Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, 2023, 12(4), 1382-1390
Published Online April 2023 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2023.124141

具有无限马尔可夫切换的离散时间随机系统的最大值解、最小半正定解与稳定解的研究

赵红霞，何　鑫，贾亚琪，张春梅，叶志勇

重庆理工大学理学院，重庆

收稿日期：2023年3月5日；录用日期：2023年3月29日；发布日期：2023年4月10日

摘　要

本文主要研究具有无限马尔可夫切换的离散时间随机系统的最值解与稳定解。在研究具有有限马尔可夫切换的离散时间随机系统的最值解与稳定解的基础上推广到无限马尔可夫，为研究系统稳定性奠定了良好的理论基础。文章首先介绍了稳定解，最大值解与半正定最小值解的概念，并利用算子理论和随机分析等方法得出系统随机稳定能够等价于相应的正算子序列是稳定的；其次，在系统所对应的Riccati方程解集非空的前提下，若Riccati方程有稳定解，则必定存在最大值解；再次，添加系统随机可探测条件，系统能够存在最小半正定解，若考虑存在唯一稳定解，则系统的最大值解等于系统的稳定解也等于系统的最小半正定解；最后，用数值举例来验证定理的正确性和有效性。

关键词

无限马尔可夫切换，最小半正定解，最大值解，稳定解，随机可探测性

The Maximal, Minimal Positive Semidefinite and Stabilizing Solutions for Discrete-Time Stochastic Systems with Infinite Markov Switching

Hongxia Zhao, Xin He, Yaqi Jia, Chunmei Zhang, Zhiyong Ye

College of Science, Chongqing University of Technology, Chongqing

Received: Mar. 5th, 2023; accepted: Mar. 29th, 2023; published: Apr. 10th, 2023

文章引用: 赵红霞, 何鑫, 贾亚琪, 张春梅, 叶志勇. 具有无限马尔可夫切换的离散时间随机系统的最大值解、最小半正定解与稳定解的研究[J]. 应用数学进展, 2023, 12(4): 1382-1390. DOI: 10.12677/aam.2023.124141

Abstract

In this paper, we study the maximal, minimal positive semidefinite and stabilizing solutions of discrete-time stochastic systems with infinite Markov switching. On the basis of studying the optimal solution and stable solution of discrete time stochastic system with finite Markov switching, it is extended to infinite Markov, which lays a good theoretical foundation for the study of system stability. Firstly, the concepts of stabilizing solution, maximal solution and minimal positive semidefinite solution are introduced. By using operator theory and stochastic analysis methods, it is shown that the stochastic stability of the system is equivalent to that the corresponding sequence of positive operators is stable. Secondly, on the premise that the solution set of the corresponding Riccati equation is non-empty, if there is a stabilizing solution to the Riccati equation, there must be a maximal solution. Thirdly, under the condition that the system is stochastic detectability, the minimal positive semidefinite solution can exist. If the unique stable solution is considered, the maximal solution of the system is equal to the stabilizing solution and the minimal positive semidefinite solution. Finally, an example is given to verify its correctness and validity.

Keywords

Infinite Markov Switching, The Minimal Positive Semidefinite Solution, Maximal Solution, Stabilizing Solution, Stochastic Detectability

1. 引言

离散时间 Markov 跳变线性系统在通信工程、机器人技术等领域应用广泛[1] [2]。1960 年，Kalnan [3]在控制理论中基于可控制性与可观测性研究，发现矩阵 Riccati 方程存在全局解。1969 年，Sworde D D [4]将随机最大值原理引入到具有 Markov 跳变参数混合系统的最优控制问题中，为研究具有 Markov 跳变参数混合系统的最大值解的相关问题奠定了基础。文献[5]首次研究了 Markov 跳变线性系统的线性二次调节器(linear quadratic regulator, LQR)问题，也就是使得二次耗散函数最小化的最优控制问题，将具有无限马尔可夫切换的离散时间随机系统解的问题转化为相应的 Riccati 方程解的问题。1969 年到 1980 年期间，2014 年 Meng Q [6]和 Mahmoud M S [7]等人在对有限时间 LQR 问题进行研究时应用了较为有名的最大值原理。2012 年 Ungureanu 与 Dragan [8]在研究 Markov 跳变线性系统时介绍了具有无限离散时间 Markov 切换线性系统的可观测与随机可探测的相关概念以及该系统相关的稳定性研究，为本文的写作奠定了坚实的理论基础。文献[9] [10] [11]中，Damm 在相关随机控制中通过对偶方程给出了离散时间 Riccati 方程的一些相关性质。随后，Wonham [12] [13]将这一结果推广到随机控制框架中，并且引入了随机控制的 Riccati 方程，使得具有无限马尔可夫切换的离散时间随机系统的解的相关研究转化为对应的广义 Riccati 方程解的研究。文献[14]考虑了一类定义在序 Hilbert 空间上的离散时间正向线性方程与后向线性方程，提供了所考虑方程具有特殊解的充要条件，涉及到该方程的最大值解，稳定解与最小半正定解。文献[15]研究具有无限马尔可夫切换的离散时间随机系统的稳定解最大值解与最小值解的相关问题，本文就是在文献[15]的相关研究中又进行更深层次的研究，使得系统的稳定解、最大值解与最小

半正定解之间建立联系，使得系统的最大值解与最小半正定解更加逼近系统的稳定解，为研究系统的稳定性开辟了新的方向。

文献[16]系统的研究了具有有限马尔可夫切换的离散时间随机系统的稳定解等相关问题，使得稳定性的研究成为当下研究的热点问题。本文正是在文献[16]的启发下进行具有无限马尔可夫切换的离散时间随机系统的稳定解等问题的研究。文献[17] [18]研究了 Riccati 方程的半正定解。本文也在文献[17] [18]的基础上引入了系统的随机可检测性，基于系统的随机可检测性条件，能够使得系统的半正定解为该系统的一个稳定解。文献[19] [20] [21] [22] [23] [24]中 V. Dragan 和 T. Morozan 在研究中强调随机线性系统解的唯一性，在相关条件的限制下使得系统具有唯一稳定解；在添加系统随机可检测性条件下，离散时间随机线性微分方程最多只有一个半正定解。

本文主要分为五个部分，第一部分时引言部分，主要介绍了相关的研究成果与研究现状；第二部分为符号说明部分，对文章中应用到的符号进行说明，使得读者更加容易理解文章中的理论部分；第三部分为系统描述部分，对文章中所要研究的系统进行详细的描述，并且介绍相关的概念与定义；第四部分为主要结果部分，定理 1 与定理 2 进行了详细的证明过程，定理 1 应用 Lyapunov 算子将系统(1)是随机稳定与线性正算子序列 $\{\Pi(t)\}_{t\in\Im}$ 的稳定联系起来，为定理 2 的成立奠定了基础。定理 2 进行简单的计算可以得出若集合 Γ^{Σ} 是非空的，则若 Riccati 方程有稳定解，则必定存在最大值解。以上定理的成立使得引理 2 的结论成立。第五部分为数值举例，通过数值举例来验证结果的正确性。

2. 符号说明

$R^{m\times n}$ 代表所有 $m\times n$ 阶实矩阵空间，且该空间的内积定义如下：

$$\langle A,B\rangle = Tr\left[B^{\mathrm{T}}A\right]$$

对于任意的 $A,B\in R^{m\times n}$，$Tr\left[M\right]$ 代表矩阵 M 的迹；$S_n^{\infty}=S_n\oplus S_n\oplus\cdots\oplus S_n\oplus\cdots$；对于一个固定的整数 $N\geq 1$，$M_{nm}^{\infty}=R^{m\times n}\oplus R^{m\times n}\oplus\cdots\oplus R^{m\times n}\oplus\cdots$。因此若 $B\in M_{nm}^{\infty}$，则当且仅当 $B=\left(B(1),B(2),\cdots,B(N),\cdots\right)$，其中 $B(i)\in R^{m\times n}$，$i\in\left(1,2,\cdots,N,\cdots\right)$。当 $m=n$ 时，一般用 M_n^{∞} 来代替 M_{nn}^{∞}。显然 $S_n^{\infty}\subset M_n^{\infty}$。$M_{nn}^{\infty}$ 是一个 Hilbert 空间，且该 Hilbert 空间上的内积满足：

$$\langle X,Y\rangle=\sum_{I=1}^{\infty}Tr\left[Y^{\mathrm{T}}(i)X(i)\right]$$

对于所有 $X=\left(X(1),X(2),\cdots,X(N),\cdots\right)$，$Y=\left(Y(1),Y(2),\cdots,Y(N),\cdots\right)$，其中 $X(i)\in R^{m\times n}$，$Y(i)\in R^{m\times n}$，$X\in M_n^{\infty}$，$Y\in M_n^{\infty}$；若 $C=\left(C(1),C(2),\cdots,C(N),\cdots\right)\in M_{nm}^{\infty}$，则 $C^{\mathrm{T}}\in M_{mn}^{\infty}$，且 $\left(C(i)\right)^{\mathrm{T}}=C^{\mathrm{T}}(i)$，所以 $C^{\mathrm{T}}=\left(C^{\mathrm{T}}(1),C^{\mathrm{T}}(2),\cdots,C^{\mathrm{T}}(N),\cdots\right)$，$\mathfrak{V}\left(S_n^{\infty},S_{n+m}^{\infty}\right)$ 定义一个线性算子集 $\Pi:S_n^{\infty}\to S_{n+m}^{\infty}$；$\ell^{\infty}\left(\Im,S_n^{\infty}\right)$ 代表有界序列 $X=\left\{X(t)\right\}_{t\in\Im}\subset S_n^{\infty}$。

3. 系统描述

考虑系统：

$$x(t+1)=\left[A_0(t,\eta_t)+\sum_{k=1}^{r}A_k(t,\eta_t)\omega_k(t)\right]x(t)+\left[B_0(t,\eta_t)+\sum_{k=1}^{r}B_k(t,\eta_t)\omega_k(t)\right]u(t) \quad (1)$$

$$y(t)=C(t,\eta_t)x(t)+D(t,\eta_t)u(t)$$

上述具有马尔可夫切换的离散时间线性系统相关的耦合离散时间 Riccati 方程如：

$$
\begin{aligned}
X(t,i) &= \sum_{k=0}^{r}\sum_{j=1}^{N} p_t(i,j) A_k^{\mathrm{T}}(t,\eta_t) X(t+1,j) A_k(t,\eta_t) + C^{\mathrm{T}}(t,\eta_t) C(t,\eta_t) \\
&\quad -\left(\sum_{k=0}^{r}\sum_{j=1}^{N} p_t(i,j) A_k^{\mathrm{T}}(t,\eta_t) X(t+1,j) B_k(t,\eta_t) + C^{\mathrm{T}}(t,\eta_t) D(t,\eta_t)\right) \\
&\quad \times\left(\sum_{k=0}^{r}\sum_{j=1}^{N} p_t(i,j) B_k^{\mathrm{T}}(t,\eta_t) X(t+1,j) B_k(t,\eta_t) + D^{\mathrm{T}}(t,\eta_t) D(t,\eta_t)\right)^{-1} \\
&\quad \times\left(\sum_{k=0}^{r}\sum_{j=1}^{N} p_t(i,j) A_k^{\mathrm{T}}(t,\eta_t) X(t+1,j) B_k(t,\eta_t) + C^{\mathrm{T}}(t,\eta_t) D(t,\eta_t)\right)^{\mathrm{T}}
\end{aligned} \tag{2}
$$

定义 1 [17]耦合离散时间 Riccati 方程(2)与系统(1)所描述的优化问题有关，对应的二次耗散函数为：

$$
J(t_0,x_0,u) = \sum_{t=0}^{\infty} E\left[\begin{pmatrix} x_u^{\mathrm{T}}(t) & u^{\mathrm{T}}(t)\end{pmatrix}\begin{pmatrix} M(t,\eta_t) & L(t,\eta_t) \\ L^{\mathrm{T}}(t,\eta_t) & R(t,\eta_t)\end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_u(t) \\ u(u)\end{pmatrix}\right] \tag{3}
$$

定义一个线性算子：$X \to \Xi(t,X): S_n^{\infty} \to S_n^{\infty}$，其中：

$$
\Xi_i(t,X) \in S_n^{\infty} \quad \Xi(t,X) = \left(\Xi_1(t,X),\Xi_2(t,X),\cdots,\Xi_N(t,X),\cdots\right),
$$

$$
\Xi_i(t,X) = \sum_{j=1}^{N} p_t(i,j) X(j) \tag{4}
$$

显然，对于任意 t，$\Xi(t,\cdot)$ 是 S_n^{∞} 上正的线性算子。

取定方程(2)中 $M(t,\eta_t) = C^{\mathrm{T}}(t,\eta_t)C(t,\eta_t)$，$L(t,\eta_t) = C^{\mathrm{T}}(t,\eta_t)D(t,\eta_t)$，$R(t,\eta_t) = D^{\mathrm{T}}(t,\eta_t)D(t,\eta_t)$，且有：

$$
\begin{aligned}
\Pi_1(t)X &= \sum_{k=1}^{r} A_k^{\mathrm{T}}(t,i)\Xi_i(t,X)A_k(t,i) \\
\Pi_2(t)X &= \sum_{k=1}^{r} A_k^{\mathrm{T}}(t,i)\Xi_i(t,X)B_k(t,i) \\
\Pi_3(t)X &= \sum_{k=1}^{r} B_k^{\mathrm{T}}(t,i)\Xi_i(t,X)B_k(t,i)
\end{aligned} \tag{5}
$$

在上述(5)式的定义下，(2)式可化为：

$$
\begin{aligned}
X(t,i) &= \Pi_1(t)X(t+1) + M(t,\eta_t) - \left(\Pi_2(t)X(t+1) + L(t,\eta_t)\right) \\
&\quad \times\left(\Pi_3(t)X(t+1) + R(t,\eta_t)\right)^{-1}\left(\Pi_2(t)X(t+1) + L(t,\eta_t)\right)^{\mathrm{T}}
\end{aligned} \tag{6}
$$

对于任意的 $t \in (t_0,\infty)$，记 $\mathfrak{I} = (t_0,\infty)$，$M(t,\eta_t) \in S_n^{\infty}$，$\Pi_1(t): S_n^{\infty} \to S_n^{\infty}$，$L(t,\eta_t) \in M_{nm}^{\infty}$，$\Pi_1(t): S_n^{\infty} \to M_{nm}^{\infty}$，$R(t,\eta_t) \in S_m^{\infty}$，$\Pi_3(t): S_n^{\infty} \to S_m^{\infty}$ 都是线性算子，其中 n,m 都是固定的正整数。

取 $\Pi(t)X = \begin{pmatrix} \Pi_1(t)X & \Pi_2(t)X \\ (\Pi_2(t)X)^{\mathrm{T}} & \Pi_3(t)X \end{pmatrix}$，$\mathcal{Q}(t,\eta_t) = \begin{pmatrix} M(t,\eta_t) & L(t,\eta_t) \\ L^{\mathrm{T}}(t,\eta_t) & R(t,\eta_t)\end{pmatrix}$。

为了后续研究，我们做出如下假设：

假设 1：1) 序列 $\{\Pi(t)\}_{t\in\mathfrak{I}} \subset \mathfrak{B}(S_n^{\infty},S_{n+m}^{\infty})$ 与序列 $\{\mathcal{Q}(t)\}_{t\ge t_0} \subset S_{n+m}^{\infty}$ 都是有界序列；

2) 对于任意的 $t \ge t_0$，$\Pi(t)$ 是一个正算子，即：$\Pi(t)X \ge 0$，若 $X \ge 0$。

取定下列两个集合：

$$
\Gamma^{\Sigma} = \left\{X = \{X(t)\}_{t\in\mathfrak{I}} \in \ell^{\infty}(\mathfrak{I},S_n^{\infty}) \mid \mathcal{D}^{\Sigma}(X(t)) \ge 0, \Pi_3(t)X(t+1) + R(t,\eta_t) \gg 0, t \in \mathfrak{I}\right\} \tag{7}
$$

$$\tilde{\Gamma}^{\Sigma}=\left\{X=\left\{X(t)\right\}_{t\in\mathfrak{I}}\in\ell^{\infty}\left(\mathfrak{I},S_n^{\infty}\right)\mid\mathcal{D}^{\Sigma}\left(X(t)\right)\gg 0,t\in\mathfrak{I}\right\} \tag{8}$$

其中，对于任意的 $t\in\mathfrak{I}$，

$$\mathcal{D}^{\Sigma}\left(X(t)\right)=\begin{pmatrix}-X & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\Pi_1(t)X & \Pi_2(t)X\\ \left(\Pi_2(t)X\right)^{\mathrm{T}} & \Pi_3(t)X\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}M(t,\eta_t) & L(t,\eta_t)\\ L^{\mathrm{T}}(t,\eta_t) & R(t,\eta_t)\end{pmatrix}$$

注记 1：对于任意的一个序列 $\left\{X(t)\right\}_{t\in\mathfrak{I}}$，$X(t)\gg 0,t\in\mathfrak{I}$ 等价于 $X(t,i)\geq\varepsilon I_n\geq 0$ 对于任意的 $t\in\mathfrak{I},1\leq t\leq\infty$，这样的序列被称为一致正的。

注记 2：根据舒尔补方法可知，Γ^{Σ} 包含方程(6)的所有全局有界解 $\left\{X(t)\right\}_{t\in\mathfrak{I}}$，且满足：$\Pi_3(t)X(t+1)+R(t,\eta_t)\gg 0,t\in\mathcal{I}$。

注记 3：由(7)式和(8)式显然可得：$\tilde{\Gamma}^{\Sigma}\subset\Gamma^{\Sigma}$。

定义 2 [15]：我们称 $\left\{X(t)\right\}_{t\in\mathfrak{I}}$ 是方程(6)的一个最大解，若 $X(t)\geq\hat{X}(t),t\in\mathfrak{I}$，对于任意的 $\left\{X(t)\right\}_{t\in\mathfrak{I}}\in\Gamma^{\Sigma}$。

定义 3 [15]：我们称 $\left\{X_s(t)\right\}_{t\in\mathfrak{I}}\subset S_n^{\infty}$ 是方程(6)的一个稳定解，若离散时间线性方程 $Z(t+1)=\Pi^{*}_{F^{X_s}}(t)Z(t)$ 是指数稳定的，其中：

$$F^{X_s}(t)=-\left(\Pi_3(t)X_s(t+1)+R(t,\eta_t)\right)^{-1}\times\left(\Pi_2(t)X_s(t+1)+L(t,\eta_t)\right)^{\mathrm{T}} \tag{9}$$

$$\Pi^{*}_{F^{X_s}}(t)=\begin{pmatrix}I_n & \left(F^{X_s}(t)\right)^{\mathrm{T}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\Pi_1(t)X & \Pi_2(t)X\\ \left(\Pi_2(t)X\right)^{\mathrm{T}} & \Pi_3(t)X\end{pmatrix}\begin{pmatrix}I_n\\ F^{X_s}(t)\end{pmatrix} \tag{10}$$

定义 4 [15]：我们称线性正算子序列 $\left\{\Pi(t)\right\}_{t\in\mathfrak{I}}$ 是稳定的，若存在有界序列 $\left\{F(t,i)\right\}_{t\in\mathfrak{I}}\subset R^{m\times n},1\leq i<\infty$ 使得离散时间线性方程 $Z(t+1)=\left(\Pi_F(t)\right)^{*}Z(t)$ 的零态平衡是指数稳定的。

定义 5 [22]：我们称离散时间系统广义 Riccati 方程(6)的解 $\left\{X_{\min}(t)\right\}_{t\in\mathfrak{I}}$ 是其半正定解中最小的，若 $0\leq X_{\min}(t)\leq X(t)$，对于离散时间系统广义 Riccati 方程(6)的任意解 $\left\{X(t)\right\}_{t\in\mathfrak{I}}\subset S_n^{N_+}$。

定义 6 [22]：我们称系统(1)是随机稳定的，若存在一个有界序列 $\left\{F(t,i)\right\}_{t\in\mathfrak{I}}\subset R^{m\times n},1\leq i<\infty$ 使得闭环系统

$$x(t+1)=\left[A_0(t,\eta_t)+\sum_{k=1}^{r}A_k(t,\eta_t)\omega_k(t)+B_0(t,\eta_t)F(t,\eta_t)+\sum_{k=1}^{r}B_k(t,\eta_t)F(t,\eta_t)\omega_k(t)\right]x(t) \tag{11}$$

的零态稳定是强指数均方稳定的(Strongly exponentially stable in the mean square)。

显然，根据定义 3 和定义 4 可知，若线性正算子序列 $\left\{\Pi(t)\right\}_{t\in\mathfrak{I}}$ 是稳定的，则方程(6)有一个稳定解 $\left\{X(t)\right\}_{t\in\mathfrak{I}}\subset S_n^{\infty}$。

定义 7 [22]：离散时间无限马尔可夫跳跃系统(1)中，取 $u(t)=0$，我们称系统是随机可探测的，若存在序列 $H\in\mathcal{H}_{\infty}^{n\times m}$ 使得系统 $(A+HC;P)$ 是随机稳定的。

4. 主要成果

定理 1 系统(1)是随机稳定的等价于线性正算子序列 $\left\{\Pi(t)\right\}_{t\in\mathfrak{I}}$ 是稳定的。

证明：根据定义 5 可知，若系统(1)是随机稳定的，则闭环系统(11)的零态稳定是强指数均方稳定的，即对应的 Lyapunov 型算子

$$\Upsilon_F(t)X(i)=\sum_{k=0}^{r}\sum_{j=1}^{N}p_t(j,i)\left[A_k(t,j)+B_k(t,j)F(t,i)\right]X(t+1,j)\left(\left[A_k(t,j)+B_k(t,j)F(t,i)\right]\right)^{\mathrm{T}} \tag{12}$$

能够产生一个指数稳定演化。若线性正算子序列 $\{\Pi(t)\}_{t\in\Im}$ 是稳定的，则存在有界序列 $\{F(t,i)\}_{t\in\Im}\subset R^{m\times n}$，$1\le i<\infty$ 使得离散时间线性方程 $Z(t+1)=(\Pi_F(t))^{*}Z(t)$ 的零态平衡是指数稳定的，即 $(\Pi_F(t))^{*}$ 能够产生一个指数稳定演化。又由于

$$\Pi_F(t)=\begin{pmatrix} I_n & (F(t,i))^{\mathrm{T}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\Pi_1(t)X & \Pi_2(t)X \\ (\Pi_2(t)X)^{\mathrm{T}} & \Pi_3(t)X\end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_n \\ F(t,i)\end{pmatrix} \tag{13}$$

经过简单的计算可得：$\Pi_F(t)=(\Upsilon_F(t))^{*}$。根据定理 2.5 [15]可知，若 $(\Upsilon_F(t))^{*}$ 能够产生一个指数稳定演化，则 $\Upsilon_F(t)$ 能够产生一个指数稳定演化。综上可知：系统(1)是随机稳定的等价于线性正算子序列 $\{\Pi(t)\}_{t\in\Im}$ 是稳定的。

引理 1 [8]：假设正算子序列 $\{\Pi(t)\}_{t\in\mathcal{I}}\subset\mathfrak{B}(S_n^N,S_{n+m}^N)$ 是稳定的且 $0\in\Gamma^{\Sigma}$，在此条件下由 $\Sigma=(\Pi,\mathcal{Q})$ 定义的离散时间系统广义 Riccati 方程(6)有两个全局有界解 $\{X_{\min}(t)\}_{t\in\Im}$ 和 $\{X_{\max}(t)\}_{t\in\Im}$ 具有以下性质：

$$0\le X_{\min}(t)\le X(t)\le X_{\max}(t),\ t\in\Im$$

对于方程(6)任意的有界解 $\{X(t)\}_{t\in\Im}$ 且 $X(t)\ge 0,t\in\Im$。

引理 2 [8]：若 Γ^{Σ} 是非空的，则方程(6)至少还有一个稳定解。

定理 2：若集合 Γ^{Σ} 是非空的，则若 Riccati 方程有稳定解，则必定存在最大值解。

证明：令 $\hat{X}=\{\hat{X}(t)\}_{t\in\Im}$ 是集合 Γ^{Σ} 中的任意一个序列，即 $\hat{X}=\{\hat{X}(t)\}_{t\in\Im}$ 是方程(6)的任意一个解，根据文献[15]中的引理 5.1 可知，若取定 $W(t)=F_S(t)$，则方程(6)可以通过简单的计算可以转化为：

$$\hat{X}(t)=\Pi_{F_S}(t)\hat{X}(t+1)+\mathcal{Q}_{F_S}(t)-\hat{M}(t)-\left(F_S(t)-\hat{F}(t)\right)^{\mathrm{T}}\left(\Pi_3(t)\hat{X}(t+1)+R(t,\eta_t)\right)\left(F_S(t)-\hat{F}(t)\right) \tag{14}$$

其中 $\hat{F}(t)=\left(\Pi_3(t)\hat{X}(t+1)+R(t,\eta_t)\right)^{-1}\left(\Pi_2(t)\hat{X}(t+1)+L(t,\eta_t)\right)^{\mathrm{T}}$

设方程(6)有一个稳定解，取该稳定解为 $X_s=\{X_s(t)\}_{t\in\Im}$，则离散时间线性方程 $X_s(t+1)=\Pi^{*}_{F^{X_s}}(t)X_s(t)$ 是指数稳定的，其中 $\Pi^{*}_{F^{X_s}}(t)$ 和 $F^{X_s}(t)$ 如(9)和(10)式所示。由于 $X_s(t)$ 也是方程(6)的一个解，故当 $W(t)=F^{X_s}(t)$ 时，通过简单的计算可得：

$$X_s(t)=\Pi_{F_S}(t)X_s(t+1)+\mathcal{Q}_{F_S}(t) \tag{15}$$

用(15)式减去(14)式可得：

$$\begin{aligned} X_s(t)-\hat{X}(t)&=\Pi_{F_S}(t)\left(X_s(t+1)-\hat{X}(t+1)\right)\\ &\quad+\left(F_S(t)-\hat{F}(t)\right)^{\mathrm{T}}\left(\Pi_3(t)\hat{X}(t+1)+R(t,\eta_t)\right)\left(F_S(t)-\hat{F}(t)\right)+\hat{M}(t)\end{aligned} \tag{16}$$

根据文献[15]中引理 1 可知，$\hat{M}(t)\ge 0$，由于 $\hat{X}(t+1)\in\Gamma^{\Sigma}$，则有 $\Pi_3(t)\hat{X}(t+1)+R(t,\eta_t)\gg 0$，故 $\left(F_S(t)-\hat{F}(t)\right)^{\mathrm{T}}\left(\Pi_3(t)\hat{X}(t+1)+R(t,\eta_t)\right)\left(F_S(t)-\hat{F}(t)\right)\ge 0$。又由于 $X_s=\{X_s(t)\}_{t\in\Im}$ 是一个稳定解，则离散时间线性方程 $X_s(t+1)=\Pi^{*}_{F^{X_s}}(t)X_s(t)$ 是指数稳定的，再根据定理 2.5 [15]可知，$\Pi_{F_S}(t)$ 能产生一个指数稳定演化，且 $\mathcal{G}(t)\ge 0$，其中 $\mathcal{G}(t)=\left(F_S(t)-\hat{F}(t)\right)^{\mathrm{T}}\left(\Pi_3(t)\hat{X}(t+1)+R(t,\eta_t)\right)\left(F_S(t)-\hat{F}(t)\right)+\hat{M}(t)$，故方程(16)有唯一有界一致正解，即 $X_s(t)-\hat{X}(t)\ge 0$，由于 $\hat{X}=\{\hat{X}(t)\}_{t\in\Im}$ 是方程(6)的任意一个解，且 $X_s(t)\ge\hat{X}(t)$，根据定义 2 可知，$X_s(t)$ 即为方程(6)的一个最大值解。故定理得证。

推论 1：在系统随机可探测条件下，离散时间系统广义 Riccati 差分方程(1)~(2)的所有半正定解都是它的稳定解。若该稳定解是唯一的，则方程(1)~(2)的最多只有一个半正定解 $X_s(t)$，且有 $X_s(t)=X_{\min}(t)=X_{\max}(t), t\in\Im$。

5. 数值举例

该数值举例说明，在系统不可随机可测的情况下，离散时间系统广义 Riccati 差分方程(2)的最大值解与最小值解不一致。

考虑方程(2)的特殊情形，$n=2, r=1, i=1$，则方程化为：

$$\begin{aligned}X(t)&=A_0^{\mathrm{T}}X(t+1)A_0+A_1^{\mathrm{T}}X(t+1)A_1+C^{\mathrm{T}}C-\left(A_0^{\mathrm{T}}X(t+1)B_0+A_1^{\mathrm{T}}X(t+1)B_1+C^{\mathrm{T}}D\right)\\&\quad\times\left(D^{\mathrm{T}}D+B_0^{\mathrm{T}}X(t+1)B_0+B_1^{\mathrm{T}}X(t+1)B_1\right)^{-1}\left(B_0^{\mathrm{T}}X(t+1)A_0+B_1^{\mathrm{T}}X(t+1)A_1+D^{\mathrm{T}}C\right)\end{aligned} \tag{17}$$

其中：

$$A_0=\begin{pmatrix}\frac{4}{5} & 0\\ 0 & \frac{8}{5}\end{pmatrix};A_1=\begin{pmatrix}\frac{3}{5} & 0\\ 0 & \frac{3}{5}\end{pmatrix}=\frac{3}{5}I_2;B_0=\begin{pmatrix}2 & 1\end{pmatrix}^{\mathrm{T}};B_1=\begin{pmatrix}0 & 0\end{pmatrix}^{\mathrm{T}};C=\begin{pmatrix}\frac{4}{5} & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix};D=\begin{pmatrix}0 & 1\end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$$

通过简单的计算可知，系统不是随机可测的。取 $X_s=\begin{pmatrix}\frac{7+\sqrt{2}}{2} & -3\left(3+\sqrt{2}\right)\\ -3\left(3+\sqrt{2}\right) & 3\left(11+6\sqrt{2}\right)\end{pmatrix}$，

显然 X_s 是(17)式的一个解。接下来证明 X_s 是(17)式的一个稳定解。

根据定理 3.7 [15]可知，若 X_s 是(17)式的一个稳定解，当且仅当存在 $\tilde{X}>0$，使得 $\tilde{A}^{\mathrm{T}}\tilde{X}\tilde{A}+\frac{25}{9}\tilde{X}-\tilde{X}<0$，其中：

$$\tilde{A}=\begin{pmatrix}\frac{4\sqrt{2}}{5} & -\frac{12}{5}\left(7-6\sqrt{2}\right)\\ \frac{2}{5}\left(-1+\sqrt{2}\right) & \frac{2}{5}\left(7-6\sqrt{2}\right)\end{pmatrix}$$

则上述不等式等价于 $\hat{A}^{\mathrm{T}}\tilde{X}\hat{A}-\tilde{X}<0$，其中 $\hat{A}=\frac{5}{4}\tilde{A}$，通过著名的离散时间 Lyapunov 定理并且进行简单地计算可知其等价于 $\rho\left(\hat{A}\right)<1$，因此可以推断出 X_s 是(17)式的一个稳定解。又因为 $0\in\Gamma^{\Sigma}$，则根据定理 1 可知若 Γ^{Σ} 非空，若方程有稳定解则必有最大值解，且其稳定值与最大值一致。即 $X_s=X_{\max}$。通过直接的计算，可知(17)式具有两个半正定解，即 X_s 和 $\hat{X}$，其中

$$\hat{X}=\begin{pmatrix}\frac{1+\sqrt{2}}{2} & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$$

因为 $X_s\ge\hat{X}$，则 $\hat{X}$ 是(17)式的最小解。因此在在系统不是随机可测时，离散时间系统广义 Riccati 方程(2)的最大值解与最小值解不一致。

6. 结论

本文主要应用 Lyapunov 算子将系统的随机稳定与线性正算子序列 $\{\Pi(t)\}_{t\in\Im}$ 的稳定联系起来，并且

对其进行了明确的证明，为定理 2 的成立奠定了基础。定理 2 进行直接的计算可以得出若集合 Γ^{Σ} 是非空的，则若 Riccati 方程有稳定解，则必定存在最大值解。

基金项目

重庆理工大学研究生教育高质量发展项目，项目编号：gzlcx20223309，项目类型：校级联合资助项目。

参考文献

[1] Stoica, A. and Yaesh, I. (2002) Jump Markovian-Based Control of Wing Deployment for an Uncrewed Air Vehicle. *Journal of Guidance*, **25**, 407-411. https://doi.org/10.2514/2.4896

[2] Hu, S.-H., Fang, Y.-W., Xiao, B.-S., Wu, Y.-L. and Mou, D. (2010) Near Space Hypersonic Vehicle Longitudinal Motion Control Based on Markov Jump System Theory. 2010 8*th World Congress on Intelligent Control and Automation*, Jinan, 7-9 July 2010, 7067-7072.

[3] Kalman, R. (1960) Contribution on the Theory of Optimal Control. *Boletín de la Sociedad Matemática Mexicana*, **5**, 102-119.

[4] Sworde, D. (1969) Feedback Control of a Class of Linear Systems with Jump Parameters. *IEEE Transactions on Automatic Control*, **14**, 9-14. https://doi.org/10.1109/TAC.1969.1099088

[5] Krasovskii, N.N. and Lidskii, E.A. (1961) Analytical Design of Controllers in Systems with Random Attributes. *Automation and Remote Control*, **22**, 1021-2025.

[6] Meng, Q. (2014) Linear Quadratic Optimal Stochastic Control Problem Driven by a Brownian Motion and a Poisson Random Martingale Measure with Random Cofficients. *Stochastic Analysis and Applications*, **32**, 88-109. https://doi.org/10.1080/07362994.2013.845106

[7] Mahmoud, M.S. and Peng, S. (2009) Robust Control for Markovian Jump Linear Discrete-Time Systems with Unknown Nonlinearities. *IEEE Transactions on Circuits and Systems I*: *Fundamental Theory and Applications*, **49**, 538-542. https://doi.org/10.1109/81.995674

[8] Ungureanu, V.M. and Dragan, V. (2013) Stability of Discrete-Time Positive Evolution Operators on Ordered Banach Spaces and Applications. *Journal of Difference Equations and Applications*, **19**, 952-980. https://doi.org/10.1080/10236198.2012.704369

[9] Damm, T. (2004) Rational Matrix Equations in Stochastic Control. In: *Lecture Notes in Control and Information Sciences*, Vol. 297, Springer, Berlin.

[10] Damm, T. and Hinrichsen, D. (2001) Newton's Method for a Rational Matrix Equation Occurring in Stochastic Control. *Linear Algebra and Its Applications*, **332-334**, 81-109. https://doi.org/10.1016/S0024-3795(00)00144-0

[11] Damm, T. and Hinrichsen, D. (2003) Newton's Method for Concave Operators with Resolvent Positive Derivatives in Ordered Banach Spaces. *Linear Algebra and Its Applications*, **363**, 43-64. https://doi.org/10.1016/S0024-3795(02)00328-2

[12] Wonham, W.M. (1968) On a Matrix Riccati Equation of Stochastic Control. *SIAM Journal on Control*, **6**, 681-697. https://doi.org/10.1137/0306044

[13] Wonham, W.M. (1970) Random Differential Equations in Control Theory. In Bharucha-Reid, A.T., Eds., P*robabilistic Methods in Applied Mathematics*, Vol. 2, Academic Press, New York/London.

[14] Costa, E.F. and do Val, JB.R. (2001) On the Detectability and Observability of Discrete-Time Markov Jump Linear Systems. *Systems & Control Letters*, **44**, 135-145. https://doi.org/10.1016/S0167-6911(01)00134-7

[15] Dragan, V., Morozan, T. and Stoica, A.M. (2010) Mathematical Methods in Robust Control of Discrete-Time Linear Stochastic Systems. Springer, New York. https://doi.org/10.1007/978-1-4419-0630-4

[16] Costa, O.L.V., Marques, R.P. and Fragoso, M.D. (2005) Discrete-Time Markov Jump Linear Systemms. Springer, New York.

[17] Morozan, T. (1992) Discrete-Time Riccati Equations Connected with Quadratic Control for Linear Systems with Independent Random Perturbations. *Revue Roumaine de Mathématique Pures et Appliquées*, **37**, 233-246.

[18] Morozan, T. (1995) Stability and Control for Linear Discrete-Time Systems with Markov Perturbations. *Revue Roumaine de Mathématique Pures et Appliquées*, **40**, 471-494.

[19] Dragan, V., Damm, T., Freiling, G. and Morozan, T. (2005) Differential Equations with Positive Evolutions and Some Applications. *Results in Mathematics*, **48**, 206-235. https://doi.org/10.1007/BF03323366

[20] Dragan, V. and Morozan, T. (2006) Exponential Stability for Discrete Time Linear Equations Defined by Positive Operators. *Integral Equations and Operator Theory*, **54**, 465-493. https://doi.org/10.1007/s00020-005-1371-7

[21] Dragan, V. and Morozan, T. (2006) Observability and Detectability of a Class of Discrete-Time Stochastic Linear Systems. *IMA Journal of Mathematical Control and Information*, **23**, 371-394. https://doi.org/10.1093/imamci/dni064

[22] Dragan, V., Morozan, T. and Stoica, A.-M. (2006) Mathematical Methods in Robust Control of Linear Stochastic Systems. In: Miele, A., Ed., *Mathematical Concepts and Methods in Science and Engineering*, Vol. 50, Springer, New York.

[23] Dragan, V. and Morozan, T. (2006) Mean Square Exponential Stability for Discrete-Time Time-Varying Linear Systems with Markovian Switching. *Proceedings of the* 17*th International Symposium on Mathematical Theory of Networks and Systems*, Kyoto, 24-28 July 2006.

[24] Dragan, V. and Morozan, T. (2006) Mean Square Exponential Stability for some Stochastic Linear Discrete Time Systems. *European Journal of Control*, **12**, 373-395. https://doi.org/10.3166/ejc.12.373-395