Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, 2023, 12(1), 147-152
Published Online January 2023 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2023.121018

Hans汉斯

一类特殊坚韧图的性质

马　惠，杨卫华*

太原理工大学，数学学院，山西 晋中

收稿日期：2022年12月19日；录用日期：2023年1月11日；发布日期：2023年1月29日

摘　要

连通图G的坚韧度定义为$\tau(G)=\min\{|S|/w(G-S):S\subseteq V(G),w(G-S)\geq 2\}$。如果$G$的坚韧度是$t$，并且删去$G$的任意一条边后其坚韧度减小，则称$G$是极小$t$-坚韧的。Matthews等证明了$K_{1,3}$-free图的连通度是其坚韧度的2倍。本文证明了坚韧度为t的$K_{1,n}$-free图的连通度不超过$(n-1)t$，且极小1-坚韧，$K_{1,4}$-free图的连通度为2。此外，Kriesell猜想极小1-坚韧图的最小度是2。Katona等推广了上述猜想，极小t-坚韧图的最小度是$\lceil 2t\rceil$。本文证明了极小$1/(n-1)$-坚韧，$K_{1,n}$-free图的最小度为1，其中$n\geq 3$。

关键词

坚韧度，极小t-坚韧图，连通度，最小度，$K_{1,n}$-free图

Properties of Some Class of Special Tough Graphs

Hui Ma, Weihua Yang*

School of Mathematics, Taiyuan University of Technology, Jinzhong Shanxi

Received: Dec. 19th, 2022; accepted: Jan. 11th, 2023; published: Jan. 29th, 2023

Abstract

The toughness of G is defined as $\tau(G)=\min\{|S|/w(G-S):S\subseteq V(G),w(G-S)\geq 2\}$. A graph G is minimally t-tough if the toughness of G is t and the deletion of any edge from G decreases the toughness. Matthews *et al*. has proved that the connectivity of $K_{1,3}$-free graphs is twice its toughness.

*通讯作者。

文章引用: 马惠, 杨卫华. 一类特殊坚韧图的性质[J]. 应用数学进展, 2023, 12(1): 147-152.
DOI: 10.12677/aam.2023.121018

This paper shows that the connectivity of $K_{1,n}$ -free graphs with toughness t is at most $(n-1)t$, and the connectivity of minimally 1-tough, $K_{1,4}$ -free graphs is 2. In addition, Kriesell conjectured that the minimum degree of minimally 1-graphs is 2. Katona *et al.* proposed a generalized version of the conjecture that the minimum degree of minimally *t*-tough graph is $\lceil 2t \rceil$. This paper proves that the minimum degree of minimally $1/(n-1)$ -tough, $K_{1,n}$ -free graphs is 1, where $n \geq 3$.

Keywords

Toughness, Minimally *t*-Tough Graphs, Connectivity, Minimum Degree, $K_{1,n}$ -Free Graphs

1. 引言

$G(V,E)$是无向，有限阶的简单图。对于 G 的任意一点 v，$N_G(v)$是指 G 中相邻的点集，$d_G(v)$是指 G 中与 v 关联的边的数目。用$\delta(G)$表示 G 的顶点的最小度，用$\kappa(G)$表示 G 的连通度，且用$\kappa'(G)$表示 G 的边连通度。对于任意点集 $S \subseteq V(G)$，用 $G[S]$ 和 $G-S$ 分别表示 S 和 $V(G)-S$ 的导出子图，并且用 $w(G-S)$ 表示 $G-S$ 的分支个数。设 S 和 T 是 G 的子图或者 $V(G)$ 的子集，用 $N_S(T)$ 表示在 $S-T$ 中与 T 中点相邻的点集，用 $e(S,T)$ 表示 S 与 T 之间的边集。

定义 1.1：设 G 是一个非完全连通图，其坚韧度定义为：

$$\tau(G)=\min\{|S|/w(G-S): S \subseteq V(G), w(G-S) \geq 2\};$$

如果 G 是完全图，则其坚韧度 $\tau(G)=+\infty$；如果 G 不连通，则其坚韧度 $\tau(G)=0$。

定义 1.2：如果 G 的坚韧度为 $\tau(G) \geq t$，那么称 G 是 t-坚韧的。若 G 的割集 S 满足 $|S|=\tau(G)\cdot w(G-S)$，则称 S 是 G 的坚韧集。

Chvátal [1]在 1973 年首次提出坚韧度的定义，并提出了一个著名的猜想：存在正实数 t_0，使得每个 t_0-坚韧图都是哈密顿图。之后，很多学者开始研究图的坚韧度和哈密顿图的关系。Thomassen 给出了一个坚韧度为 3/2 的非哈密顿图：选择一个 3-正则，3-连通且不存在哈密顿路的图 G (Bermond [2]证明了这样的图是存在的)，将图中的每个点都替换成三角形后得到图 H，Chvátal [3]证明了 $\tau(H)=3/2$，因此满足 Chvátal 猜想的 $t_0>3/2$。之后，Bauer 等在[1]中证明了，任给 $\varepsilon>0$，都存在一个$\left(\frac{9}{4}-\varepsilon\right)$-坚韧，不包含哈密顿路的图，因此 $t_0>2$。在一些特殊的图类中，我们可以确定 t_0 的值。例如，10-坚韧弦图[4]和 3/2-坚韧分离图[5]是哈密顿图；4-坚韧，$2k$-连通 $P_2 \cup 2P_1$-free 图[6]是哈密顿图；2-坚韧，$2K_2$-free 图[7]是哈密顿图；7-坚韧，$P_3 \cup 2P_1$-free 图[8]是哈密顿图。此外，有些学者开始研究图的坚韧度和 k-因子的关系[9]。Enomoto 等[10]给出了 k-坚韧图有一个 k-因子的充分条件是 $k|V(G)|$ 是偶数。Bauer 等[1]证明了每个 3/2-坚韧，5-弦图都有一个 2-因子。1999 年，Broersma [11]在研究 2-坚韧图的哈密顿性的过程中给出了极小 t-坚韧图的定义。

定义 1.3：如果 G 的坚韧度为 t，且对于任意一条边 $e \in E(G)$ 都有 $\tau(G-e)<t$，则称 G 是极小 t-坚

韧的。

由坚韧度的定义可知每个 t-坚韧非完全图都是 $2t$-连通的，因此 t-坚韧图的最小度至少是 $\lceil 2t \rceil$。在[12]中，Mader [13]证明了极小 k-连通图的最小度为 k。据此，Kriesell [7]针对极小 1-坚韧图提出了以下猜想。后来，Katona [12]推广了他的猜想。

猜想 1.4：[14]每个极小 1-坚韧图都有一个 2 度顶点。

猜想 1.5：[12]每个极小 t-坚韧图都有一个 $\lceil 2t \rceil$ 度顶点。

目前为止 Kriesell 的猜想还未被证明。2018 年，Katona [12]等给出了一个极小 1-坚韧图最小度的上界，这是现在得到的最好的结果。虽然现在还没有证明 Kriesell 的猜想在所有图类上都成立，但是可以证明这个猜想在一些特殊图上成立，例如：Katona [12]证明了极小 1-坚韧，$K_{1,3}$-free 图的最小度是 2。同样，推广的 Kriesell 猜想也被证明在一些特殊图类中成立。例如：[15]中证明了极小 t-坚韧弦图，分离图和 $K_{1,3}$-free 图的最小度为 1，其中 $0 < t \le 1/2$。

定理 1.6：[12]每个极小 1-坚韧图最小度不超过 $3/n+1$。

根据极小 t-坚韧图的定义，可以得到下面的命题。

命题 1.7：[15]设 G 是极小 t-坚韧图，其中 t 是正实数。对于 G 的任意一条边 e，

1) e 是 G 的一条割边，或

2) 存在一个点集 $S = S(e) \subseteq V(G)$ 满足：$|S| \ge t \cdot w(G-S)$ 和 $|S| < t \cdot w((G-e)-S)$，且 e 是 $G-S$ 的割边。

在第一种情况下，我们定义 $S = S(e) = \varnothing$。

本文主要研究 t-坚韧，$K_{1,n}$-free 图的性质，并证明推广的 Kriesell 猜想在极小 $1/(n-1)$-坚韧，$K_{1,4}$-free 图上成立。下面我们给出了 $K_{1,n}$-free 图的定义。

定义 1.8：如果 G 不包含 $K_{1,n}$ 包含作为它的导出子图，则称 G 是 $K_{1,n}$-free 图。

2. 主要结论及其证明

2.1. t-坚韧，$K_{1,n}$-Free 图的连通度

在这一节中，我们研究 t-坚韧，$K_{1,n}$-free 图的连通度。Matthews 等[16]证明了 $K_{1,3}$-free 图的坚韧度和连通度有以下关系。

定理 2.1：[16]如果 G 是非完全 $K_{1,3}$-free 图，那么 $\kappa(G) = 2\tau(G)$。

设 $n \ge 4$。对于 $K_{1,n}$-free 图，上述定理中的等式不成立。例如：$K_{n-1,n-1}$ 的坚韧度是 1，但其连通度是 $n-1$，但其连通度是 $n-1$。下面我们给出了一个 t-坚韧，$K_{1,n}$-free 图的连通度的上界。

定理 2.2：设 G 是非完全 $K_{1,n}$-free 图，其中 $n \ge 4$。下面的结论成立。

(i) $\kappa(G) \le (n-1) \cdot \tau(G)$。

(ii) 如果 $\tau(G) = 1$ 且 $n = 4$，那么 $\kappa(G) = 2$ 或者对于 G 的坚韧集 S，$G-S$ 的每个分支在 S 中有且仅有三个邻点，且 S 中的每个点都与 $G-S$ 的每个分支相邻。

证明：由坚韧度的定义知，图 G 中存在割集 S 满足 $|S| \ge \tau(G) \cdot w(G-S)$。将 $G-S$ 的每个分支都收缩到一个点，用 S 表示这些点的集合，并将 S 与 T 之间的重边删掉。由于 G 是 $K_{1,n}$-free 图，所以 S 中的每个点都与 T 中的最多 $n-1$ 个邻点相邻，从而 $|e(S,T)| \le (n-1)|S|$。另一方面，由于 T 中的每个点在 S 中至少有 $\kappa(G)$ 个邻点，所以可以得到 $|e(S,T)| \ge \kappa(G) \cdot |T| = \kappa(G) \cdot w(G-S)$。因此 $(n-1)|S| \ge \kappa(G) \cdot w(G-S)$，从而 $\kappa(G) \le (n-1) \cdot \tau(G)$。

由上面的证明知，当 $\tau(G) = 1$ 且 $n = 4$ 时，有 $2 = 2\tau(G) \le \kappa(G) \le 3$。如果 $\kappa(G) = 3$，由 $\tau(G) = 1$ 知

$3|S|=|e(S,T)|=3|T|=3w(G-S)$。这时 $G-S$ 的每个分支在 S 中有且仅有三个邻点，且 S 中的每个点都与 $G-S$ 的每个分支相邻。

由上面的定理知，坚韧度为 1 的 $K_{1,4}$-free 图的连通度不一定为 2，若 Kriesell 的猜想正确，则极小 1-坚韧，$K_{1,4}$-free 图的连通度是 2。

定理 2.3：极小 1-坚韧，$K_{1,4}$-free 图的连通度是 2。

证明：设 G 是极小 1-坚韧，$K_{1,4}$-free 图。假设 $\kappa(G)\geq 3$，由 $3\leq\kappa(G)\leq\kappa'(G)$ 知中 G 没有割边。

任给边 $e=uv\in E(G)$，设 $S(e)\subseteq V(G)$ 是满足命题 1.6 的点集。由于 e 不是割边，所以 $S(e)\neq\varnothing$ 且 $|S(e)|=w(G-S(e))$。这时 $|S(e)|>1$，否则 $S(e)\cup\{u\}$ 或 $S(e)\cup\{v\}$ 是 G 的一个二点割，这与 $\kappa(G)\geq 3$ 矛盾。因此 $w(G-S(e))=|S(e)|\geq 2$，即 $S(e)$ 是 G 的坚韧集。设 $C(e)$ 是 $G-S(e)$ 中包含边 e 的分支，且 $C_u(e)$ 和 $C_v(e)$ 分别表示 $(G-e)-S(e)$ 中包含 u 和 v 的分支。由定理 2.2 (ii)知，可设 $S'(e)=N_{S(e)}(C(e))=\{w_1,w_2,w_3\}$。若 $C_u(e)\neq\{u\}$，由 $\kappa(G)\geq 3$，容易得到 $|N_{S'(e)}(C_u(e)-\{u\})|\geq 2$ 且 $|N_{S'(e)}(C_v(e))|\geq 2$。再由 $|S'(e)|=3$，可得 $N_{S'(e)}(C_u(e)-\{u\})\cap N_{S'(e)}(C_v(e))\neq\varnothing$。不妨设 $w_1\in N_{S'(e)}(C_u(e)-\{u\})\cap N_{S'(e)}(C_v(e))$。根据引理 2.2 (ii)，点 w_1 和 $G-S(e)$ 中除 $C(e)$ 外的另外两个分支相邻。显然，$G[N_{G-S(e)}(w_1)]$ 中包含一个 $K_{1,4}$ 子图，与 G 是 $K_{1,4}$-free 图矛盾。因此 $C_u(e)=\{u\}$。同理，$C_v(e)=\{v\}$。由于 $\delta(G)\geq\kappa(G)\geq 3$，我们可以设 $\{w_1,w_2\}\subseteq N_{S'(e)}(u)$ 且 $\{w_1,w_3\}\subseteq N_{S'(e)}(v)$。

令 $e_1=uw_1$。设 $S(e)\subseteq V(G)$ 是满足定理 1.6 的点集。类似于 $S(e)$ 的讨论，我们可以证明 $S(e_1)$ 也是 G 的坚韧集。显然，$v\in S(e_1)$。由定理 2.2 (ii)知，点 v 与 $G-S(e_1)$ 的三个分支相邻。而 $N_G(v)\subseteq\{u\}\cup S'(e)$，所以 $\{w_2,w_3\}\subseteq(G-S(e_1))-C(e_1)$，这与 $uw_2\in E(G)$ 矛盾。

因此 $\kappa(G)\leq 2$。再由 $\kappa(G)\geq 2\tau(G)=2$ 知 $\kappa(G)=2$。

2.2. 极小 $1/(n-1)$-坚韧，$K_{1,n}$-Free 图

在这一节中，我们将研究极小 $1/(n-1)$-坚韧，$K_{1,4}$-free 图的最小度。Katona 等在[4] [10]中给出了极小 1/2-坚韧和极小 1-坚韧，$K_{1,3}$-free 图的结构。

定理 2.4：[15]极小 1/2-坚韧，$K_{1,3}$ free 图可以用下面的方式构造。

1) 任取一颗最大度为 3 的树，且树中所有 3 度点和 1 度点组成的点集是独立集。

2) 删掉每个度为 3 的点 v，然后将 v 在树中每个邻点用一个三角形连接起来。

定理 2.5：[12]点数大于 3 的极小 1-坚韧，$K_{1,3}$-free 图都是圈。

由上面的定理知，对于极小 1/2-坚韧和极小 1-坚韧，$K_{1,3}$-free 图，Kriesell 的猜想是正确的。下面我们将研究，当 $n\geq 4$ 时，极小 $1/(n-1)$-坚韧，$K_{1,n}$-free 图的最小度。由极小 $1/(n-1)$-坚韧，$K_{1,4}$-free 图 G 的定义，容易得到以下引理。任给边 $e\in E(G)$，令 $k(e)=\min\{|S(e)|:S(e)\text{是满足命题1.6的点集}\}$。

引理 2.6：设 G 是极小 $1/(n-1)$-坚韧，$K_{1,n}$-free 图。对于 G 的任意一条非割边 e，

(i) $k(e)=1$。

(ii) 有且仅有一个圈包含边 e，且圈长为 3。

证明：对于 G 的任意一条非割边 e，由命题 1.6 知存在一个非空点集 $S(e)\subseteq V(G)$ 满足

$$w(G-S(e))\leq(n-1)|S(e)|<w((G-e)-S(e))。$$

这时 $w(G-S(e))=(n-1)|S(e)|$。

将 $G-S(e)$ 的每个分支都收缩到一个点，用 T 表示这些点的集合，并将 $S(e)$ 与 T 之间的重边删掉。由于 G 是 $K_{1,n}$-free 图，所以 S 中的每个点都与 T 中的最多 $n-1$ 个邻点相邻，从而 $|e(S,T)|\leq(n-1)|S|$。另一方面，由 G 是连通图知 T 中的每个点在 $S(e)$ 中至少有 1 个邻点，所以 $|e(S,T)|\geq|T|=\kappa(G)$。故有

$$w\left(G-S(e)\right)=|T|\le\left|e\left(S(e),T\right)\right|\le(n-1)\left|S(e)\right|。$$

由 $w\left(G-S(e)\right)=(n-1)\left|S(e)\right|$ 知 $|T|=\left|e\left(S(e),T\right)\right|=(n-1)\left|S(e)\right|$。因此 $G-S(e)$ 的每个分支在 $S(e)$ 中有且仅有一个邻点，且 $S(e)$ 中的每个点都与 $G-S(e)$ 的 $n-1$ 个分支相邻。

设 $C(e)$ 是 $G-S(e)$ 中包含边 e 的分支，令 $S'(e)=N_{S(e)}\left(C(e)\right)=\{s_1\}$。因为在 $G-S(e)$ 中与 s_1 相邻的 $n-1$ 个分支不与 $S(e)-\{s_1\}$ 中的点相邻，所以 $w\left(G-S'(e)\right)=n-1$。不难看出 $S'(e)$ 是满足命题 1.6 的点集，所以 $k(e)=1$ (见图 1)。

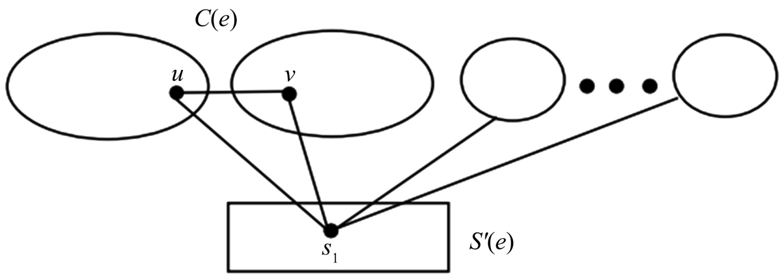

Figure 1. $k(e)=1$

图 1. $k(e)=1$

由于 e 是非割边，所以 G 中至少有一个圈包含边 e。再由 $S'(e)=\{s_1\}$ 知包含边 e 的圈一定包含 s_1。设 e 的两个端点分别是 u 和 v。因为 s_1 与 $G-S'(e)$ 的 $n-1$ 个分支相邻且 G 是 $K_{1,n}$-free 的，所以 $N_{C(e)}(s_1)=\{u,v\}$，即 e 只包含在三角形 uvs_1 中。

定理 2.7：设 $n\ge3$。极小 $1/(n-1)$-坚韧，$K_{1,n}$-free 图的最小度是 1。

证明：设 G 是极小 $1/(n-1)$-坚韧，$K_{1,n}$-free 图。对于 G 的每个三角形，删掉三角形的三条边，然后增加一个点，将每个点与原来三角形的三个点连边。把 G 经过上述操作后得到的图记为 H。由引理 2.6 (ii)知 G 中的所有圈都是三角形，因此 H 是树。

下面我们将证明 H 中的每个叶子节点都是 G 中的 1 度点。假设 H 中存在一个叶子节点 s 不是 G 中的 1 度点。由 H 的构造过程知 G 中有且仅有一个三角形包含点 s 且 $d_G(s)=2$，设这个三角形的点集为 $\{u,v,s\}$。令 $e=uv$，设 $S(e)\subseteq V(G)$ 是满足命题 1.6 的点集，且 $\left|S(e)\right|=k(e)$。由引理 2.6 (i)知 $S(e)=\{s\}$。由命题 1.6 知 $w\left(G-S(e)\right)=n-1$。由 G 是连通图且 $n\ge4$，所以 $d_G(s)\ge n>3$，矛盾。

3. 结论

根据坚韧度的定义，我们可以得到 t-坚韧图的连通度是 $2t$-连通的，但是其连通度不一定为 $2t$。对于一些特殊图类，我们可以确定图的坚韧度和连通度的关系。Matthews 等[16]证明了坚韧度为 t 的 $K_{1,3}$-free 图的连通度是 $2t$。由本文的定理 2.2 (i)知，坚韧度小于 2/3 的 $K_{1,4}$-free 图的连通度为 1，坚韧度大于等于 2/3 且小于 1 的 $K_{1,4}$-free 图的连通度是 2 且坚韧度为 1 的 $K_{1,4}$-free 图的连通度不超过 3。Kriesell [14]猜想极小 1-坚韧图的最小度为 2。由 $2\tau(G)\le\kappa(G)\le\delta(G)$ 知，如果 Kriesell 的猜想正确，容易推知极小 1-坚韧图的连通度是 2。本文证明了极小 1-坚韧，$K_{1,4}$-free 图的连通度为 2。Katona [12]将 Kriesell 的猜想推广到了 $2t$ 上。本文证明了对于极小 $1/(n-1)$-坚韧，$K_{1,n}$-free 图，推广的 Kriesell 的猜想是正确的。

基金项目

山西省基础研究项目(20210302123097)。

参考文献

[1] Chvátal, V. (2006) Tough Graphs and Hamiltonian Circuits. *Discrete Mathematics*, **306**, 910-917. https://doi.org/10.1016/j.disc.2006.03.011

[2] Bermond, J.C. (1978) Hamiltonian Graphs. In: Beineke, L. and Wilson, R.J., Eds., *Seleted Topics in Graph Theorey*, Academic Press, London, 127-167.

[3] Bauer, D., Katona, G.Y., Kratsch, D. and Veldman, H.J. (2000) Chordality and 2-Factors in Tough Graphs. *Discrete Applied Mathematics*, **99**, 323-329. https://doi.org/10.1016/S0166-218X(99)00142-0

[4] Kabel, A. and Kaiser, T. (2017) 10-Tough Chordal Graphs Are Hamiltonian. *Journal of Combinatorial Theory*, *Series B*, **122**, 417-427. https://doi.org/10.1016/j.jctb.2016.07.002

[5] Kratsh, D., Lehel, J. and Müller, H. (1996) Toughness, Hamiltonicity and Split Graphs. *Discrete Mathematics*, **150**, 231-245. https://doi.org/10.1016/0012-365X(95)00190-8

[6] Shi, L. and Shan, S. (2022) A Note on Hamiltonian Cycles in 4-Tough $P_2 \cup kP_1$-Free Graphs. *Discrete Mathematics*, **345**, Article ID: 113081. https://doi.org/10.1016/j.disc.2022.113081

[7] Ota, K. and Sanka, M. (2022) Hamiltonian Cycles in 2-Tough $2K_2$-Free Graphs. *Journal of Graph Theory*, **101**, 769-781. https://doi.org/10.1002/jgt.22852

[8] Gao, Y. and Shan, S. (2022) Hamiltonian Cycles in 7-Tough $P_3 \cup 2P_1$-Free Graphs. *Discrete Mathematics*, **345**, Article ID: 113069. https://doi.org/10.1016/j.disc.2022.113069

[9] Lu, H. and Kano, M. (2020) Characterization of 1-Tough Graphs Using Factors. *Discrete Mathematics*, **343**, Article ID: 111901. https://doi.org/10.1016/j.disc.2020.111901

[10] Enomoto, H., Jackson, B., Katerinis, P. and Saito, A. (1985) Toughness and the Existence of *k*-Factors. *Journal of Graph Theory*, **9**, 87-95. https://doi.org/10.1002/jgt.3190090106

[11] Broersma, H., Engbers, E. and Trommel, H. (1999) Various Results on the Toughness of Graphs. *Networks*, **33**, 233-238. https://doi.org/10.1002/(SICI)1097-0037(199905)33:3<233::AID-NET9>3.0.CO;2-A

[12] Katona, G.Y., Soltesz, D. and Varga, K. (2018) Properties of Minimally *t*-Tough Graphs. *Discrete Mathematics*, **341**, 221-231. https://doi.org/10.1016/j.disc.2017.08.033

[13] Mader, W. (1971) Eine Eigenschaft der Atome endlicher Graphen. *Archiv der Mathematik*, **22**, 333-336. https://doi.org/10.1007/BF01222585

[14] Kaiser, T. (2003) Problems from the Workshop on Dominating Cycles. http://iti.zcu.cz/history/2003/Hajek/problems/hajek-problems.ps

[15] Katona, G.Y. and Varga, K. (2018) Minimally Toughness in Special Graph Classes. ArXiv: 1802.00055.

[16] Matthews, M.M. and Sumner, D.P. (1984) Hamiltonian Results in $K_{1,3}$-Free Graphs. *Journal of Graph Theory*, **8**, 139-146. https://doi.org/10.1002/jgt.3190080116