

关于循环图 $C(10,3)$ 的交叉点

高琳

辽宁师范大学数学学院, 辽宁 大连

收稿日期: 2023年11月25日; 录用日期: 2023年12月19日; 发布日期: 2023年12月29日

摘要

众所周知, 确定循环图交叉数的精确值是非常困难的。即便如此, 在这一领域的一些重要结果仍然得到了证明。 $C(10,3)$ 作为 $C(3m+1,3)$ ($m \geq 3$)这一类循环图的证明基础, 本文证明了在 $C(10,3)$ 的最优画法中, 主圈上的边最多自交1次。

关键词

交叉数, 循环图, 好画法, 去边数

On the Crossing Points of Circulant Graphs $C(10,3)$

Lin Gao

School of Mathematics, Liaoning Normal University, Dalian Liaoning

Received: Nov. 25th, 2023; accepted: Dec. 19th, 2023; published: Dec. 29th, 2023

Abstract

It is well known that determining the exact values of crossing number for circulant graphs is very difficult. Even so, some important results in this field are still proved. $C(10,3)$ as the basis for the proof of $C(3m+1,3)$ ($m \geq 3$), in this paper, we prove that the edges from the principal circle of $C(10,3)$ cross each other at most once in an optimal drawing.

Keywords

Crossing Number, Circulant Graph, Good Drawing, Removal Number



1. 引言

本文中所有的图都是简单图。术语和符号可以在[1] [2]中找到。在这里我们重复一些定义。循环图 $G = C(n; S)$ 是顶点集 $V(C(n; S)) = \{v_i | 0 \leq i \leq n-1\}$, 边集

$E(C(n; S)) = \{v_s v_t | 0 \leq s \leq n-1, 0 \leq t \leq n-1, (s-t) \bmod n \in S\}$, $S = \{1, 2, \dots, \lfloor n/2 \rfloor\}$ 的图。当 $S = \{1, k\}$ 时, 对于某些整数 k , 则 $C(n; S)$ 将被简化为 $C(n, k)$ 。对于 $C(n, 3)$, 环 $C_n = v_0, v_1, \dots, v_{n-1}, v_n, v_0$ 称为主圈。显然大多数类型的循环图都是非平面的。

图的一个画法是平面中的一种表示, 使得其顶点由不同的点表示, 其边由连接相应点对的简单连续弧表示。如果一个画法满足以下条件, 它就是好的画法: (i) 没有边与自己相交; (ii) 两条边交叉不超过一次; (iii) 三条或三条以上的边不能交叉于一点; (iv) 没有边与顶点相交。一个交叉是两条边的共同的内部点。 G 的交叉数, 写为 $cr(G)$, 是平面上 G 的所有好画法中交叉的最小值。图 G 的最优画法是交叉数等于 $cr(G)$ 的一个好的画法。在一个好画法 D 中, 如果一条边没有被任何其他边交叉, 则称它在画法 D 中是干净的。否则, 称它在画法 D 中被交叉。

Jordan 曲线定理: 任意一条简单(自身不相交)闭曲线 J 把平面分成两个区域, 在不同区域的两点若要相连, 则连结的弧必与 J 相交。

显然, 当且仅当 $cr(G) = 0$ 时, G 是平面的。因此, 交叉数被认为是图的一个重要拓扑测度。对于一个图来说, 计算交叉数是 NP 完全的[3]。因此, 只有对于非常有限的循环图类, 交叉数的精确值才是已知的。据我们所知, Hao 等人[4]的这篇文章是我们可以找到的关于这个主题的早期结果。然后 H. Ren 等人确定了一些 $C(m, 3)$ 的交叉数[5] [6]。同时, 验证了当 $m > 3$ 时, $C(3m, m)$ 的交叉数的精确值为 m [7]。2007 年, 这一结果被扩展到 $C(3m+1, m)$ [8]。结果表明, 当 $m > 3$ 时, $cr(C(3m+1, m)) = m+1$ 。尽管这些确切的数字得到了证实, 但这些交叉点是由哪些边相交得到的仍然未知。在本文中, 我们证明出在 $C(10, 3)$ 的最优画法中, 其主圈上的边最多自交 1 次。事实上, 对广义 Petersen 图和笛卡尔图的类似研究工作也出现在许多论文中。感兴趣的读者可以参考[9] [10] [11] [12]了解更多详细信息。

2. 基础引理和主要结果

在这一部分中, 我们首先定义证明过程中需要用到的概念及符号, 其次列出几个关于 $C(10, 3)$ 的引理和本文的目标定理。

$C(10, 3)$ 的主圈是环 $v_0 v_1 \dots v_9 v_0$, 为了便于叙述, 用 H_0 表示主圈 $v_0 v_1 \dots v_9 v_0$; 边 $v_s v_t$ 称为弦, 其中 $s+3 = t \pmod{10}, s = 0, 1, \dots, 9$ 。为了讨论方便我们用 B_s 表示弦 $v_s v_t$ 其中 $s+3 = t \pmod{10}, s = 0, 1, \dots, 9$ 。例如 $B_0 = v_0 v_3$, $B_1 = v_1 v_4$ 。 $B_{s,t} = B_s \cup B_{s+1} \cup B_{s+2} \cup \dots \cup B_t$ 。同时我们可以给 $C(10, 3)$ 上色。具体地, 主圈 H_0 中的边被分配蓝色, 用 b 表示; 弦被指定为红色, 用 r 表示。按照定义, 主圈自交 n 次可以叙述为有 n 个 b - b 交点, 类似地, n 条弦交主圈可以描述为有 n 个 r - b 交点, 因为一条边只有一个交点。图 G 的去边数是非负整数, 记作 $h(G)$, 如果从图 G 中最少删去 h 条边就能得到图 G 的平面子图, 那么 $h(G) = h$ 。

引理 1 ([7]) 对于循环图 $C(10, 3)$, $cr(C(10, 3)) = 4$ 且 $h(C(10, 3)) \geq 4$ 。

由引理 1 容易得到下面的引理。

引理 2 令 D 是 $C(10,3)$ 的一个最优画法, 那么没有边被交 2 次。

证明: 根据去边数的定义可知 $cr(C(10,3)) \geq h(C(10,3))$, 又由引理 1 可得到 $4 \geq h(C(10,3)) \geq 4$ 。因此, $h(C(10,3)) = 4$ 。假设存在一条边可以被交两次, 那么删除 3 条边就能得到平面图, 与 $h(C(10,3)) = 4$ 矛盾, 所以一条边不能被交 2 次。

引理 3 (I13) 如果主圈上的边自交产生 n 个交点, 那么这 n 个交点将主圈分成 $n+1$ 个部分。

将 n 个交点连成一条线(直线或曲线), 这条线将 $S_i (i=1,2,\dots,n+1)$ 分割成上下两侧。如图 1 所示, 是主圈自交产生 n 个交点时, 主圈的 $n+1$ 个部分。

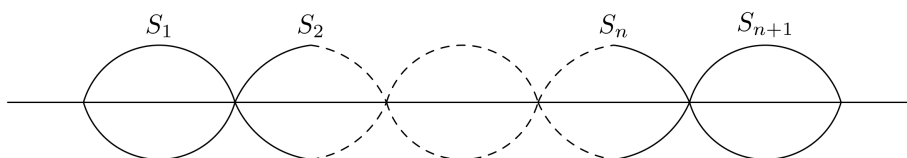


Figure 1. Good drawings of H_0 with n crossing points
图 1. 有 n 个交叉点的 H_0 的好的画法

引理 4 (I13) 在所有的 S_i 中, 两端的 S_i 上至少有一个顶点, 内部 S_i 上下两侧, 每侧至少有一个顶点。

定理 5 在 $C(10,3)$ 的最优画法中主圈最多可以自交 1 次。

3. 定理 5 的证明

证明: 用反证法。因为 $cr(C(10,3)) = 4$, 我们要证主圈最多自交一次, 所以需要分 3 种情形讨论即分别讨论 $C(10,3)$ 的最优画法有 4, 3, 2 个 b-b 交点时是否与 $cr(C(10,3)) = 4$ 矛盾。

设 D 是 $C(10,3)$ 的最优画法, 当 D 有 4 个 b-b 交点时, 由引理 3 和引理 4 可知 S_1 和 S_5 上至少有 1 个顶点, S_2, S_3, S_4 的两侧, 每侧至少有 1 个顶点, 因此我们能够确定 8 个顶点的位置, 还有 2 个顶点的位置没确定。定义这两不确定位置的顶点为剩余点, 用 N 表示剩余点的数量。当 D 有 4 个 b-b 交点时, $N = 2$ 。如果两个剩余点都在某个 S_i 上, 记作 $N_i = 2$, 类似地, 如果 S_i 上有 1 个剩余点, 记作 $N_i = 1$ 。现在我们讨论 $N = 2$ 时, 这两个剩余点的位置。因为主圈自交时, 主圈的最优画法具有对称性, 当 $C(10,3)$ 有 4 个 b-b 交点时, S_1 和 S_5 是对称的, 所以我们只需讨论在其中一个 $S_i (i=1,5)$ 上的情形即可。类似地, $S_i (i=2,3,4)$ 的两侧也是对称的。因为图 $C(10,3)$ 是自同构的, 任意的顶点 $v_i (i=0,1,\dots,9)$ 都可能在 S_1 上, 所以不失一般性设 v_0 在 S_1 上。下面我们将分成 3 个情形讨论。

3.1. $C(10,3)$ 有 4 个 b-b 交点

由引理 3 可知, 将 H_0 分成 5 个部分即 $S_i (i=1,2,3,4,5)$ 。由引理 4 可知 $N = 2$, 可分成 2 个剩余点在一个 S_i 上还是在两个 S_i 上共两种情况进行讨论。

3.1.1. 两个剩余点在同个 $S_i (i=1,2,3,4,5)$ 上

情形 1 两点在 S_1 或 S_5 上

不失一般性设两点在 S_1 上。因为 4 个交点已出现, 所以 B_1 是干净的, $H_0 \cup B_1$ 与图 2 同构, 有 B_2 交 $H_0 \cup B_1$, 产生 5 个交点, 与 $cr(C(10,3)) = 4$ 矛盾。

情形 2 两点在 S_2 或 S_4 上

不失一般性设两点在 S_2 上。分成 S_2 两侧剩余点数之比为 0:2 和 1:1 两种情形讨论。显然 B_1 是干净的, 当 S_2 两侧剩余点数之比为 0:2 时, $H_0 \cup B_1$ 与图 3 同构, 有 B_6 交 $H_0 \cup B_1$, 产生 5 个交点, 与

$cr(C(10,3))=4$ 矛盾。当 S_2 两侧剩余点数之比为 1:1 时, $H_0 \cup B_1$ 与图 4 同构, 有 B_2 交 $H_0 \cup B_1$, 产生 5 个交点, 矛盾。

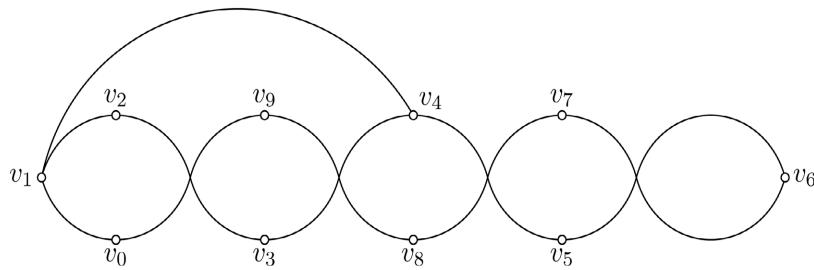


Figure 2. Good drawings of $H_0 \cup B_1$

图 2. $H_0 \cup B_1$ 的好的画法

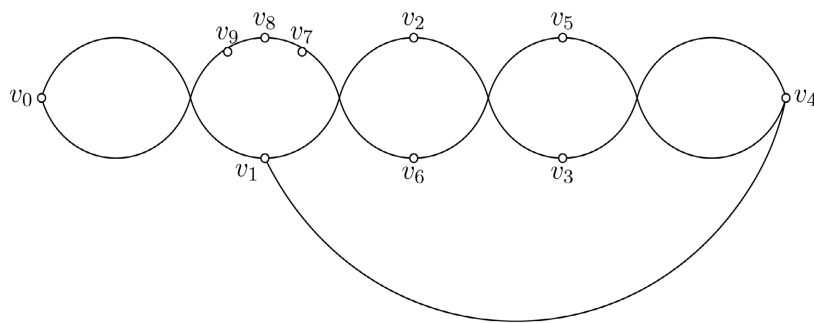


Figure 3. Good drawings of $H_0 \cup B_1$

图 3. $H_0 \cup B_1$ 的好的画法

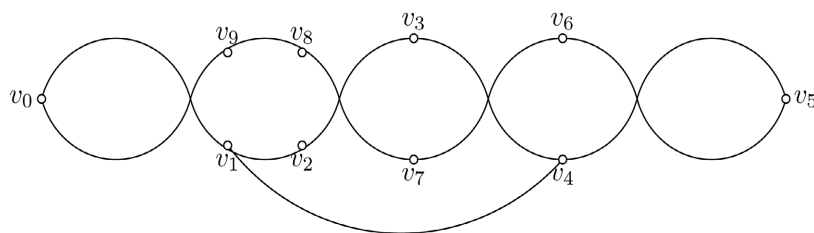


Figure 4. Good drawings of $H_0 \cup B_1$

图 4. $H_0 \cup B_1$ 的好的画法

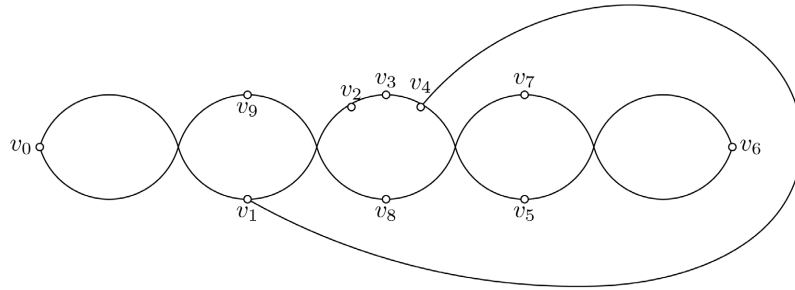
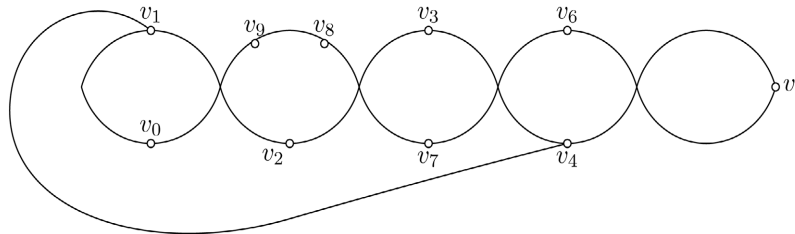
情形 3 两点在 S_3 上

分成 S_3 两侧剩余点数之比为 0:2 和 1:1 两种情形讨论。显然 B_1 是干净的, 当 S_2 两侧剩余点数之比为 0:2 时, $H_0 \cup B_1$ 与图 5 同构, 有 B_6 交 $H_0 \cup B_1$, 产生 5 个交点, 矛盾。

S_2 两侧剩余点数量之比为 1:1 的情形也可用类似方法得到矛盾。

3.1.2. 两个剩余点在 2 个 $S_i (i=1, 2, 3, 4, 5)$ 上

按照两点分别在 S_1 和 S_2 , S_1 和 S_3 , S_1 和 S_4 , S_1 和 S_5 , S_2 和 S_3 , S_2 和 S_4 共 6 种情形讨论。注意当两点分别在 S_2 和 S_3 时, 又有两点在 S_2 和 S_3 的同侧和异侧两种子情形, 在 S_2 和 S_4 这种情形也是如此。我们这里只讨论两点分别在 S_1 和 S_2 上时, 因为 4 个交点已出现, 所以 B_1 是干净的, $H_0 \cup B_1$ 与图 6 同构。有 B_2 交 $H_0 \cup B_1$, 产生 5 个交点, 矛盾。剩余 5 种情形可以用类似方法证明。

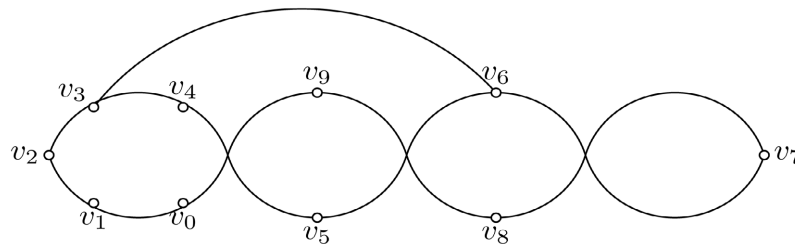
Figure 5. Good drawings of $H_0 \cup B_1$ 图 5. $H_0 \cup B_1$ 的好的画法Figure 6. Good drawings of $H_0 \cup B_1$ 图 6. $H_0 \cup B_1$ 的好的画法

3.2. $C(10,3)$ 有 3 个 b-b 交点

由引理 4 可知 $N = 4$ ，这 4 个剩余点可能分布在一个，两个，三个或四个 S_i 上。证明方法和思路类似，我们这里只讨论 4 个剩余点在同一个 $S_i (i = 1, 2, 3, 4)$ 上。

3.2.1. 4 个剩余点在 S_1 或 S_4 上

不失一般性，假设 4 个点在 S_1 上。如果没有 r-b 交点， $H_0 \cup B_3$ 与图 7 同构，有 B_4 和 B_9 交 B_3 ，与引理 2 矛盾。所以 $\{B_3, B_4, B_9\}$ 中有且只有一条边上存在 r-b 交点。4 个交点已出现，所以 B_7 是干净的，有 B_2 交 $H_0 \cup B_7$ ，产生 5 个交点，矛盾。

Figure 7. Good drawings of $H_0 \cup B_7$ 图 7. $H_0 \cup B_7$ 的好的画法

3.2.2. 4 个剩余点在 S_2 或 S_3 上

不失一般性，设在 4 个点在 S_2 上。 S_2 两侧剩余点数之比可能为 0:4，1:3 或 2:2。当 S_2 两侧剩余点数之比为 0:4 时，如果没有 r-b 交点， $H_0 \cup B_9$ 与图 8 同构，有 B_4 和 B_3 交 B_9 ，与引理 2 矛盾。所以 $\{B_3, B_4, B_9\}$ 中有且只有一条边上存在 r-b 交点。4 个交点已出现，所以 B_0 是干净的，有 B_8 交 $H_0 \cup B_0$ ，产生 5 个交点，矛盾。当 S_2 两侧剩余点数之比 1:3 时，如果没有 r-b 交点， $H_0 \cup B_7$ 与图 9 同构，有 S_2 和 B_3 交

B_7 , 与引理 2 矛盾。所以 $\{B_3, B_2, B_7\}$ 中有且只有一条边上存在 r-b 交点。4 个交点已出现, 所以 B_6 和 B_9 干净, $H_0 \cup B_6 \cup B_9$ 与图 10 同构, 有 B_8 交 $H_0 \cup B_6 \cup B_9$, 产生 5 个交点, 矛盾。可用类似方法证明剩余情况。

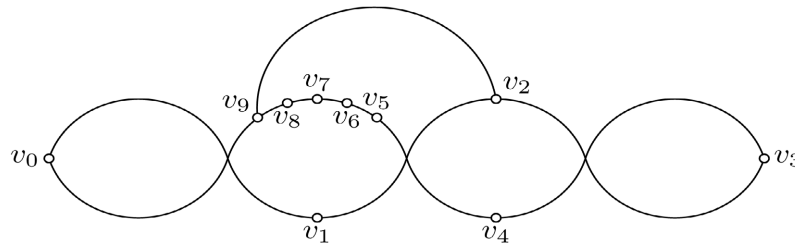


Figure 8. Good drawings of $H_0 \cup B_9$

图 8. $H_0 \cup B_9$ 的好的画法

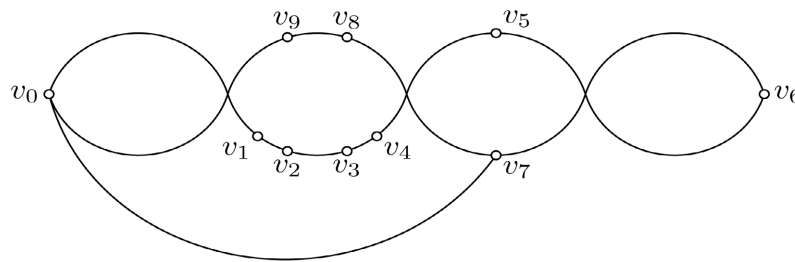


Figure 9. Good drawings of $H_0 \cup B_7$

图 9. $H_0 \cup B_7$ 的好的画法

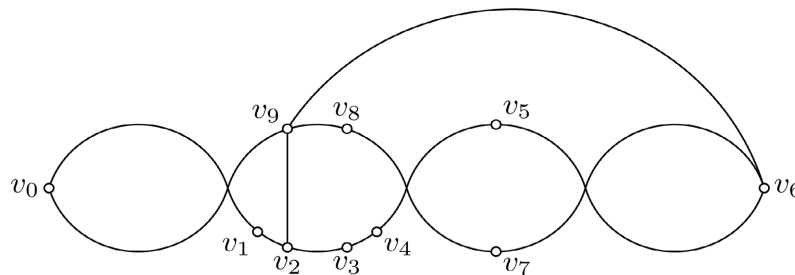


Figure 10. Good drawings of $H_0 \cup B_6 \cup B_9$

图 10. $H_0 \cup B_6 \cup B_9$ 的好的画法

3.3. $C(10,3)$ 有 2 个 b-b 交点

由引理 3 可知 $C(10,3)$ 分成 3 个部分, S_1, S_2, S_3 。由引理 4 可知 $N=6$, 下面讨论这 6 个剩余点的位置。这 6 个点可能在一个, 两个或三个 $S_i (i=1,2,3)$ 上。这里只讨论 6 个点在 1 个 S_i 上, 其他情况可以用类似方法证明, 这里就不一一列举。

3.3.1. 6 个剩余点在 S_1 或 S_3 上

不失一般性, 设这 6 个点在 S_1 上。 H_0 与图 11 同构。如果不存在 r-b 交点, 有 B_4 和 B_5 交 B_9 , 与引理 2 矛盾, 所以 $\{B_4, B_5, B_9\}$ 中至少有一条边上有 r-b 交点。如果 B_9 没有 r-b 交点, 那么 B_4 和 B_5 交 $H_0 \cup B_9$, 4 个交点已出现, 所以 B_2 和 B_3 是干净的, v_4 在环 $v_2v_3v_6v_3v_2$ 所围成的区域之中, B_1 交 $H_0 \cup B_{2,3}$, 出现 5 个交叉点, 矛盾。所以 B_9 有 r-b 交点。如果 $\{B_4, B_5\}$ 中存在一条边上有 r-b 交点, 那么 4 个交点已出现,

B_2 和 B_3 是干净的, v_4 在环 $v_2v_3v_6v_3v_2$ 所围成的区域之中, 有 B_1 交 $H_0 \cup B_{2,3}$, 出现 5 个交叉点, 矛盾。所以 B_4 和 B_5 没有 r-b 交点。 $H_0 \cup B_{4,5}$ 与图 12 同构。有 B_8 交 $H_0 \cup B_{4,5}$, 4 个交点已出现, 所以 B_2 干净, 有 B_3 交 $H_0 \cup B_{4,5} \cup B_2$, 产生 5 个交点, 矛盾。

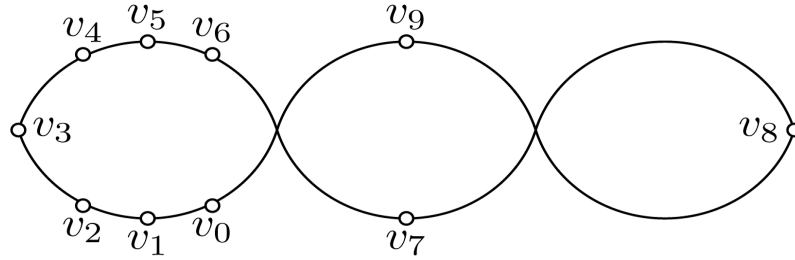


Figure 11. Good drawings of H_0
图 11. H_0 的好的画法

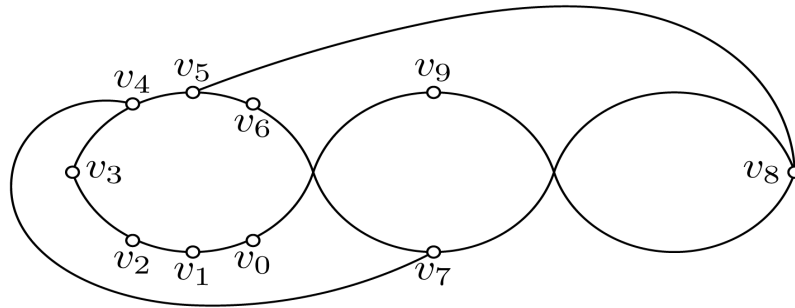


Figure 12. Good drawings of $H_0 \cup B_{4,5}$
图 12. $H_0 \cup B_{4,5}$ 的好的画法

3.3.2. 6 个剩余点都在 S_2 上

情形 1 S_2 两侧剩余点数量之比为 0:6

假设没有 r-b 交点, 有 B_0 和 B_7 交 B_9 , 与引理 2 矛盾, 所以 $\{B_0, B_7, B_9\}$ 中至少有 1 条边上有 r-b 交点。显然 B_9 上一定有 r-b 交点, 否则 B_0 和 B_7 交 $H_0 \cup B_9$, 4 个交点已出现, 所以 B_2 和 B_3 干净, $H_0 \cup B_{2,3}$ 与图 13 同构, 有 B_1 交 $H_0 \cup B_{2,3}$, 产生 5 个交点, 矛盾。如果 $\{B_0, B_7\}$ 中存在一条边上有 r-b 交点, 那么 4 个交点已出现, 所以 B_2 、 B_3 干净, 有 B_1 交 $H_0 \cup B_{2,3}$, 产生 5 个交叉点, 矛盾。所以 B_0 和 B_7 干净, $H_0 \cup B_7 \cup B_0$ 与图 14 同构。有 B_2 交 $H_0 \cup B_7 \cup B_0$, 4 个交点已出现, 所以 B_6 干净, 有 B_8 交 $H_0 \cup B_0 \cup B_{6,7}$ 。产生 5 个交点, 矛盾。

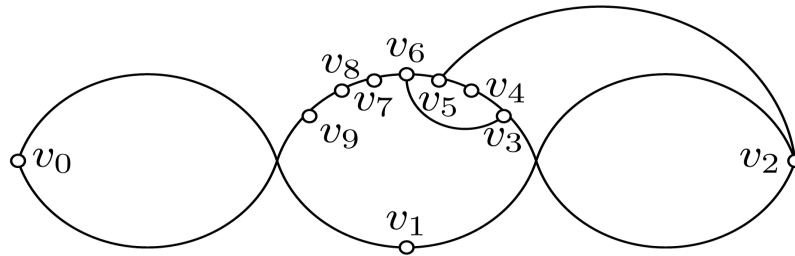


Figure 13. Good drawings of $H_0 \cup B_{2,3}$
图 13. $H_0 \cup B_{2,3}$ 的好的画法

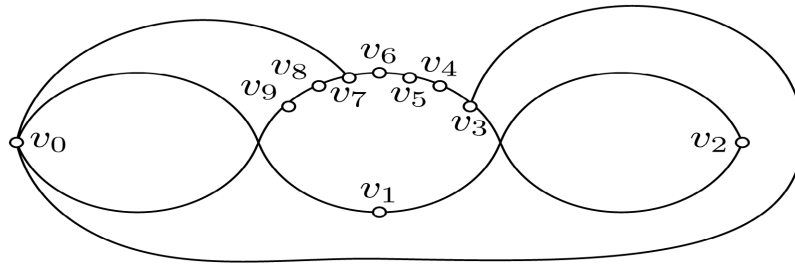


Figure 14. Good drawings of $H_0 \cup B_7 \cup B_0$
 图 14. $H_0 \cup B_7 \cup B_0$ 的好的画法

情形 2 S_2 两侧剩余点数量之比为 1:5

假设没有 r-b 交点, 那么 $H_0 \cup B_7 \cup B_0 \cup B_3$ 与图 15 同构。如果 B_1 上有 r-r 交点, 那么 B_1 交 B_0 和 B_3 , 与引理 2 矛盾, 所以 B_1 上没有 r-r 交点, $H_0 \cup B_7 \cup B_{0,1} \cup B_3$ 与图 16 同构, 有 B_2 交 B_1 且 B_9 交 B_0 , 4 个交点已出现, 所以 B_6 干净。有 B_8 交 B_6 , 产生 5 个交点, 矛盾。所以 $\{B_3, B_7, B_0, B_1, B_2, B_9, B_8, B_6\}$ 中至少有一条边有 r-b 交点。如果 $\{B_3, B_0, B_1, B_2, B_9\}$ 中存在 2 条边上同时有 r-b 交点, 那么 B_7 和 B_8 干净, 如图 17 所示, B_6 交 $H_0 \cup B_{7,8}$, 产生 5 个交点, 矛盾。所以当 $\{B_3, B_0, B_1, B_2, B_9\}$ 中存在一条边上有 r-b 交点时, 另外 4 条边上不能有 r-b 交点。

如果 $\{B_0, B_1, B_9\}$ 中的一条边有 r-b 交点, 那么 B_3 和 B_2 上都不能有 r-b 交点, 如果 B_2 交 B_3 , 那么 4 个交点已出现, B_7 和 B_8 干净, $H_0 \cup B_{7,8}$ 与图 17 同构, 有 B_6 交 $H_0 \cup B_{7,8}$, 产生 5 个交点, 矛盾, 所以 B_2 与 $H_0 \cup B_3$ 不交。 $H_0 \cup B_{2,3}$ 与图 18 同构, 有 B_4 交 $H_0 \cup B_{2,3}$, 4 个交点已出现, 所以 B_7 和 B_8 干净, 有 B_6 交 $H_0 \cup B_{7,8} \cup B_{2,3}$, 产生 5 个交点, 矛盾。所以 B_0, B_1 和 B_9 上都没有 r-b 交点, 进而 $H_0 \cup B_0$ 与图 19 同构。

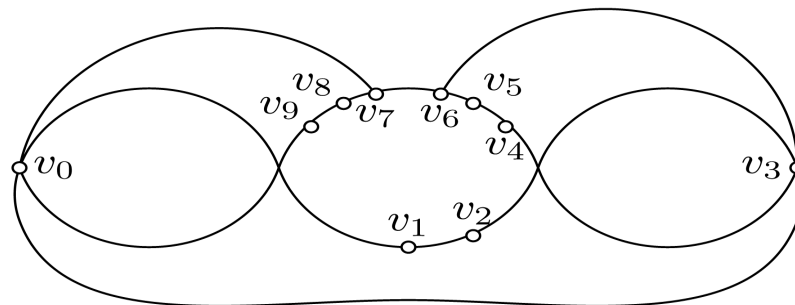


Figure 15. Good drawings of $H_0 \cup B_7 \cup B_0 \cup B_3$
 图 15. $H_0 \cup B_7 \cup B_0 \cup B_3$ 的好的画法

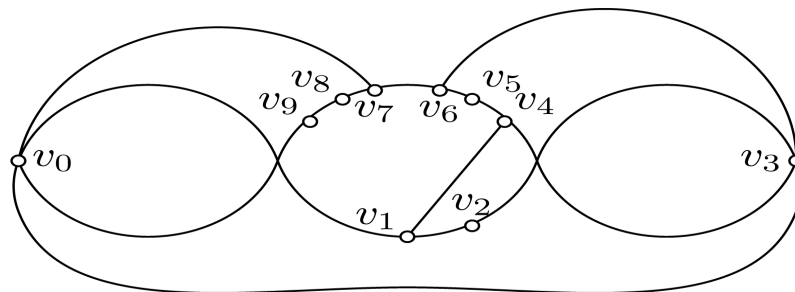


Figure 16. Good drawings of $H_0 \cup B_7 \cup B_{0,1} \cup B_3$
 图 16. $H_0 \cup B_7 \cup B_{0,1} \cup B_3$ 的好的画法

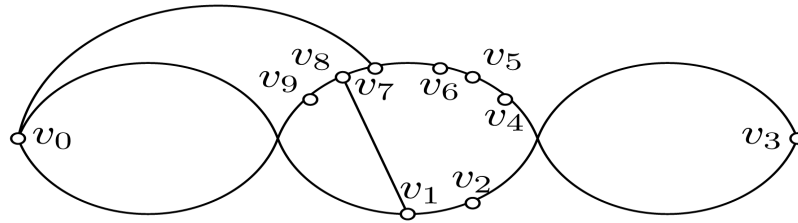


Figure 17. Good drawings of $H_0 \cup B_{7,8}$

图 17. $H_0 \cup B_{7,8}$ 的好的画法

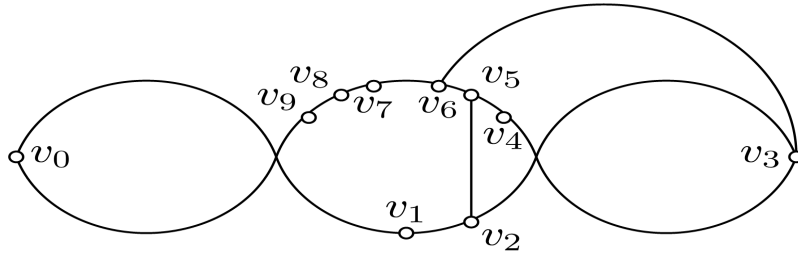


Figure 18. Good drawings of $H_0 \cup B_{2,3}$

图 18. $H_0 \cup B_{2,3}$ 的好的画法

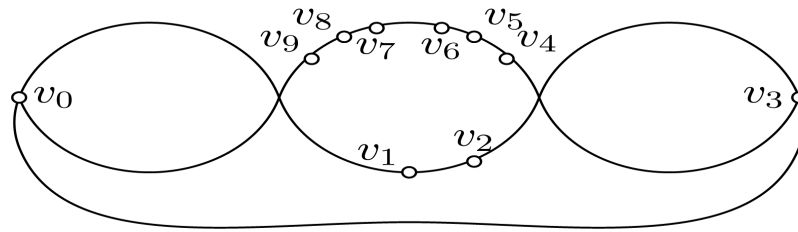


Figure 19. Good drawings of $H_0 \cup B_0$

图 19. $H_0 \cup B_0$ 的好的画法

由引理 2 可知, $\{B_1, B_9\}$ 中最多有一条边交 B_0 。如果 B_1 交 B_0 , 那么 B_9 与 $H_0 \cup B_{0,1}$ 不交, 有 B_3 和 B_8 交 $H_0 \cup B_{0,1} \cup B_9$, 产生 5 个交点, 矛盾。所以 B_1 与 $H_0 \cup B_0$ 不交。 $H_0 \cup B_{0,1}$ 与图 20 同构, 有 B_2 和 B_9 交 $H_0 \cup B_{0,1}$, 4 个交点已出现, 所以 B_7 和 B_8 干净, 有 B_6 交 $H_0 \cup B_{7,8} \cup B_{0,1}$, 产生 5 个交点, 矛盾。

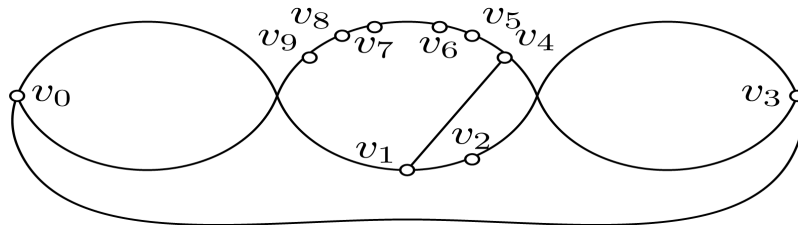


Figure 20. Good drawings of $H_0 \cup B_{0,1}$

图 20. $H_0 \cup B_{0,1}$ 的好的画法

情形 3 S_2 两侧剩余点数量之比为 2:4

假设无 r-b 交点, 那么 $H_0 \cup B_0 \cup B_7 \cup B_4$ 与图 21 同构, 因为 B_1 交 B_0 和引理 2, 所以 B_0 不能再被交叉, 因此 B_8 是干净的, 如图 22 中所示。有 B_6 和 B_9 交 $H_0 \cup B_0 \cup B_{7,8} \cup B_4$, 产生 5 个交点, 矛盾。所以

$\{B_0, B_7, B_4, B_1, B_8\}$ 中至少有一条边上有 r-b 交点。如果 $\{B_7, B_4, B_8\}$ 中存在两条边上同时有 r-b 交点, 4 个交点已出现, 那么 B_0 干净, 有 B_1 交 $H_0 \cup B_0$, 产生 5 个交叉点, 矛盾。因此, 如果 $\{B_7, B_4, B_8\}$ 中任意一条边上有 r-b 交点, 那么另外两条边上一定没有 r-b 交点。

如果 B_7 有 r-b 交点, 那么 B_4 无 r-b 交点, $H_0 \cup B_4$ 与图 23 同构。如果 B_2 交 $H_0 \cup B_4$, 那么 4 个交点已出现, B_0 干净, 有 B_1 交 $H_0 \cup B_0 \cup B_4$, 产生 5 个交叉点, 矛盾。所以 B_2 与 $H_0 \cap B_4$ 不交。 $H_0 \cup B_4 \cup B_2$ 与图 24 同构。有 B_3 交 $H_0 \cup B_2 \cup B_4$, 4 个交点已出现, 所以 B_0 干净, 有 B_1 交 $H_0 \cup B_0 \cup B_4$, 产生 5 个交叉点, 矛盾。因此 B_7 没有 r-b 交点。根据对称性可知, B_4 也没有 r-b 交点。

假设 B_8 存在 r-b 交点, 如果 B_3 有 r-b 交点, 那么 4 个交点已出现, B_0 干净, 有 B_1 交 $H_0 \cup B_0$, 产生 5 个交叉点, 矛盾。所以 B_3 与 $H_0 \cup B_7 \cup B_4$ 不交, $H_0 \cup B_7 \cup B_{3,4}$ 与图 25 同构。有 B_2 交 $H_0 \cup B_7 \cup B_{3,4}$, 4 个交点已出现, 所以 B_0 干净, 有 B_1 交 $H_0 \cup B_7 \cup B_{3,4} \cup B_0$, 产生 5 个交叉点, 矛盾。因此 B_8 没有 r-b 交点。所以 $\{B_0, B_1\}$ 中至少有一条边上有 r-b 交点。如果 B_0 和 B_1 都有 r-b 交点, 那么 4 个交点已出现, B_3 干净, $H_0 \cup B_7 \cup B_{3,4}$ 与图 25 同构, 有 B_2 交 $H_0 \cup B_7 \cup B_{3,4}$, 产生 5 个交叉点, 矛盾。所以 $\{B_0, B_1\}$ 中有且只有一条边上有 r-b 交点。

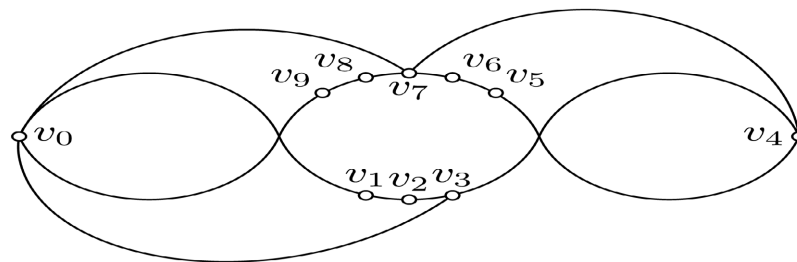


Figure 21. Good drawings of $H_0 \cup B_0 \cup B_7 \cup B_4$

图 21. $H_0 \cup B_0 \cup B_7 \cup B_4$ 的好的画法

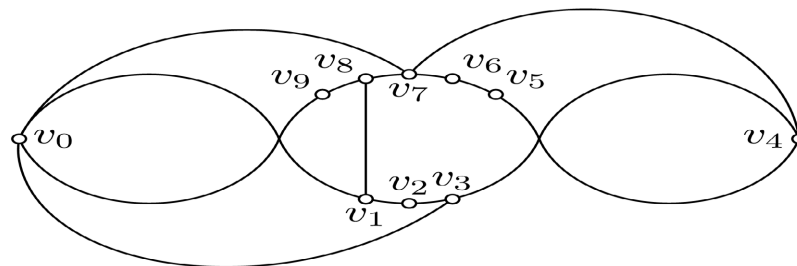


Figure 22. Good drawings of $H_0 \cup B_0 \cup B_{7,8} \cup B_4$

图 22. $H_0 \cup B_0 \cup B_{7,8} \cup B_4$ 的好的画法

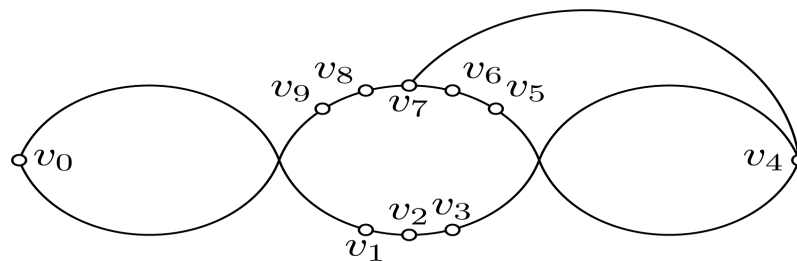


Figure 23. Good drawings of $H_0 \cup B_4$

图 23. $H_0 \cup B_4$ 的好的画法

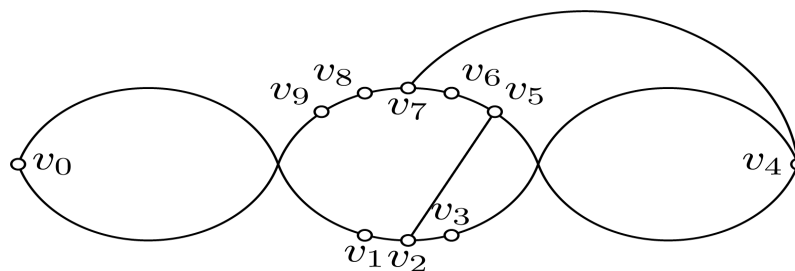


Figure 24. Good drawings of $H_0 \cup B_4 \cup B_2$

图 24. $H_0 \cup B_4 \cup B_2$ 的好的画法

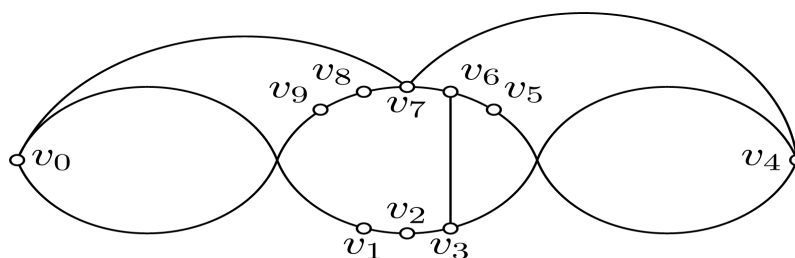


Figure 25. Good drawings of $H_0 \cup B_7 \cup B_{3,4}$

图 25. $H_0 \cup B_7 \cup B_{3,4}$ 的好的画法

因为 B_0 和 B_1 对称, 不失一般性, 假设 B_1 有 r-b 交点, 那么 B_0 没有, $H_0 \cup B_7 \cup B_4 \cup B_0$ 与图 26 同构。显然 B_3 与 $H_0 \cup B_7 \cup B_4 \cup B_0$ 不交, 否则 4 个交点已出现, B_8 干净, 有 B_9 交 B_8 , 产生 5 个交点, 矛盾。因此, 有 B_2 交 $H_0 \cup B_7 \cup B_{3,4} \cup B_0$, 产生 5 个交点, 矛盾。所以, B_1 没有 r-b 交点。又根据对称性, B_0 也没有 r-b 交点, 与 $\{B_0, B_1\}$ 中有且只有一条边有 r-b 交点矛盾。

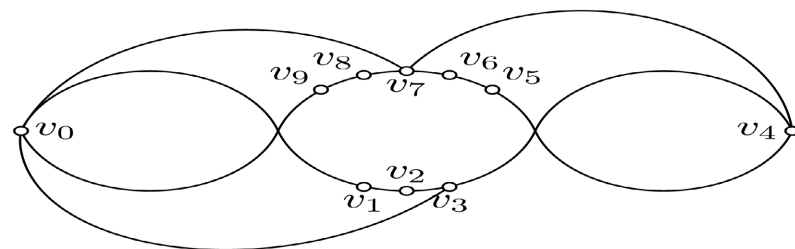


Figure 26. Good drawings of $H_0 \cup B_7 \cup B_4 \cup B_0$

图 26. $H_0 \cup B_7 \cup B_4 \cup B_0$ 的好的画法

情形 4 S_2 两侧剩余点数量之比为 3:3

如果没有 r-b 交点, $H_0 \cup B_7 \cup B_0$ 与图 27 同构。有 B_7 交 B_5 , B_0 交 B_2 , 4 个交点已经出现。所以 B_6 干净, 有 B_8 交 B_6 , 产生 5 个交点, 矛盾。因此 $\{B_7, B_0\}$ 中至少存在一条边上有 r-b 交点。

如果 B_7 和 B_0 上都存在 r-b 交点, 4 个交点已出现, 所以 B_2 , B_5 和 B_3 干净, $H_0 \cup B_{2,3} \cup B_5$ 与图 28 同构。有 B_1 交 $H_0 \cup B_{2,3} \cup B_5$, 产生 5 个交点, 矛盾。所以 $\{B_7, B_0\}$ 中有且只有一条边上存在 r-b 交点。

如果 B_7 上有 r-b 交点, 那么 B_0 上不存在 r-b 交点。 $H_0 \cup B_0$ 与图 29 同构, 有 B_2 交 $H_0 \cup B_0$, 4 个交点已经出现, 所以 B_1 是干净的。此时, B_2 交 $H_0 \cup B_{0,1}$, 产生 5 个交叉点, 矛盾。因此, B_7 上没有 r-b 交点。又由对称性可知, B_0 上也没有 r-b 交点, 与 $\{B_7, B_0\}$ 中有且只有一条边上存在 r-b 交点矛盾。

综上所述, 3.3 证明完毕。

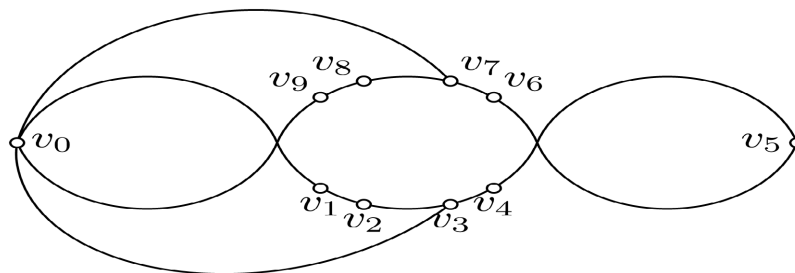


Figure 27. Good drawings of $H_0 \cup B_7 \cup B_0$

图 27. $H_0 \cup B_7 \cup B_0$ 的好的画法

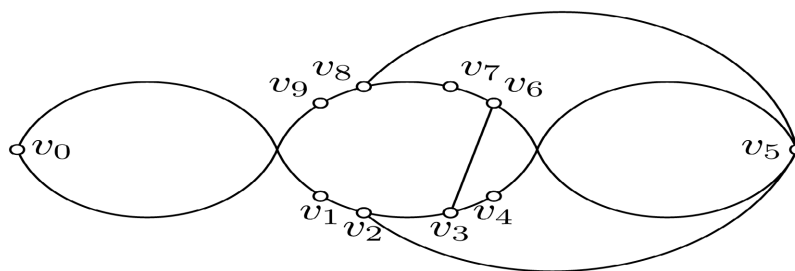


Figure 28. Good drawings of $H_0 \cup B_{2,3} \cup B_5$

图 28. $H_0 \cup B_{2,3} \cup B_5$ 的好的画法

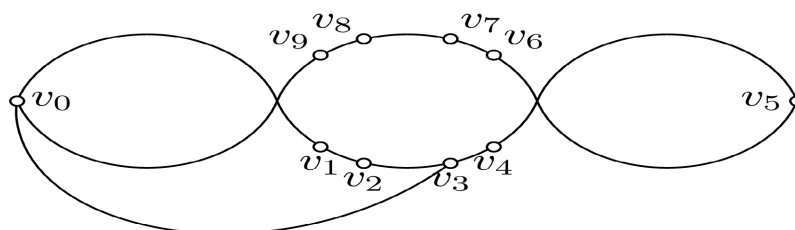


Figure 29. Good drawings of $H_0 \cup B_0$

图 29. $H_0 \cup B_0$ 的好的画法

3.4. $C(10,3)$ 有 1 个 b-b 交点

$C(10,3)$ 有 1 个 b-b 交点的最优画法如图 30 所示。

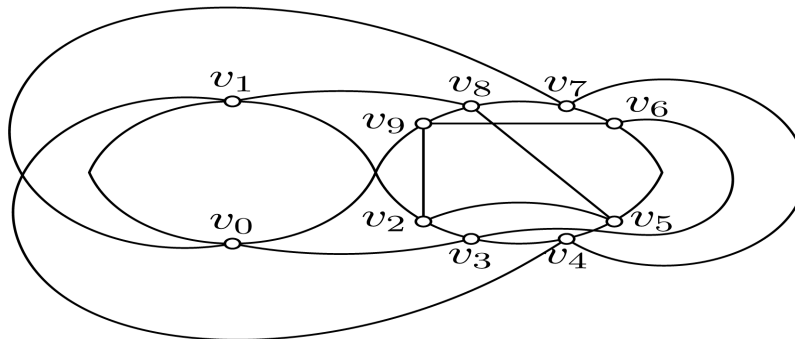


Figure 30. Good drawings of $C(10,3)$ with a b-b crossing point

图 30. 有 1 个 b-b 交点的 $C(10,3)$ 好的画法

4. 结论

对于循环图 $C(10,3)$ 交叉点的性质, 本文证明当 $C(10,3)$ 的主圈分别自交 4 次, 3 次, 2 次时, $C(10,3)$ 的最优画法中的交叉数都与 $cr(C(10,3)) = 4$ 矛盾。因为 $C(10,3)$ 的交叉数是 4, 所以其主圈最多自交 4 次, 进而得到结论 $C(10,3)$ 的最优画法中主圈最多自交 1 次。

参考文献

- [1] Bondy, J.A. and Murty, U.S.R. (1976) Graph Theory with Applications. Macmillan Ltd. Press, New York.
- [2] Mohar, B. and Thomassen, C. (2001) Graphs on Surfaces. Johns Hopkins University Press, Baltimore. <https://doi.org/10.56021/9780801866890>
- [3] Garey, M.R. and Johnson, D.S. (1983) Crossing Number Is NP-Complete. *SIAM Journal on Algebraic Discrete Methods*, **4**, 312-316. <https://doi.org/10.1137/0604033>
- [4] Hao, R.X. and Liu, Y.P. (1999) New Upper Bounds on Crossing Number of Circular Graph. *OR Transactions*, **3**, 1-6.
- [5] Lu, J.J., Ren, H. and Ma, D.J. (2004) On the Crossing Number of $C(m, 3)$. *Journal of Systems Science and Mathematical Sciences*, **24**, 504-512.
- [6] Lu, J.J., Wu, Y.R. and Ren, H. (2005) Crossing Number of Certain Circular Graphs. *Journal of East China Normal University*, 16-22.
- [7] Lin, X.H., Yang, Y.S., Lv, J.G. and Hao, X. (2005) The Crossing Number of $C(mk; \{1, k\})$. *Graphs and Combinatorics*, **21**, 89-96. <https://doi.org/10.1007/s00373-004-0597-5>
- [8] Ho, P.T. (2007) The Crossing Number of the Circular Graph $C(3k + 1; \{1, k\})$. *Discrete Mathematics*, **307**, 2771-2774. <https://doi.org/10.1016/j.disc.2007.02.001>
- [9] McQuillan, D. and Richter, R.B. (1992) On the Crossing Numbers of Certain Generalized Petersen Graphs. *Discrete Mathematics*, **104**, 311-320. [https://doi.org/10.1016/0012-365X\(92\)90453-M](https://doi.org/10.1016/0012-365X(92)90453-M)
- [10] Richter, R.B. and Salazar, G. (2002) The Crossing Number of $P(N, 3)$. *Graphs and Combinatorics*, **18**, 381-394. <https://doi.org/10.1007/s003730200028>
- [11] Székely, L.A. (2004) A Successful Concept for Measuring Non-Planarity of Graphs: The Crossing Number. *Discrete Mathematics*, **276**, 331-352. [https://doi.org/10.1016/S0012-365X\(03\)00317-0](https://doi.org/10.1016/S0012-365X(03)00317-0)
- [12] Salazar, G. (2005) On the Crossing Numbers of Loop Networks and Generalized Petersen Graphs. *Discrete Mathematics*, **302**, 243-253. <https://doi.org/10.1016/j.disc.2004.07.036>
- [13] Lu, W., Li, F., Ren, H., et al. (2023) On the Crossing Points of Circulant Graphs $C(9, 3)$. *International Journal of Mathematics and Systems Science*, **6**, 206-211.