\alpha t - 1}}{\Gamma(\alpha(T'_f - t)) \Gamma(\alpha t)} e^{-\beta u} du. \quad (16)$$

于是， $dP(X(t) \leq x, X(T'_f) \geq L) = \frac{\Gamma(\alpha(T'_f - t), \beta(L - x)) \beta^{\alpha t} x^{\alpha t - 1}}{\Gamma(\alpha(T'_f - t)) \Gamma(\alpha t)} e^{-\beta x} dx$ 。

代入式(15)，求得在 $X(T'_f) \geq L$ 的条件下，有：

$$E(e^{-\lambda X(t)}) = \frac{1}{\Gamma(\alpha T'_f, \beta L) / \Gamma(\alpha T'_f)} \int_0^L e^{-\lambda x} \frac{\Gamma(\alpha(T'_f - t), \beta(L - x)) \beta^{\alpha t} x^{\alpha t - 1}}{\Gamma(\alpha(T'_f - t)) \Gamma(\alpha t)} e^{-\beta x} dx \triangleq g_3(t). \quad (17)$$

对式(14)两边同时求期望，得次品的平均报废成本为：

$$C_{Re}^{(2)} = E(C_{Re}^2) = c_{re} \cdot P \left[(P_0 + \eta) T'_f - \eta \int_0^{T'_f} g_3(t) dt \right] = c_{re} \cdot N_{def}^{(2)}. \quad (18)$$

其中 $N_{def}^{(2)} = P \left[(P_0 + \eta) T'_f - \eta \int_0^{T'_f} g_3(t) dt \right]$ 为情形 2 下生产的平均次品总数。

2) 库存成本

与情形 1 类似，库存分为生产过程中库存和生产结束后库存两部分。在生产过程中，库存成本可表示为：

$$\begin{aligned} C_I^2(I) &= c_h \int_0^{T'_f} (T'_f - t) \{ P(1 - P(X(t))) - D \} dt \\ &= c_h \left[\frac{T_f'^2}{2} (P(1 - P_0 - \eta) - D) + P\eta \int_0^{T'_f} (T'_f - t) e^{-\lambda X(t)} dt \right]. \end{aligned} \quad (19)$$

故，生产过程中的平均库存成本为：

$$C_I^{(2)}(I) = E[C_I^2(I)] = c_h \left[\frac{T_f'^2}{2} (P(1 - P_0 - \eta) - D) + P\eta \int_0^{T'_f} (T'_f - t) g_3(t) dt \right]. \quad (20)$$

当系统故障时，生产停止运行。此时，最大的平均库存产品数为： $I_{E(2)} = (P - D) T'_f - N_{def}^{(2)}$ 。与情形

1 类似, 在生产过程结束后, 销售清空最大库存的平均库存成本为:

$$C_I^{(2)}(\text{II}) = c_h \int_0^{\frac{I_{E(2)}}{D}} (I_{E(2)} - Dt) dt = \frac{c_h}{2D} I_{E(2)}^2. \quad (21)$$

故, 总库存成本为:

$$C_I^{(2)} = C_I^{(2)}(\text{I}) + C_I^{(2)}(\text{II}). \quad (22)$$

3) 纠正性维修成本

在系统发生故障时, 通过纠正性维修对其进行彻底修复, 将纠正性维修成本记为常数 C_{CM} 。

4) 缺货损失

由于系统发生故障后, 立即进行纠正性维修。因此, 停机的时间取决于纠正性维修持续的时长 τ_{CM} 和库存产品被销售清空的时间 $I_{E(2)}/D$ 。

设纠正性维修时长 τ_{CM} 服从威布尔分布, 其概率密度为 $\tau_{CM} \sim h_2(t) = \alpha_2 \lambda_2^{\alpha_2} t^{\alpha_2-1} e^{-(\lambda_2 t)^{\alpha_2}}, t > 0$ 。与情形 1 类似, 平均缺货损失为:

$$C_L^{(2)} = c_s \left[\frac{1}{\lambda_2} \Gamma \left(\frac{1}{\alpha_2} + 1, \left(\frac{\lambda_2 I_{E(2)}}{D} \right)^{\alpha_2} \right) - \frac{I_{E(2)}}{D} e^{-\left(\frac{\lambda_2 I_{E(2)}}{D} \right)^{\alpha_2}} \right] D. \quad (23)$$

5) 检验成本

在情形 2 下, 批量产品被部分生产, 检验成本 C_S^2 等于单位产品检验成本 c_1 和生产的 product 总数 PT_f' 的乘积, 即 $C_S^2 = c_1 PT_f'$, C_S^2 为随机变量。故, 平均检验成本为:

$$C_S^{(2)} = E(C_S^2) = c_1 PT_f'. \quad (24)$$

4. 平均利润模型

生产加工的合格品按需求率全部发往市场销售。在情形 1 下, 平均销售的产品总数为: $Q - N_{def}^{(1)}$; 在情形 2 下, 平均销售的产品总数为: $PT_f' - N_{def}^{(2)}$ 。记单位产品的销售价格为 R , 则, 一个生产周期内获得的利润是销售额和总成本的差, 平均利润为:

$$\begin{aligned} E_R &= \left[(Q - N_{def}^{(1)})R - C_T^{(1)} \right] P(X(\Delta) < L) + \left[(PT_f' - N_{def}^{(2)})R - C_T^{(2)} \right] P(X(\Delta) \geq L) \\ &= \left[(Q - N_{def}^{(1)})R - C_T^{(1)} \right] \left[1 - \frac{\Gamma(\alpha\Delta, L\beta)}{\Gamma(\alpha\Delta)} \right] + \left[(PT_f' - N_{def}^{(2)})R - C_T^{(2)} \right] \frac{\Gamma(\alpha\Delta, L\beta)}{\Gamma(\alpha\Delta)}. \end{aligned} \quad (25)$$

另外, 在情形 1 下, 一个生产周期的时长可表示为 $T_1 = \Delta + \tau_{PM} I \left\{ \tau_{PM} > \frac{I_{E(1)}}{D} \right\} + \frac{I_{E(1)}}{D} I \left\{ \tau_{PM} \leq \frac{I_{E(1)}}{D} \right\}$, 这是一个随机变量, 对 T_1 求期望, 得情形 1 下一个生产周期的平均时长为:

$$T_{(1)} = E(T_1) = \Delta + \frac{1}{\lambda_1} \Gamma \left(\frac{1}{\alpha_1} + 1, \left(\frac{\lambda_1 I_{E(1)}}{D} \right)^{\alpha_1} \right) + \frac{I_{E(1)}}{D} \left[1 - e^{-\left(\frac{\lambda_1 I_{E(1)}}{D} \right)^{\alpha_1}} \right]. \quad (26)$$

情形 2 下, 一个生产周期的时长可表示为 $T_2 = T_f' + \tau_{CM} I \left\{ \tau_{CM} > \frac{I_{E(2)}}{D} \right\} + \frac{I_{E(2)}}{D} I \left\{ \tau_{CM} \leq \frac{I_{E(2)}}{D} \right\}$ 。

故, 情形 2 下一个生产周期的平均时长为:

$$T_{(2)} = E(T_2) = T_f' + \frac{1}{\lambda_2} \Gamma \left(\frac{1}{\alpha_2} + 1, \left(\frac{\lambda_2 I_{E(2)}}{D} \right)^{\alpha_2} \right) + \frac{I_{E(2)}}{D} \left[1 - e^{-\left(\frac{\lambda_2 I_{E(2)}}{D} \right)^{\alpha_2}} \right]. \quad (27)$$

因此，一个生产周期的平均时长为：

$$E_T = T_{(1)} P(X(\Delta) < L) + T_{(2)} P(X(\Delta) \geq L) = T_{(1)} \left(1 - \frac{\Gamma(\alpha\Delta, L\beta)}{\Gamma(\alpha\Delta)} \right) + T_{(2)} \frac{\Gamma(\alpha\Delta, L\beta)}{\Gamma(\alpha\Delta)}. \quad (28)$$

综上所述，一个生产周期内，单位时间获取的平均利润为：

$$ERT = \frac{E_R}{E_T}. \quad (29)$$

5. 数值计算

假定某产品的市场需求一直比较稳定，在生产加工过程中，系统随着运行逐渐发生退化，退化服从伽马过程。根据退化量是否达到故障阈值，分别采用预防性维修和纠正性维修两种方案，维修时长服从威布尔分布。以批量产品为单位组织生产。为了制定最佳的生产计划，先确定模型参数值，如表 1 所示。

Table 1. Model parameters and their values
表 1. 模型参数及其取值

参数	取值
α	0.28
β	0.54
D	540
P_0	0.003
η	0.067
λ	0.035
a	5.3
c_{re}	6.2
C_0	80
C_{CM}	170
c_h	0.5
c_s	4.4
α_1	1
α_2	1
λ_1	1.32
λ_2	0.78
c_1	1
R	10

根据式(29)，寻找最优的 ERT 及对应的 Q, P ，寻优算法步骤如下：

Input: $\alpha, \beta, D, P_0, \eta, \lambda, a, c_{re}, C_0, C_{CM}, c_h, c_s, \alpha_1, \alpha_2, \lambda_1, \lambda_2, c_1, R$ 。

- Step 1: 设置 Q 和 P 的搜索范围 $Q \in [Q_{\min}, Q_{\max}]$, $P \in [P_{\min}, P_{\max}]$;
- Step 2: 令 $Q = Q_{\min}$, $P = P_{\min}$;
- Step 3: 分别计算 $\Delta = Q/P$;
- Step 4: 根据式(25)、(28)、(29)分别计算 E_R 、 E_T 和 ERT ;
- Step 5: 记录 ERT 及 Q, P ;
- Step 6: 如果 $P < P_{\max}$, 则令 $P = P + 1$, $Q = Q + 1$, 并返回 Step 3;
- Step 7: 如果 $Q < Q_{\max}$, 则令 $P = P + 1$, $Q = Q + 1$, 并返回 Step 3;
- output: 输出最大的单位时间平均利润 ERT_{\max} 及对应的 Q, P 。

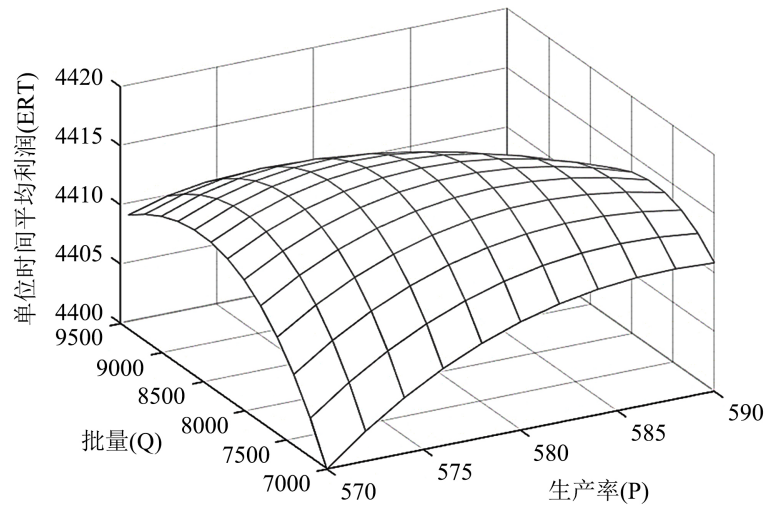


Figure 1. The effect of batch and productivity on average profit per unit time
图 1. 批量、生产率对单位时间平均利润的影响

批量、生产率对单位时间平均利润的影响关系如图 1 所示。由图 1 知，单位时间平均利润 ERT 的最大值是存在的。将表 1 中的参数值代入式(29)，采用 for 循环遍历搜寻方法，遍历网格内的所有的参数点，找到全局最优解，通过 MATLAB 编程计算得：最佳批量 $Q^* = 8140$ ，最佳生产率 $P^* = 580$ ，单位时间平均利润 $ERT = 4416.2$ 。

6. 灵敏度分析

为了进一步分析模型参数变化对最佳决策方案的影响，作灵敏度分析如下。

Table 2. The influence of L on decision variables

表 2. L 对决策变量的影响

参数	值	Q^*	P^*	Δ	ERT
L	11.25	9240	570	16.2	4452.8
	9.68	8140	580	14.0	4416.2
	8.00	7200	590	12.2	4364.0
	7.21	6480	610	10.6	4333.9
	6.65	6100	620	9.8	4309.3

由表 2 知, 当故障临界阈值 L 减小时, 最佳批量 Q^* 逐渐减小, 最佳生产率 P^* 逐渐增大, 计划生产加工的时长 Δ 逐渐减小, 单位时间平均利润 ERT 逐渐减小。

Table 3. The influence of c_h on decision variables

表 3. c_h 对决策变量的影响

参数	值	Q^*	P^*	Δ	ERT
c_h	0.1	8350	660	12.7	4574.8
	0.3	8120	600	13.5	4473.9
	0.4	8040	590	13.6	4441.7
	0.5	8140	580	14.0	4416.2
	0.7	8210	570	14.4	4379.6

由表 3 知, 当单位时间库存成本 c_h 增大时, 最佳批量 Q^* 先逐渐减小, 然后逐渐增大, 最佳生产率 P^* 逐渐减小, 计划生产加工的时长 Δ 逐渐增大, 单位时间平均利润 ERT 逐渐减小。

Table 4. The influence of c_s on decision variables

表 4. c_s 对决策变量的影响

参数	值	Q^*	P^*	Δ	ERT
c_s	1.0	7340	580	12.7	4530.6
	1.8	7550	580	13.0	4503.1
	2.4	7700	580	13.3	4482.8
	3.6	7980	580	13.8	4442.6
	4.4	8140	580	14.0	4416.2

由表 4 知, 当单位产品缺货损失 c_s 增大时, 最佳批量 Q^* 逐渐增大, 最佳生产率 P^* 保持不变, 计划生产加工的时长 Δ 逐渐增大, 单位时间平均利润 ERT 逐渐减小。

Table 5. The influence of c_{re} on decision variables

表 5. c_{re} 对决策变量的影响

参数	值	Q^*	P^*	Δ	ERT
c_{re}	3.3	8390	580	14.5	4436.5
	4.7	8270	580	14.3	4426.6
	5.5	8200	580	14.1	4421.1
	6.2	8140	580	14.0	4416.2
	7.0	8080	580	13.9	4410.7
	7.6	8030	580	13.8	4406.7

由表 5 知, 当单位次品报废成本 c_{re} 增大时, 最佳批量 Q^* 逐渐减小, 最佳生产率 P^* 保持不变, 计划生产加工的时长 Δ 逐渐减小, 单位时间平均利润 ERT 逐渐减小。

7. 总结

本文研究了在市场需求率不变的情况下, 生产计划和维修方案的决策问题。讨论了系统的随机退化过程对运行状态及产品质量的影响, 根据退化是否导致系统故障, 分别采用预防性维修和纠正性维修两种方案。为了能够对这种高度随机的生产模型进行数值求解, 通过计算各类成本的均值及生产周期的平均时长, 提出以批量和生产率为决策变量的平均利润模型。灵敏度分析讨论了模型参数对决策变量和单位时间平均利润的影响。研究表明: 故障阈值、单位时间库存成本的变化对最佳批量、最佳生产率都有较大影响; 单位产品缺货损失、单位次品报废成本的变化对最佳批量的影响较大, 对最佳生产率没有影响。

参考文献

- [1] Jafari, L. and Makis, V. (2015) Joint Optimal Lot Sizing and Preventive Maintenance Policy for a Production Facility Subject to Condition Monitoring. *International Journal of Production Economics*, **169**, 156-168. <https://doi.org/10.1016/j.ijpe.2015.07.034>
- [2] Guo, Y., Hrouga, M., Liu, J., et al. (2022) Joint Optimization of Capacitated Lot-Sizing with Lost Sales and Non-Cyclical Preventive Maintenance. *International Journal of Industrial Engineering*, **29**, 315-334.
- [3] Hosseini-Motlagh, S.M., Nikkhah, Q.A. and Ghatreh, S.M.R. (2020) A Robust Possibilistic Approach for Multi-Depot Inventory Routing Problem. *International Journal of Industrial Engineering: Theory, Applications, and Practice*, **27**, 165-180.
- [4] Bouslah, B., Gharbi, A. and Pellerin, R. (2018) Joint Production, Quality and Maintenance Control of a Two-Machine Line Subject to Operation-Dependent and Quality-Dependent Failures. *International Journal of Production Economics*, **195**, 210-226. <https://doi.org/10.1016/j.ijpe.2017.10.016>
- [5] Peng, H. and Houtum, G.J. (2016) Joint Optimization of Condition-Based Maintenance and Production Lot-Sizing. *European Journal of Operational Research*, **253**, 94-107. <https://doi.org/10.1016/j.ejor.2016.02.027>
- [6] Cheng, G.Q., Zhou, B.H. and Li, L. (2018) Integrated Production, Quality Control and Condition-Based Maintenance for Imperfect Production Systems. *Reliability Engineering and System Safety*, **175**, 251-264. <https://doi.org/10.1016/j.ress.2018.03.025>
- [7] Zheng, R., Zhou, Y., Gu, L., et al. (2021) Joint Optimization of Lot Sizing and Condition-Based Maintenance for a Production System Using the Proportional Hazards Model. *Computers & Industrial Engineering*, **154**, 1-10. <https://doi.org/10.1016/j.cie.2021.107157>
- [8] Khatab, A., Diallo, C., Aghezzaf, E.H. and Venkatadri, U. (2019) Integrated Production Quality and Condition-Based Maintenance Optimisation for a Stochastically Deteriorating Manufacturing System. *International Journal of Production Research*, **57**, 2480-2497. <https://doi.org/10.1080/00207543.2018.1521021>
- [9] Bouslah, B., Gharbi, A. and Pellerin, R. (2013) Joint Optimal Lot Sizing and Production Control Policy in an Unreliable and Imperfect Manufacturing System. *International Journal of Production Economics*, **144**, 143-156. <https://doi.org/10.1016/j.ijpe.2013.01.031>
- [10] Bouslah, B., Gharbi, A. and Pellerin, R. (2016) Integrated Production, Sampling Quality Control and Maintenance of Deteriorating Production Systems with AOQL Constraint. *Omega*, **61**, 110-126. <https://doi.org/10.1016/j.omega.2015.07.012>