Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, 2023, 12(11), 4798-4805
Published Online November 2023 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2023.1211473

Hans汉斯

关于复合算子$T \circ d \circ G$的高阶可积性研究

李群芳

赣州师范高等专科学校数学系，江西 赣州

收稿日期：2023年8月25日；录用日期：2023年11月17日；发布日期：2023年11月23日

摘　要

本文研究了满足A-调和方程的微分形式高阶可积性问题。文中利用微分形式的Hölder不等式及同仑算子与格林算子的相关结果首先证明了$1 < q < n$条件下作用于满足A-调和方程微分形式的复合算子$T \circ d \circ G$的局部高阶可积性，然后在此基础上进一步给出了$q \geq n$条件下的高阶可积性。

关键词

高阶可积性，微分形式，复合算子，调和方程

Study on Higher Integrability of Composition Operator $T \circ d \circ G$

Qunfang Li

Department of Mathematics, Ganzhou Teachers College, Ganzhou Jiangxi

Received: Aug. 25th, 2023; accepted: Nov. 17th, 2023; published: Nov. 23rd, 2023

Abstract

In this paper, we have studied higher order integrability for differential forms satisfying A-harmonic equation. Based on Hölder inequality of differential forms and some results of Homotopy operator and Green's operator, we first establish local higher order integrability for composition operator $T \circ d \circ G$ applied to differential forms satisfying A-harmonic equation with the condition $1 < q < n$. Furthermore, we also give higher order integrability under the condition $q \geq n$.

Keywords

Higher Integrability, Differential Forms, Composition Operator, Harmonic Equation

文章引用: 李群芳. 关于复合算子$T \circ d \circ G$的高阶可积性研究[J]. 应用数学进展, 2023, 12(11): 4798-4805.
DOI: 10.12677/aam.2023.1211473

1. 引言

2009 年，文献[1]中证明了 δ-John 域上作用于微分形式复合算子 $T \circ H$ 的 Poincaré-型嵌入不等式

$$\left\| T\left(H\left(u\right)\right)\right\|_{W^{1,s}(\Omega),w_1} \le C\left(n,s,\alpha,\lambda,\Omega\right)\left\|u\right\|_{s,\Omega,w_2}, \tag{1}$$

其中 $T \circ H$ 为同仑算子 T 与投影算子 H 的复合算子，$w_1\left(x\right)=\dfrac{1}{d^{\alpha}\left(x,\partial\Omega\right)}$，$w_2\left(x\right)=\sum_i \chi_{Q_i}\dfrac{1}{\left|x-x_{Q_i}\right|^{\lambda}}$，常数 α,λ 满足 $0 \le \lambda < \alpha < \lambda + (n+1)s$，微分形式 u 满足非齐次 A-调和方程 $d^{\star}A(x,du)=B(x,du)$。

2014 年，文献[2]给出了复合算子 $M_s \circ P$ 的如下 Poincaré-型不等式

$$\left\| M_s \circ P(u) - \left(M_s \circ P(u)\right)_{\Omega}\right\|_{t,\Omega} \le C\left\|u\right\|_{t,\Omega}, \tag{2}$$

其中 M_s 为 Hardy-Littlewood 极大算子、P 为 potential 算子，Ω 为 R^n 上的一有界凸区域。

2020 年，文献[3]给出了如下作用于 Dirac-调和方程 $d^{*}A(x,Dw)=0$ 的光滑微分形式的迭代算子 D^kG^k 的局部 $A_r^{\lambda_3}(\lambda_1,\lambda_2;E)$-权 L^p-积分不等式。

$$\left(\int_B \left|D^kG^k\left(u\right)\right|^p w_1^{\alpha\lambda_1}\mathrm{d}x\right)^{1/p} \le C\left(\int_{\sigma B}\left|u\right|^p w_2^{\alpha\lambda_2\lambda_3}\mathrm{d}x\right)^{1/p}, \tag{3}$$

这里 D 是 Dirac 算子，$(w_1,w_2)\in A_r^{\lambda_3}(\lambda_1,\lambda_2;\Omega)$，$1<p<\infty$，$0<\alpha<1$，$\sigma>1$，$k\in N^{+}$。

显然，上述结果均是用微分形式的 L^p-范数去估计算子的 L^p-范数，如式(2)以微分形式的加权 L^p-范数 $\|u\|_p$ 去估计Potential算子P加权 L^p-范数 $\left\|M_s \circ P(u)\right\|_p$，若 $s>p$，则Potential算子P的 L^s-范数 $\left\|M_s \circ P(u)\right\|_s$ 就无法用式(2)中的微分形式的 L^p-范数 $\|u\|_p$ 来估计了，此时就需要讨论Potential算子 $M_s \circ P$ 是否具有比微分形式更高阶的范数。称算子范数高于微分形式范数的研究为算子的高阶范数研究。由于复合算子的范数估计远比单算子的范数估计复杂，故本文选择复合算子 $T \circ d \circ G$ 的高阶可积性作为研究内容，分别在 $1<q<n$ 与 $q \ge n$ 条件下证明了复合算子 $T \circ d \circ G$ 的局部高阶可积性。

2. 记号及预备知识

微分形式是 R^n 上可微函数的推广，称函数 $u=u\left(x_1,x_2,\cdots,x_n\right)$ 为微分 0-形式，称 $u(x)=\sum_I \alpha_I dx_I=\sum \alpha_{i_1i_2\cdots i_l}\left(x_1,x_2,\cdots,x_n\right)dx_{i_1}\wedge dx_{i_2}\wedge\cdots\wedge dx_{i_l}$ 是微分 l-形式，其中有序 l-丛 $I=\{i_1,i_2,\cdots,i_l\}$，$1\le i_1<i_2<\cdots<i_l\le n$，$l=1,2,\cdots,n$，关于的微分形式的相关结果可参见文献[4]-[10]。记 R^n ($n\ge 2$)是 n 维欧氏空间，Ω 是 R^n 上有界子集，其勒贝格测度记为$|\Omega|$。设 B 与 σB 是 R^n 中具有相同球心的球体，其直径满足 $diam(\sigma B)=\sigma diam(B)$。记 d 为外微分算子，$\wedge^l=\wedge^l\left(R^n\right)$ 表示由全体微分 l-形式所成的 l-维向量空间。设 $\varpi(x)=\alpha_{i_1i_2\cdots i_l}\left(x_1,x_2,\cdots,x_n\right)dx_{i_1}\wedge dx_{i_2}\wedge\cdots\wedge dx_{i_l}=\alpha_I dx_I$ 是一微分 l-形式，定义作用于 $\varpi(x)$ 上的 Hodge 星算子 $\star$ 为

$$\star\varpi=\star\alpha_{i_1i_2\cdots i_l}\left(x_1,x_2,\cdots,x_n\right)dx_{i_1}\wedge dx_{i_2}\wedge\cdots\wedge dx_{i_l}=(-1)^{\Sigma(I)}\alpha_I dx_J,$$

其中 $I=\{i_1,i_2,\cdots,i_l\}$， $J=\{1,2,\cdots,n\}-\{i_1,i_2,\cdots,i_l\}$， $\Sigma(I)=\frac{l(l+1)}{2}+\sum_{j=1}^{l}i_j$ 。利用外微分算子 d 和 Hodge 星算子 $\star$ 定义 Hodge 上的微分算子 $d^\star=(-1)^{nl+1}\star d\star$， $l=1,2,\cdots,n$ 。如在 $\wedge^1(R^n)$ 中，取微分形式

$$\omega=\omega(x)=\omega^1dx_1+\omega^2dx_2+\cdots+\omega^ndx_n,$$

则

$$\begin{aligned}
&\star\omega=\star\left(\omega^1dx_1+\omega^2dx_2+\cdots+\omega^ndx_n\right)\\
&=(-1)^{\frac{1\cdot(1+1)}{2}+1}\omega^1dx_2\wedge dx_3\wedge\cdots\wedge dx_n+(-1)^{\frac{1\cdot(1+1)}{2}+2}\omega^2dx_1\wedge dx_2\wedge\cdots\wedge dx_n+\cdots+(-1)^{\frac{1\cdot(1+1)}{2}+n}\omega^ndx_1\wedge dx_2\wedge\cdots\wedge dx_{n-1}\\
&=\omega^1dx_2\wedge dx_3\wedge\cdots\wedge dx_n-\omega^2dx_1\wedge dx_2\wedge\cdots\wedge dx_n+\cdots+(-1)^{n+1}\omega^ndx_1\wedge dx_2\wedge\cdots\wedge dx_{n-1}
\end{aligned}$$

且

$$\begin{aligned}
d^\star\omega&=(-1)^{nl+1}\star d\star\omega\\
&=(-1)^{n+1}\star d\left(\omega^1dx_2\wedge dx_3\wedge\cdots\wedge dx_n-\omega^2dx_1\wedge dx_2\wedge\cdots\wedge dx_n+\cdots+(-1)^{n+1}\omega^ndx_1\wedge dx_2\wedge\cdots\wedge dx_{n-1}\right)\\
&=(-1)^{n+1}\star\left(\omega^1_{x_1}dx_1\wedge dx_2\wedge dx_3\wedge\cdots\wedge dx_n+\omega^1_{x_2}dx_1\wedge dx_2\wedge dx_3\wedge\cdots\wedge dx_n+\cdots+\omega^1_{x_n}dx_1\wedge dx_2\wedge dx_3\wedge\cdots\wedge dx_n\right)\\
&=(-1)^{n+1}\star\left(\omega^1_{x_1}+\omega^1_{x_2}+\cdots+\omega^1_{x_n}\right)dx_1\wedge dx_2\wedge dx_3\wedge\cdots\wedge dx_n\\
&=(-1)^{n+1}\left(\omega^1_{x_1}+\omega^1_{x_2}+\cdots+\omega^1_{x_n}\right).
\end{aligned}$$

称下列非线性偏微分方程

$$d^\star A(x,du)=0 \tag{4}$$

为齐次 A-调和方程，其中算子 $A:\Omega\times\wedge^l\to\wedge^l$ 对几乎所有的 $x\in\Omega$， $\xi\in\wedge^l(R^n)$，满足

$$\left|A(x,\xi)\right|\le a|\xi|^{p-1},\ A(x,\xi)\cdot\xi\ge|\xi|^p,$$

上述 $a>0$ 为一常数且 $1<p<\infty$ 是与方程(4)有关的确定指数。定义同仑算子 $T:C^\infty(\Omega,\wedge^l)\to C^\infty(\Omega,\wedge^{l-1})$ 为

$$Tu=\int_\Omega\phi(y)K_ydy,$$

其中 $y\in\Omega$， $\phi\in C_0^\infty(\Omega)$ 满足 $\int_\Omega\phi(y)dy=1$，线性算子 $K_y:C^\infty(\Omega,\wedge^l)\to C^\infty(\Omega,\wedge^{l-1})$ 满足

$$K_y(u)(x;\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_{l-1})=\int_0^1t^{l-1}u(tx+y-ty;x-y,\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_{l-1}).$$

记 G 为定义在 $C^\infty(\Omega,\wedge^l)$ 上的 Green 算子，且满足 Poisson 方程 $\Delta G(u)=u-H(u)$，其中 H 为调和投影算子。更多关于 A-调和方程、同仑算子与 Green 算子的介绍及相关成果可参见文献[11]。

在本文相关结论的证明将应用到下述引理。

引理 1 [12]设 $u\in L^s_{loc}(B,\wedge^l)$ 是球体 B 上的一微分形式， $l=1,2,\cdots,n$， $1<s<\infty$， 则

$$\|\nabla(Tu)\|_{s,B}\le C|B|\|u\|_{s,B}, \tag{5}$$

$$\|Tu\|_{s,B}\le C|B|diam(B)\|u\|_{s,B}. \tag{6}$$

引理 2 [13]设 u 是 Ω 上一光滑微分形式，$1<s<\infty$，则对 Ω 上任一球体 B，存在一不依赖于 u 的常数

C，使得

$$\left\|dd^{\star}G(u)\right\|_{s,B}+\left\|d^{\star}dG(u)\right\|_{s,B}+\left\|d^{\star}G(u)\right\|_{s,B}+\left\|dG(u)\right\|_{s,B}+\left\|G(u)\right\|_{s,B}\le C(s)\|u\|_{s,B}.$$

引理 3 [12]设 $u\in D'\left(Q,\wedge^{l}\right)$， $du\in L^{p}\left(Q,\wedge^{l+1}\right)$，则 $u-u_{Q}\in L^{np/(n-p)}\left(Q,\wedge^{l}\right)$，且

$$\left(\int_{Q}\left|u-u_{Q}\right|^{np/(n-p)}dx\right)^{(n-p)/np}\le C_{p}(n)\left(\int_{Q}|du|^{p}dx\right)^{1/np}$$

其中 Q 为 R^{n} 上一球体， $l=0,1,2,\cdots,n-1$， $1<p<n$。

引理 4 [14]设 u 是 Ω 上满足 A-调和方程(4)的一微分形式，则对所有满足 $\sigma B\subset\Omega$ 的球体 B，存在一不依赖于 u 的常数 C，使得

$$\|u\|_{s,B}\le C|B|^{(t-s)/st}\|u\|_{t,\sigma B},$$

其中 $\sigma>1$， $0<s,t<\infty$。

引理 5 [15]设 Ω 为 R^{n} 上的一有界域， φ 是定义在 $[0,+\infty)$ 上的单调递增凸函数且满足 $\varphi(0)=0$。若微分形式 $u\in D'\left(\Omega,\wedge^{l}\right)$， $\mu\left(\left\{x\in\Omega:\left|u-u_{\Omega}\right|>0\right\}\right)>0$，则 $\varphi\left(k|u|+\left|u_{\Omega}\right|\right)\in L^{1}(\Omega;\mu)$，且对任一实数 $a>0$ 有

$$\int_{\Omega}\varphi(a|u|)d\mu\le C\int_{\Omega}\varphi\left(2a\left|u-u_{\Omega}\right|\right)d\mu$$

其中 $k>0$ 为任一实数， μ 为 Radon 测度， $d\mu=w(x)dx$，常数 $C>0$。

在引理 5 中，若令 Ω 为球体 B， $\varphi(t)=t^{p}$， $p>1$， $w(x)=1$，则 $\mu\left(\left\{x\in\Omega:\left|u-u_{\Omega}\right|>0\right\}\right)>0$ 演变为 $\left|\left\{x\in B:\left|u-u_{B}\right|>0\right\}\right|>0$，故而从任一满足 $\left|\left\{x\in B:\left|u-u_{B}\right|>0\right\}\right|>0$ 的球体 B 有

$$\|u\|_{p,B}\le C\left\|u-u_{B}\right\|_{p,B}. \tag{7}$$

3. 本文主要结论

本节将分别在 $1<q<n$ 和 $q\ge n$ 两种条件下证明有界域上作用于微分形式的复合算子 $T\circ d\circ G$ 的局部高阶可积性。

定理 1 设 $u\in C^{\infty}\left(\Omega,\wedge^{l}\right)$ 是满足 A-调和方程的微分形式， $l=1,2,\cdots,n$， $1<q<n$， T 为同伦算子，G 为 Green 算子。若 $u\in L_{loc}^{q}\left(\Omega,\wedge^{l}\right)$，则复合算子 $T\circ d\circ G(u)\in L_{loc}^{p}\left(\Omega,\wedge^{l}\right)$，且对所有满足 $\sigma B\subset\Omega$ 的球体 B，存在一不依赖于 u 的常数 C，有

$$\left(\frac{1}{|B|}\int_{B}\left|T\circ d\circ G(u)\right|^{p}dx\right)^{1/p}\le C|B|^{1/n}\left(\frac{1}{|B|}\int_{B}|u|^{q}dx\right)^{1/q},$$

其中 $0<p<nq/(n-q)$， $\sigma>1$ 为一特定的常数。

证明：(i) 若 $\left|\left\{x\in B:\left|T\circ d\circ G(u)-\left(T\circ d\circ G(u)\right)_{B}\right|>0\right\}\right|=0$，则在球体 B 上 $T\circ d\circ G(u)=\left(T\circ d\circ G(u)\right)_{B}$ 几乎处处成立，故 $T\circ d\circ G(u)$ 为一闭形式，从而 $T\circ d\circ G(u)$ 为 A-调和方程的解，从而由引理 4 可得

$$\left\|T\circ d\circ G(u)\right\|_{p,B}\le C|B|^{(q-p)/pq}\left\|T\circ d\circ G(u)\right\|_{q,\sigma B}, \tag{8}$$

其中 $\sigma B\subset\Omega$， $\sigma>1$ 为一特定常数。

综合式(8)式及引理 1 的(6)式、引理 2 知

$$\begin{aligned}\|T\circ d\circ G(u)\|_{p,B} &\le C_1|B|^{(q-p)/pq}\|T\circ d\circ G(u)\|_{q,\sigma B}\\ &\le C_2|B|^{(q-p)/pq}|B|diam(B)\|d\circ G(u)\|_{q,\sigma B}\\ &\le C_3|B|^{(q-p)/pq}|B|diam(B)\|u\|_{q,\sigma B}\\ &\le C_3|B|^{(q-p)/pq}|\Omega|diam(B)\|u\|_{q,\sigma B}\\ &= C_4|B|^{(q-p)/pq}|B|^{1/n}\|u\|_{q,\sigma B}\end{aligned} \tag{9}$$

其中 $C_4=C_3|\Omega|$。(9)式等价于

$$\left(\frac{1}{|B|}\int_B|T\circ d\circ G(u)|^p dx\right)^{1/p}\le C_4|B|^{1/n}\left(\frac{1}{|B|}\int_{\sigma B}|u|^q dx\right)^{1/q} \tag{10}$$

(ii) 若 $\left|\left\{x\in B:\left|T\circ d\circ G(u)-(T\circ d\circ G(u))_B\right|>0\right\}\right|>0$，则(7)式对 $T\circ d\circ G(u)$ 成立，即有

$$\|T\circ d\circ G(u)\|_{nq/(n-q),B}\le C_5\left\|T\circ d\circ G(u)-(T\circ d\circ G(u))_B\right\|_{nq/(n-q),B} \tag{11}$$

利用 L^p-空间的单调性及 $0<p<nq/(n-q)$，可得

$$\left(\frac{1}{|B|}\int_B|T\circ d\circ G(u)|^p dx\right)^{1/p}\le\left(\frac{1}{|B|}\int_B|T\circ d\circ G(u)|^{nq/(n-q)} dx\right)^{(n-q)/nq} \tag{12}$$

综合引理 3、引理 1 的(5)式、引理 2，可得

$$\begin{aligned}&\left(\int_B\left|T\circ d\circ G(u)-(T\circ d\circ G(u))_B\right|^{nq/(n-q)}dx\right)^{(n-q)/nq}\\ &\le C_6\left(\int_B|d\circ T\circ d\circ G(u)|^q dx\right)^{1/q}\\ &\le C_6\left(\int_B|\nabla\circ T\circ d\circ G(u)|^q dx\right)^{1/q}\\ &\le C_7\left(\int_B|d\circ G(u)|^q dx\right)^{1/q}\\ &\le C_8\left(\int_B|u|^q dx\right)^{1/q}\end{aligned} \tag{13}$$

综合式(11) (12) (13)，便有

$$\begin{aligned}&\left(\frac{1}{|B|}\int_B|T\circ d\circ G(u)|^p dx\right)^{1/p}\\ &\le\left(\frac{1}{|B|}\int_B|T\circ d\circ G(u)|^{nq/(n-q)}dx\right)^{(n-q)/nq}\\ &\le C_5\left(\frac{1}{|B|}\int_B\left|T\circ d\circ G(u)-(T\circ d\circ G(u))_B\right|^{nq/(n-q)}dx\right)^{(n-q)/nq}\\ &= C_5|B|^{\frac{1}{n}-\frac{1}{q}}\left(\int_B\left|T\circ d\circ G(u)-(T\circ d\circ G(u))_B\right|^{nq/(n-q)}dx\right)^{(n-q)/nq}\\ &\le C_9|B|^{\frac{1}{n}-\frac{1}{q}}\left(\int_B|u|^q dx\right)^{1/q}\\ &= C_9|B|^{\frac{1}{n}}\left(\frac{1}{|B|}\int_B|u|^q dx\right)^{1/q}\end{aligned} \tag{14}$$

综合式(10) (14)可得：若 $u \in L_{loc}^{q}\left(\Omega, \wedge^{l}\right)$ 是 A-调和方程(4)的解，则 $T \circ d \circ G(u) \in L_{loc}^{p}\left(\Omega, \wedge^{l}\right)$，且

$$\left(\frac{1}{|B|}\int_{B}|T \circ d \circ G(u)|^{p} dx\right)^{1/p} \leq C|B|^{\frac{1}{n}}\left(\frac{1}{|B|}\int_{B}|u|^{q} dx\right)^{1/q}.$$

故定理 1 证毕。

在定理 1 中，当 $q \to n^{-}$ 时，$\frac{nq}{n-q} \to +\infty$，此时 p 可以充分大，故 p 可大于 q，此时称定理 1 为复合算子 $T \circ d \circ G$ 在 $1<q<n$ 条件下的高阶可积性，下面证明在 $q \geq n$ 条件下定理仍然成立。

定理 2 设 $u \in C^{\infty}\left(\Omega, \wedge^{l}\right)$ 是满足 A-调和方程(4)的微分形式，$l=1,2,\cdots,n$，$q \geq n$，T 为同仑算子，G 为 Green 算子。若 $u \in L_{loc}^{q}\left(\Omega, \wedge^{l}\right)$，则复合算子 $T \circ d \circ G(u) \in L_{loc}^{p}\left(\Omega, \wedge^{l}\right)$，且对所有满足 $\sigma B \subset \Omega$ 的球体 B，存在一不依赖于 u 的常数 C，有

$$\left(\frac{1}{|B|}\int_{B}|T \circ d \circ G(u)|^{p} dx\right)^{1/p} \leq C|B|^{1/n}\left(\frac{1}{|B|}\int_{B}|u|^{q} dx\right)^{1/q},$$

其中 $p>0$，$\sigma>1$ 为一特定的常数。

证明：(i) 若 $\left|\left\{x \in B:\left|T \circ d \circ G(u)-(T \circ d \circ G(u))_{B}\right|>0\right\}\right|=0$，则使用定理 1 证明(i)中同样的方法可证定理仍然成立。

(ii) 若 $\left|\left\{x \in B:\left|T \circ d \circ G(u)-(T \circ d \circ G(u))_{B}\right|>0\right\}\right|>0$，取 $s=\max\{1, p/q\}$，$t=snq/(n+sq)$，由于 $n-q \leq 0$，则 $t-q=\frac{q(s(n-q)-n)}{n+sq}<0$，故有 $t<q$ 且 $1<t<n$。

先后利用引理 3、引理 1 的(5)式、引理 2，得

$$\begin{aligned}
&\left(\int_{B}\left|T \circ d \circ G(u)-(T \circ d \circ G(u))_{B}\right|^{nt/(n-t)} dx\right)^{(n-t)/nt} \\
&\leq C_{1}\left(\int_{B}|d \circ T \circ d \circ G(u)|^{t} dx\right)^{1/t} \\
&\leq C_{1}\left(\int_{B}|\nabla \circ T \circ d \circ G(u)|^{t} dx\right)^{1/t} \\
&\leq C_{2}|B|\left(\int_{B}|d \circ G(u)|^{t} dx\right)^{1/t} \\
&\leq C_{3}|B|\left(\int_{B}|u|^{t} dx\right)^{1/t} \\
&\leq C_{3}|\Omega|\left(\int_{B}|u|^{t} dx\right)^{1/t} \\
&= C_{4}\left(\int_{B}|u|^{t} dx\right)^{1/t}
\end{aligned} \tag{15}$$

其中 $C_{4}=C_{3}|\Omega|$。利用 L^{p}-空间的单调性及 $t<q$，可得

$$\left(\frac{1}{|B|}\int_{B}|u|^{t} dx\right)^{1/t} \leq \left(\frac{1}{|B|}\int_{B}|u|^{q} dx\right)^{1/q} \tag{16}$$

式(16)等价于

$$\left(\int_B |u|^t \, dx\right)^{1/t} \le |B|^{1/t-1/q} \left(\int_B |u|^q \, dx\right)^{1/q} \tag{17}$$

综合式(15) (17)，有

$$\left(\int_B \left|T \circ d \circ G(u) - \left(T \circ d \circ G(u)\right)_B\right|^{nt/(n-t)} dx\right)^{(n-t)/nt} \le C_4 |B|^{1/t-1/q} \left(\int_B |u|^q \, dx\right)^{1/q}. \tag{18}$$

由于 $\left|\left\{x \in B : \left|T \circ d \circ G(u) - \left(T \circ d \circ G(u)\right)_B\right| > 0\right\}\right| > 0$，故(7)式对 $T \circ d \circ G(u)$ 成立，于是应用(7)式可得

$$\left(\int_B \left|T \circ d \circ G(u)\right|^{nt/(n-t)} dx\right)^{(n-t)/nt} \le C\left(\int_B \left|T \circ d \circ G(u) - \left(T \circ d \circ G(u)\right)_B\right|^{nt/(n-t)} dx\right)^{(n-t)/nt}. \tag{19}$$

经计算可得 $\dfrac{nt}{n-t} = sq \ge p$，$\dfrac{1}{t} - \dfrac{n-t}{nt} = \dfrac{1}{n}$，综合利用 L^p -空间的单调性及式(18) (19)，可得

$$\begin{aligned}
&\left(\int_B \left|T \circ d \circ G(u)\right|^p dx\right)^{1/p} \\
&\le C_6 |B|^{1/p-(n-t)/nt} \left(\int_B \left|T \circ d \circ G(u)\right|^{nt/(n-t)} dx\right)^{(n-t)/nt} \\
&\le C_7 |B|^{1/p-(n-t)/nt} \left(\int_B \left|T \circ d \circ G(u) - \left(T \circ d \circ G(u)\right)_B\right|^{nt/(n-t)} dx\right)^{(n-t)/nt} \\
&\le C_8 |B|^{1/p-(n-t)/nt+1/t-1/q} \left(\int_B |u|^q \, dx\right)^{1/q} \\
&= C_8 |B|^{1/n+1/p-1/q} \left(\int_B |u|^q \, dx\right)^{1/q}
\end{aligned} \tag{20}$$

式(20)等价于

$$\left(\frac{1}{|B|}\int_B \left|T \circ d \circ G(u)\right|^p dx\right)^{1/p} \le C_8 |B|^{1/n} \left(\frac{1}{|B|}\int_B |u|^q \, dx\right)^{1/q}. \tag{21}$$

式(21)表明：当 $\left|\left\{x \in B : \left|T \circ d \circ G(u) - \left(T \circ d \circ G(u)\right)_B\right| > 0\right\}\right| > 0$ 时，定理 2 成立。

综合(i) (ii)可得定理 2 成立，故定理证毕。

4. 总结

本文证明了 $1 < q < n$ 和 $q \ge n$ 两种条件下有界域上作用于微分形式的复合算子 $T \circ d \circ G$ 的局部高阶可积性。今后，我们可在基础上进一步研究有界域上相关算子的全局高阶可积性。

基金项目

2021 年度江西省教育厅科学技术研究项目“关于调和方程解的高阶可积性理论研究”(编号：GJJ213509)。

参考文献

[1] Ding, S.S. and Liu, B. (2009) Global Estimates for Singular Integrals of the Composite Operator. *Illinois Journal of Mathematics*, **53**, 1173-1185. https://doi.org/10.1215/ijm/1290435345

[2] Li, X.X., Wang, Y. and Xing, Y.M. (2014) Norm Comparison Estimates for the Composite Operator. *Journal of Function Spaces*, **2014**, Article ID: 943986. https://doi.org/10.1155/2014/943986

[3] 李群芳, 李华灿. 关于迭代算子 D^kG^k 的局部与全局的 L^p -加权积分不等式[J]. 井冈山大学学报(自然科学版), 2020, 41(6): 1-5.

[4] Ding, S.S., Shi, G.N. and Sylvester, D. (2022) Higher Order Embeddings for the Composition of the Harmonic Projection and Homotopy Operators. *High-Dimensional Optimization and Probability*, **191**, 165-183. https://doi.org/10.1007/978-3-031-00832-0_4

[5] 李华灿, 李群芳. 关于 Radon 测度的积分不等式[J]. 数学杂志, 2019, 39(6): 899-906.

[6] 李群芳, 李华灿. 有界域上局部与全局的 Radon 测度的积分不等式[J]. 数学的实践与认识, 2021, 51(5): 196-202.

[7] Xing, Y.M. (2003) Weighted Integral Inequalities for Solutions of the *A*-Harmonic Equation. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **279**, 350-363. https://doi.org/10.1016/S0022-247X(03)00036-2

[8] Li, X.X., Wang, J.W. and Pan, N. (2023) Inequalities for Integral Operators in Hölder-Morrey Spaces on Differential Forms. *Journal of Inequalities and Applications*, **2023**, Article No. 71. https://doi.org/10.1186/s13660-023-02977-3

[9] Li, H.C. and Li Q.F. (2020) Some Higher Norm Inequalities for Composition of Power Operators. *Journal of Inequalities and Applications*, **2020**, Article No. 106. https://doi.org/10.1186/s13660-020-02372-2

[10] 蔡士瑛. 拟微分算子在 Besov 空间上的有界性[J]. 应用数学进展, 2023, 12(3): 837-846.

[11] Agarwal, R.P., Ding, S.S. and Nolder, C.A. (2009) Inequalities for Differential Forms. Springer, New York. https://doi.org/10.1007/978-0-387-68417-8

[12] Iwaniec, T. and Lutoborski, A. (1993) Integral Estimates for Null Lagrangians. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, **125**, 25-79. https://doi.org/10.1007/BF00411477

[13] Scott, C. (1995) L^p Theory of Differential Forms on Manifolds. *Transactions of the American Mathematical Society*, **347**, 2075-2096. https://doi.org/10.2307/2154923

[14] Nolder, C.A. (1999) Hardy-Littlewood Theorems for *A*-Harmonic Tensors. *Illinois Journal of Mathematics*, **43**, 613-632. https://doi.org/10.1215/ijm/1256060682

[15] Xing, Y.M. and Ding, S.S. (2009) Norm Comparison Inequalities for the Composite Operator. *Journal of Inequalities and Applications*, **2009**, Article ID: 212915. https://doi.org/10.1155/2009/212915