Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, 2023, 12(4), 1504-1509
Published Online April 2023 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2023.124156

Hans汉斯

乘积图的博弈染色数

苏俊义

浙江师范大学数学科学学院，浙江 金华

收稿日期：2023年3月13日；录用日期：2023年4月9日；发布日期：2023年4月19日

摘 要

本文讨论的图是两棵树的乘积图．分别研究了树和树的笛卡尔积图、直积图和强积图的 $(a,1)$-博弈染色数，给出了三种乘积图的 $(a,1)$-博弈染色的上界．特殊地，如果其中一棵树是一条路，那么我们类似的可以得出关于树和路的乘积图的 $(a,1)$-博弈染色数的结果．

关键词

笛卡尔积图，直积图，强积图，博弈染色数

The Game Coloring Number of Product Graph

Junyi Su

School of Mathematical Science, Zhejiang Normal University, Jinhua Zhejiang

Received: Mar. 13^{th}, 2023; accepted: Apr. 9^{th}, 2023; published: Apr. 19^{th}, 2023

Abstract

The graph discussed in this article is a product graph of two trees. We study the $(a,1)$-game coloring numbers of the Cartesian product graph, direct product graph and strong product graphs of two trees, and give the upper bounds of $(a,1)$-game

文章引用: 苏俊义. 乘积图的博弈染色数[J]. 应用数学进展, 2023, 12(4): 1504-1509.
DOI: 10.12677/aam.2023.124156

coloring numbers of the three product graphs. In particular, if one of the trees is a path, then we can similarly obtain the results of the $(a,1)$-game coloring number of the product graph of tree and path.

Keywords

The Cartesian Product of Graphs, The Direct Product of Graphs, The Strong Product of Graphs, Game Coloring Number

1. 引言

假设$G=(V,E)$ 是一个图. 1991年, Bodlaender在 [1]中提出了图的博弈色数的概念. 图G 的博弈色数通过一个两个人的博弈定义. 两个玩家, Alice 和Bob, 轮流对图G 的顶点使用同一个k 个颜色的颜色集进行着色. 在每个玩家的回合中, 玩家从$V(G)$ 中选择一个未着色的顶点, 并将此顶点用k 个给定的颜色之一进行着色. Alice 首先着色, 在每一回合中, 两个玩家对图G 的着色均为正常染色. 博弈直到G 的所有顶点都被着色或剩余的点没有可正常着色的方法. 如果图 G 中所有的顶点都被给定的颜色染好, 那么Alice 赢, 否则Bob 赢. Alice 的目标是在博弈结束以后, 图G 的所有点均被着色; Bob 的目标是在博弈结束以后, 至少存在一个顶点没有被着色. 博弈色数是使Alice 有一个赢的策略的最小颜色数, 记作$\chi_g(G)$.

在研究图博弈色数的过程中, Faigle, Kern, Kierstead 和Trotter [2]考虑了标记博弈, 并由Zhu [3]正式的提出作为研究博弈色数的工具. 标记博弈的定义如下: 两个玩家, Alice 和Bob, 轮流对图G 未被标记的顶点进行标记, Alice 首先进行标记. 博弈开始时, 所有顶点都未标记. 当图G 的所有顶点都被标记时, 博弈结束. 对于G 的每个顶点v, 用$b(v)$ 表示在v 标记之前标记的v 的邻点的个数. 整个博弈的分数为

$$s = 1 + \max_{x\in V(G)} b(x).$$

Alice 的目标是使整个博弈的分数尽可能的小; Bob 的目标是使整个博弈的分数尽可能的大. 博弈染色数为最小的s 使得Alice 有一个得分最多为s 的策略, 记作$col_g(G)$.

在2005 年, Kierstead提出在 [4]中提出了非对称版本的(a,b)-博弈染色数的相关概念. (a,b)-博弈染色的规则除了要求每回合Alice和Bob分别染a个顶点和b个顶点以外, 其余规则不变. (a,b)-博弈染色数记为 (a,b)-$col_g(G)$.

对于一个图G, 设$O(G)$是图 G 所有定向的集合. 对于图G的一个定向$\vec{G}$以及$\vec{G}$ 的一个点x, 令$N^+_{\vec{G}}(x)$为点x的所有外邻点的集合, 令$d^+_{\vec{G}}(x) = |N^+_{\vec{G}}(x)|$为$x$的出度. 令$\Delta^+(\vec{G}) = \max_{v\in V(G)} d^+_{\vec{G}}(v)$, $\Delta^*(G) = \min_{\vec{G}\in O(G)} \Delta^+(\vec{G})$, $\Delta(G) = \max_{v\in V(G)} d_G(v)$.

在2005年, Kierstead和Yang 在 [5]中给出了如下定理:

定理1 [5]设a是一个整数, 如果图G满足$\Delta^*(G) = k \le a$, 那么$(a,1)$-$col_g(G) \le 2k+2$.

下面我们分别介绍图H_1 和 H_2的笛卡尔积图、直积图和强积图的概念.

图H_1和H_2的笛卡尔积图 $G = H_1 \Box H_2$ 的顶点集为 $V(G) = V(H_1) \times V(H_2)$, 边集为 $E(G)$, 边 $((v,x),(w,y)) \in E(G)$ 当且仅当: (1) $v = w$ 且 $xy \in E(H_2)$, 或 (2) $x = y$ 且 $vw \in E(H_1)$.

图 H_1 和 H_2 的直积图 $G = H_1 \times H_2$ 的顶点集为 $V(G) = V(H_1) \times V(H_2)$, 边集为 $E(G)$, 边 $((v,x),(w,y)) \in E(G)$ 当且仅当: $vw \in E(H_1)$ 且 $xy \in E(H_2)$.

图 H_1 和 H_2 的强积图 $G = H_1 \boxtimes H_2$ 的顶点集为 $V(G) = V(H_1) \times V(H_2)$, 边集为 $E(G)$, 边 $((v,x),(w,y)) \in E(G)$ 当且仅当: (1) $v = w$ 且 $xy \in E(H_2)$, 或 (2) $x = y$ 且 $vw \in E(H_1)$, 或 (3) $vw \in E(H_1)$ 且 $xy \in E(H_2)$.

通过笛卡尔积图、直积图和强积图的定义, 我们可以发现图 H_1 和 H_2 的笛卡尔积图、直积图和强积图的顶点集是相同的, 并且图 H_1 和 H_2 的强积图的边集是图 H_1 和 H_2 的笛卡尔积图的边集和直积图的边集不相交的并.

在 [6]中作者给出了如下关于树和路的乘积图的博弈染色数的结果:

定理2 [6]对于任意整数 $a \ge 2$, 如果 $G = T \Box P$, 其中 T 是一棵树, P 是一条路, 那么 $(a,1)$-$col_g(G) \le 6$.

定理3 [6]对于任意整数 $a \ge 2$, 如果 $G = T \times P$, 其中 T 是一棵树, P 是一条路, 那么 $(a,1)$-$col_g(G) \le 6$.

定理4 [6]对于任意整数 $a \ge 4$, 如果 $G = T \boxtimes P$, 其中 T 是一棵树, P 是一条路, 那么 $(a,1)$-$col_g(G) \le 10$.

本文主要研究的图是树和树的乘积图, 利用定理 1, 我们给出树和树的三种乘积图的 $(a,1)$-博弈染色数的上界. 特别的, 如果其中一棵树是一条路, 那么我们可以得到与文献 [6]中关于树和路的乘积图的博弈染色数相同的结果.

2. 树和树乘积图的博弈染色数

令 T_1 和 T_2 是两棵树. 令图 G 是树 T_1 与树 T_2 的乘积图. 我们对乘积图 G 的边进行定向, 给出一个定向图 $\vec{G}$, 得出图 $\vec{G}$ 的最大出度, 再应用定理 1 得出图 G 的 $(a,1)$ -博弈染色数的上界.

首先我们分别取树 T_1 与树 T_2 的两个宽度优先顶点分层. 令 $u_{i,j}$ 和 $v_{i,j}$ 分别表示树 T_1 与树 T_2 在宽度优先分层中的第 i 层的第 j 个元素. 并称在第 $i-1$ 层与点 $u_{i,j}$ 邻接的点为点 $u_{i,j}$ 的祖先, 在第 $i+1$ 层与点 $u_{i,j}$ 邻接的点为点 $u_{i,j}$ 的后代. 由于 T_1 与 T_2 都是树, 所以任意一个 T_1 或 T_2 中的点

最多只有一个祖先. 由笛卡尔积图、直积图和强积图的定义我们知道, 树 T_1 与树 T_2 的笛卡尔积图、直积图和强积图的顶点集是相同的, 为 $V(G) = V_1 \cup V_2 \cup \cdots \cup V_i \cup \cdots$, 其中

$$
\begin{aligned}
V_i = \{&(u_{1,1}, v_{i,1}), (u_{1,1}, v_{i,2}), ..., (u_{1,1}, v_{i,m_i}),\\
&(u_{2,1}, v_{i,1}), (u_{2,1}, v_{i,2}), ..., (u_{2,1}, v_{i,m_i}), (u_{2,2}, v_{i,1}), (u_{2,2}, v_{i,2}), ..., (u_{2,2}, v_{i,m_i}), \cdots\\
&\vdots\\
&(u_{j,1}, v_{i,1}), (u_{j,1}, v_{i,2}), ..., (u_{j,1}, v_{i,m_i}), \cdots\}
\end{aligned}
$$

我们称点 $(u_{i,j}, v_{p,q})$ 是 V_p 的第 i 层的元素.

对于乘积图 G 的任意两个顶点 $(u_{i_1,j_1}, v_{i_2,j_2})$ 和 $(u_{i_3,j_3}, v_{i_4,j_4})$, 我们根据如下规则, 将乘积图 G 的顶点进行排序.

1. 如果 $i_1 < i_3$, 则 $(u_{i_1,j_1}, v_{i_2,j_2}) \prec_L (u_{i_3,j_3}, v_{i_4,j_4})$;
2. 如果 $i_1 = i_3$ 且 $i_2 < i_4$, 则 $(u_{i_1,j_1}, v_{i_2,j_2}) \prec_L (u_{i_3,j_3}, v_{i_4,j_4})$;
3. 如果 $i_1 = i_3$, $i_2 = i_4$ 且 $j_1 < j_3$, 则 $(u_{i_1,j_1}, v_{i_2,j_2}) \prec_L (u_{i_3,j_3}, v_{i_4,j_4})$;
4. 如果 $i_1 = i_3$, $i_2 = i_4$, $j_1 = j_3$ 且 $j_2 < j_4$, 则 $(u_{i_1,j_1}, v_{i_2,j_2}) \prec_L (u_{i_3,j_3}, v_{i_4,j_4})$.

令满足上述规则的乘积图 G 的顶点线性序为 L. 根据顶点线性序 L 我们给乘积图 G 的边进行定向, 定向规则如下:

对任意一条边 $e = (u, v) \in E(G)$, 边 $e = (u, v)$ 的方向为从 u 指向 v 当且仅当 $v <_L u$.

即从顶点线性序大的顶点指向顶点线性序小的顶点.

定理5 令 T_1 和 T_2 是两棵树. 对于任意整数 $a \geq 2$, 如果图 $G = T_1 \square T_2$, 则 $(a, 1)$-$col_g(G) \leq 6$.

证明 首先我们对图 G 中的边按照上述规则进行定向. 由集合 V_i 和 V_j 的定义和笛卡尔积图的定义我们知道, 如果 $|i - j| \geq 2$, 那么在顶点集 V_i 和 V_j 之间没有边相连. 所以根据我们上述定义的边定向规则, 任意一个顶点 $v = (u_{i,j}, v_{p,q}) \in V(G)$, 我们有

1. 对于同 V_p 中与点 v 关联的边
   与在 V_p 中 $i-1$ 层关联的边 $e_1 = ((u_{i-1,a}, v_{p,q}), (u_{i,j}, v_{p,q}))$ 是从点 $v = (u_{i,j}, v_{p,q})$ 指向点 $(u_{i-1,a}, v_{p,q})$;
   与在 V_p 中 $i+1$ 层关联的边$e = ((u_{i,j}, v_{p,q}), (u_{i+1,b}, v_{p,q}))$ 是从点 $(u_{i+1,b}, v_{p,q})$ 指向点 $v = (u_{i,j}, v_{p,q})$;
2. 对于 V_{p-1} 中与点 v 关联的边
   与在 V_{p-1} 中关联的边 $e_2 = ((u_{i,j}, v_{p-1,c}), (u_{i,j}, v_{p,q}))$ 是从点 $v = (u_{i,j}, v_{p,q})$ 指向点 $(u_{i,j}, v_{p-1,c})$;
3. 对于 V_{p+1} 中与点 v 关联的边
   与在 V_{p+1} 中关联的边 $e = ((u_{i,j}, v_{p,q}), (u_{i,j}, v_{p+1,d}))$ 是从点 $(u_{i,j}, v_{p+1,d})$ 指向点 $v = (u_{i,j}, v_{p,q})$.

由于 T_1 和 T_2 都是树, 在 T_1 和 T_2 中的点都最多只有一个祖先, 所以对任意一个顶点 $v = (u_{i,j}, v_{p,q}) \in V(G)$, 最多在图 G 中与 V_p 的第 $i-1$ 层的一个元素邻接, 最多在图 G 中与 V_{p-1} 中的一个元素邻接. 所以任意一个顶点 $v = (u_{i,j}, v_{p,q}) \in V(G)$ 在 $\vec{G}$ 中的出度 $d^+(v) \leq 2$, 所以由定理 1 得 $(a, 1)$-$col_g(G) \leq 6$.

定理6 令 T_1 和 T_2 是两棵树, 设 $\Delta = \Delta(T_2) \leq \Delta(T_1)$. 对于任意整数 $a \geq \Delta$, 如果图 $G = T_1 \times T_2$, 则 $(a, 1)$-$col_g(G) \leq 2\Delta + 2$.

证明 首先我们对图 G 中的边按照上述规则进行定向. 由集合 V_i 和 V_j 的定义和直积图的定义我们知道, 我们同样有如果 $|i - j| \geq 2$, 那么在顶点集 V_i 和 V_j 之间没有边相连, 此外我们还可以得到每一个 V_i 在图 $G = T_1 \times T_2$ 上都是一个独立集. 根据我们上述定义的边定向规则, 任意一个顶点 $v = (u_{i,j}, v_{p,q}) \in V(G)$, 我们有

1. 对于 V_{p-1} 中与点 v 关联的边
   与在 V_{p-1} 中 $i-1$ 层关联的边 $e_1 = ((u_{i-1,a}, v_{p-1,b}), (u_{i,j}, v_{p,q}))$ 是从点 $v = (u_{i,j}, v_{p,q})$ 指向点 $(u_{i-1,a}, v_{p-1,b})$;
   与在 V_{p-1} 中 $i+1$ 层关联的边 $e = ((u_{i,j}, v_{p,q}), (u_{i+1,c}, v_{p-1,d}))$ 是从点 $(u_{i+1,c}, v_{p-1,d})$ 指向点 $v = (u_{i,j}, v_{p,q})$;
2. 对于 V_{p+1} 中与点 v 关联的边
   与在 V_{p+1} 中 $i-1$ 层关联的边 $e_2 = ((u_{i-1,a}, v_{p+1,b}), (u_{i,j}, v_{p,q}))$ 是从点 $v = (u_{i,j}, v_{p,q})$ 指向点 $(u_{i-1,a}, v_{p+1,d})$;
   与在 V_{p+1} 中 $i+1$ 层关联的边 $e = ((u_{i,j}, v_{p,q}), (u_{i+1,c}, v_{p+1,d}))$ 是从点 $(u_{i+1,c}, v_{p+1,d})$ 指向点 $v = (u_{i,j}, v_{p,q})$.

如果 $p = 1$, 则 $V_{p-1} = \emptyset$, 所以点 v 与 V_{p-1} 之间没有边. 由于 $\Delta(T_2) = \Delta$, 且在树 T_1 上点 $u_{i,j}$ 最多只有一个祖先 $u_{i-1,a}$, 所以点 v 与在 V_{p+1} 中 $i-1$ 层关联的边最多有 $1 \times \Delta = \Delta$ 条; 如果 $p > 1$, 由于点 $u_{i,j}$ 和点 $v_{p,q}$ 分别在树 T_1 和 T_2 上都最多只有一个祖先, 所以点 v 与在 V_{p-1} 中 $i-1$ 层关联的边最多有 $1 \times 1 = 1$ 条, 又由于 $\Delta(T_2) = \Delta$ 且点 $v_{p,q}$ 在树 T_2 上有一个祖先, 所以点 v 与在 V_{p+1} 中 $i-1$ 层关联的边最多有 $1 \times (\Delta - 1) = \Delta - 1$ 条. 所以任意一个顶点 $v = (u_{i,j}, v_{p,q}) \in V(G)$ 在 $\vec{G}$ 中的出度 $d^+(v) \leq \Delta$, 所以由定理 1 得 $(a, 1)$-$col_g(G) \leq 2\Delta + 2$.

定理7 令 T_1 和 T_2 是两棵树, 设 $\Delta = \Delta(T_2) \leq \Delta(T_1)$. 对于任意整数 $a \geq \Delta + 2$, 如果图 $G = T_1 \boxtimes T_2$, 则 $(a, 1)$-$col_g(G) \leq 2\Delta + 6$.

证明 令图 $G_1 = T_1 \square T_2$ 和 $G_2 = T_1 \times T_2$, 由强积图的定义我们知道图 $G = T_1 \boxtimes T_2$ 是图 G_1 和 G_2 边不交的并. 由定理 5 和定理 6, 我们知道图 G_1 和 G_2 分别有一个对任意顶点 $v = (u_{i,j}, v_{p,q}) \in V(G)$ 满足 $d^+(\vec{G_1}) \leq 2$ 和 $d^+(\vec{G_2}) \leq \Delta$ 的定向. 所以图 $G = T_1 \boxtimes T_2$ 存在一个对任意顶点 $v = (u_{i,j}, v_{p,q}) \in V(G)$ 满足 $d^+(\vec{G}) \leq \Delta + 2$ 的定向. 所以由定理 1 , 我们有 $(a, 1)$-$col_g(G) \leq 2\Delta + 6$.

特殊地, 如果树 T_2 是一条路 P , 则 $\Delta(T_2) \leq 2$, 所以我们可以分别从定理 [5, 6, 7] 得到定理 [2, 3, 4] .

3. 结语

关于图的博弈染色数有着非常丰富的结果, 但关于乘积图的博弈染色数研究相对较少. 本文通过研究两棵树的乘积图, 通过给出一个图的定向规则, 得到了两棵树的乘积图 $(a, 1)$-博弈染色数的上界, 推广了文献 [6]中的关于树和路的乘积图的 $(a, 1)$-博弈染色数的结果. 对于任意两个图的乘积

图的博弈染色数的上界, 仍然是值得进一步探讨的问题.

参考文献

[1] Bodlaender, H.L. (1991) On the Complexity of Some Coloring Games. In: Möhring, R.H., Ed., *Graph-Theoretic Concepts in Computer Science. WG 1990. Lecture Notes in Computer Science*, Vol. 484, Springer, Berlin, 30-40. https://doi.org/10.1007/3-540-53832-1_29

[2] Faigle, U., Kern, U., Kierstead, H. and Trotter, W.T. (1993) On the Game Chromatic Number of Some Classes of Graphs. *Ars Combinatoria*, **35**, 143-150.

[3] Zhu, X. (1999) The Game Coloring Number of Planar Graphs. *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, **75**, 245-258. https://doi.org/10.1006/jctb.1998.1878

[4] Kierstead, H.A. (2005) Asymmetric Graph Coloring Games. *Journal of Graph Theory*, **48**, 169-185. https://doi.org/10.1002/jgt.20049

[5] Kierstead, H.A. and Yang, D. (2005) Very Asymmetric Marking Games. *Order*, **22**, 93-107. https://doi.org/10.1007/s11083-005-9012-y

[6] 刘佳丽. 树和路的乘积图的广义染色数及博弈染色数[J]. 应用数学进展, 2022, 11(1): 318-325. https://doi.org/10.12677/AAM.2022.111039