Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, 2023, 12(5), 2561-2568
Published Online May 2023 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2023.125257

Hans汉斯

不可压缩微极流方程在临界Besov空间中的局部适定性

邓迎伊

浙江师范大学数学科学学院，浙江 金华

收稿日期：2023年4月28日；录用日期：2023年5月21日；发布日期：2023年5月31日

摘 要

本文主要研究d ($d \geq 2$)维不可压缩微极流系统在L^2框架下临界Besov空间中的局部适定性。证明了当方程组(1.1)的初值满足$(u_0, \omega_0) \in \dot{B}_{2,1}^{\frac{d}{2}-1}(\mathbb{R}^d) \times \dot{B}_{2,1}^{\frac{d}{2}-1}(\mathbb{R}^d)$时，(1.1)存在一个唯一的局部解。

关键词

微极流系统，Besov空间，局部适定性

Local Well-Posedness of Incompressible Micropolar Equations in Critical Besov Spaces

Yingyi Deng

College of Mathematics Science, Zhejiang Normal University, Jinhua Zhejiang

Received: Apr. 28th, 2023; accepted: May 21st, 2023; published: May 31st, 2023

Abstract

This paper mainly studies the local well-posedness of d ($d \geq 2$)-dimensional incompressible micropolar system in the critical Besov space under the L^2 framework. It is proved that (1.1) has a unique local solution when the initial data of (1.1) satisfies $(u_0, \omega_0) \in \dot{B}_{2,1}^{\frac{d}{2}-1}(\mathbb{R}^d) \times \dot{B}_{2,1}^{\frac{d}{2}-1}(\mathbb{R}^d)$.

文章引用: 邓迎伊. 不可压缩微极流方程在临界 Besov 空间中的局部适定性[J]. 应用数学进展, 2023, 12(5): 2561-2568. DOI: 10.12677/aam.2023.125257

Keywords

Micropolar System, Besov Space, Local Well-Posedness

1. 引言

本文我们考虑了在 $\mathbb{R}^d\,(d\ge 2)$ 空间中微极流体方程的局部适定性问题：

$$\begin{cases}\partial_t u-(\chi+\nu)\Delta u+u\cdot\nabla u+\nabla\pi-2\chi\mathrm{curl}\omega=0,\\ \partial_t\omega-\mu\Delta\omega+u\cdot\nabla\omega+4\chi\omega-\kappa\nabla\mathrm{div}\omega-2\chi\mathrm{curl}u=0,\\ \mathrm{div}u=0,\\ (u,\omega)|_{t=0}\in(u_0,\omega_0),\end{cases}\tag{1.1}$$

其中 $u=u(x,t)$ 表示流体的速度，$\omega(x,t)$ 表示流体的为旋转速度，$\pi=\pi(x,t)$ 表示压力，$\chi,\nu,\mu,\kappa>0$ 为常粘性系数。在本文中，为方便起见，令 $\kappa=\mu=1$，$\nu=\chi=\frac{1}{2}$。

微极流方程于 1966 年首次由 C. A. Eringen [1]引入，用于模拟微极流体。它可以看作是一种非牛顿流体，具有微旋转效应和微转动惯量。微极流体是具有微观结构的流体，涵盖了许多现象(如由悬浮在粘性介质中的颗粒所组成的流体等)，是 Navier-Stokes 方程的重要推广。

当 $\omega=0$ 和 $\chi=0$ 时，系统(1.1)退化为经典的 Navier-Stokes 方程。Navier-Stokes 方程有以下的尺度不变性：

$$\left(u_\lambda(t,x),\pi_\lambda(t,x)\right)=\left(\lambda u\left(\lambda^2t,\lambda x\right),\lambda^2\pi\left(\lambda^2t,\lambda x\right)\right),\tag{1.2}$$

而临界空间是指对于尺度变换保持空间范数不变的空间。

对于 Navier-Stokes 方程适定性的研究已有大量的文献。对于临界空间，Fujita 和 Kato [2]得到了 Navier-Stokes 方程在临界齐次 Sobolev 空间 $\dot{H}^{\frac{1}{2}}$ 中的全局适定性结果。Cannone [3]证明了 Navier-Stokes 方程当 $p>3$ 时初值在 $\dot{B}^{3/p-1}_{p,\infty}$ 空间中的适定性；Chemin [4]推广了 Cannone 的结果，研究了初值在 $\dot{B}^{3/p-1}_{p,q}(1\le p<\infty,1\le q\le\infty)$ 中 Navier-Stokes 方程的适定性。

对于不可压缩微极流方程，Chen 和 Miao [5]证明了三维不可压缩微极系统对于小初值在 $\dot{B}^{3/p-1}_{p,\infty}(1\le p<6)$ 中的整体适定性。Song 受到 Chemin [4]的启发，在[6]中推广了 Chen [5]的结果，将 p,q 的范围从 $1\le p<6$，$q=\infty$ 分别扩展到 $1\le p<\infty$，$1\le q\le\infty$，得到了更一般的全局适定性。另外，关于具有全粘性和部分粘性的二维不可压缩微极系统的适定性可以参考[7] [8]。

对(1.1)$_1$ 作用 Leray 投影算子 $\mathcal{P}$，可得

$$\begin{cases}\partial_t u-\Delta u+\mathcal{P}(u\cdot\nabla u)-\mathrm{curl}\omega=0,\\ \partial_t\omega-\Delta\omega+u\cdot\nabla\omega+2\omega-\nabla\mathrm{div}\omega-\mathrm{curl}u=0,\\ \mathrm{div}u=0,\\ (u,\omega)|_{t=0}\in(u_0,\omega_0),\end{cases}\tag{1.3}$$

其中 $\mathcal{P}\triangleq\mathcal{I}-\mathcal{Q}$， $\mathcal{Q}\triangleq\nabla\Delta^{-1}\mathrm{div}$ 且由 $\mathrm{div}\,u=0$ 易知 $\mathcal{P}u=u$。

显然，这个系统相较于 Navier-Stokes 方程已不满足尺度不变性。而处理微极流方程的困难主要在于处理方程中的耦合项 $\mathrm{curl}\,u,\mathrm{curl}\,\omega$，我们利用 Qian 等人在[9]中的技巧，可在 L^2 能量方法中将(1.3)中的 2ω 与 $\mathrm{curl}\,u,\mathrm{curl}\,\omega$ 相抵消。

在本文中，对于给定的 Banach 空间 X，我们记 $\|(a,b)\|_X=\|a\|_X+\|b\|_X$。对于 $q\in[1,+\infty]$，记号 $L^q(I;X)$ 表示 I 上取值于 X 的可测函数的集合，使得 $t\mapsto\|f(t)\|_X$ 属于 $L^q(I)$。当 $I=[0,T]$ 时，记 $L^q(0,T;X)\triangleq L^q_T(X)$。

主要结论如下。

2. 主要定理

定理 2.1 令 $(u_0,\omega_0)\in\dot B_{2,1}^{\frac{d}{2}-1}(\mathbb{R}^d)\times\dot B_{2,1}^{\frac{d}{2}-1}(\mathbb{R}^d)$，则存在 $T>0$ 使得系统(1.1)有一个局部且唯一的解 $(u,\omega)\in\left(\tilde L_T^\infty\left(\dot B_{2,1}^{\frac{d}{2}-1}\right)\cap L_T^1\left(\dot B_{2,1}^{\frac{d}{2}+1}\right)\right)\times\left(\tilde L_T^\infty\left(\dot B_{2,1}^{\frac{d}{2}-1}\right)\cap L_T^1\left(\dot B_{2,1}^{\frac{d}{2}+1}\right)\right)$。

3. 预备知识

首先回顾齐次 Besov 空间的定义。

定义 3.1 [10]令 $(p,r)\in[1,\infty]^2$， $s\in\mathbb{R}$， 齐次 Besov 空间是由分布 $u\in S_{h'}(\mathbb{R}^d)$ (即 $u\in S'(\mathbb{R}^d)$ 且满足 $\lim\limits_{j\to-\infty}\|\dot S_ju\|_{L^\infty}=0$)所组成的，且有

$$\|u\|_{\dot B^s_{p,r}}\triangleq\left\|\left(2^{js}\|\dot\Delta_ju\|_{L^p}\right)_{j\in\mathbb{Z}}\right\|_{\ell^r(\mathbb{Z})}.$$

引理 3.1 [11]令 $\sigma\in\mathbb{R}$， $T>0$， $1\le p\le\infty$， $1\le q_2\le q_1\le\infty$。令 u 是热方程(3.1)的解

$$\begin{cases}\partial_tu-\Delta u=f,\\ u|_{t=0}=u_0.\end{cases}\tag{3.1}$$

记 $q_1'=(1+1/q_1-1/q_2)^{-1}$，则存在两个依赖于维数 d 的正常数 c 和 C 使得

$$\|u\|_{\tilde L_T^{q_1}(\dot B_{p,1}^{\sigma+\frac{2}{q_1}})}\le C\left(\sum_{j\in\mathbb{Z}}2^{j\sigma}\|\dot\Delta_ju_0\|_{L^p}\left(\frac{1-\mathrm{e}^{-cT2^{2j}q_1}}{cq_1}\right)^{1/q_1}+\sum_{j\in\mathbb{Z}}2^{j(\sigma-2+2/q_2)}\|\dot\Delta_jf\|_{L_T^{q_2}(L^p)}\left(\frac{1-\mathrm{e}^{-cT2^{2j}q_1'}}{cq_1'}\right)^{1/q_1'}\right).\tag{3.2}$$

特别地，有以下估计成立

$$\|u\|_{\tilde L_T^{q_1}(\dot B_{p,1}^{\sigma+\frac{2}{q_1}})}\le C\left(\|u_0\|_{\dot B^\sigma_{p,1}}+\|f\|_{\tilde L_T^{q_2}(\dot B_{p,1}^{\sigma-2+\frac{2}{q_2}})}\right).\tag{3.3}$$

注 3.2 通过类似于引理 3.1 的证明过程，对于线性热方程

$$\begin{cases}\partial_tu-\Delta u+2u=f,\\ u|_{t=0}=u_0.\end{cases}\tag{3.4}$$

的解也有估计式(3.2)成立.

引理 3.3 [12]令 $1\le p,q\le\infty$， $s_1\le\frac{d}{q}$， $s_2\le d\min\left\{\frac1p,\frac1q\right\}$ 且 $s_1+s_2>d\max\left\{0,\frac1p+\frac1q-1\right\}$。对于 $(f,g)\in\dot B^{s_1}_{q,1}(\mathbb{R}^d)\times\dot B^{s_2}_{p,1}(\mathbb{R}^d)$，我们有

$$\|fg\|_{\dot B_{p,1}^{s_1+s_2-\frac{d}{q}}}\le C\|f\|_{\dot B^{s_1}_{q,1}}\|g\|_{\dot B^{s_2}_{p,1}}.\tag{3.5}$$

引理 3.4 [10]对于 $0<s_1<s_2$， $0\le\theta\le 1$， 且$1\le p,q_1,q_2\le\infty$， 有以下插值不等式成立：

$$\|u\|_{\dot{B}^{s}_{p,1}}\le C\|u\|^{\theta}_{\dot{B}^{s_1}_{p,1}}\|u\|^{1-\theta}_{\dot{B}^{s_2}_{p,1}},\quad \|u\|_{\tilde{L}^{q}_{T}\left(\dot{B}^{s}_{p,1}\right)}\le C\|u\|^{\theta}_{\tilde{L}^{q_1}_{T}\left(\dot{B}^{s_1}_{p,1}\right)}\|u\|^{1-\theta}_{\tilde{L}^{q_2}_{T}\left(\dot{B}^{s_2}_{p,1}\right)}, \tag{3.6}$$

其中 $s=\theta s_1+(1-\theta)s_2$， $\frac{1}{q}=\frac{\theta}{q_1}+\frac{1-\theta}{q_2}$。

4. 定理证明

4.1. 构造逼近解列

首先，构造(1.3)的逼近解列$\left(u^n,\omega^n\right)$。

令$\left(u^n_L,\omega^n_L\right)$是以下方程组的解：

$$\begin{cases}\partial_t u^n_L-\Delta u^n_L-\operatorname{curl}\omega^n_L=0,\\ \partial_t\omega^n_L-\Delta\omega^n_L-\nabla\operatorname{div}\omega^n_L+2\omega^n_L-\operatorname{curl}u^n_L=0,\\ \operatorname{div}u^n_L=0,\\ \left.\left(u^n_L,\omega^n_L\right)\right|_{t=0}\in\left(u_n,\omega_n\right),\end{cases} \tag{4.1}$$

其中 $u_n\triangleq\sum_{j\le n}\dot{\Delta}_j u_0$， $\omega_n\triangleq\sum_{j\le n}\dot{\Delta}_j\omega_0$。

令$\left(u^n,\omega^n\right)\triangleq\left(u^n_L,\omega^n_L\right)+\left(\bar{u}^n,\bar{\omega}^n\right)$， $\left(\bar{u}^0,\bar{\omega}^0\right)=(0,0)$且$\left(\bar{u}^{n+1},\bar{\omega}^{n+1}\right)$是以下线性系统的解：

$$\begin{cases}\partial_t\bar{u}^{n+1}-\Delta\bar{u}^{n+1}=-\mathcal{P}\left(u^n\cdot\nabla u^n\right)+\operatorname{curl}\bar{\omega}^{n+1},\\ \partial_t\bar{\omega}^{n+1}-\Delta\bar{\omega}^{n+1}-\nabla\operatorname{div}\bar{\omega}^{n+1}+2\bar{\omega}^{n+1}=-u^n\cdot\nabla\omega^n+\operatorname{curl}\bar{u}^{n+1},\\ \operatorname{div}\bar{u}^{n+1}=0,\\ \left.\left(\bar{u}^{n+1},\bar{\omega}^{n+1}\right)\right|_{t=0}\in(0,0).\end{cases} \tag{4.2}$$

4.2. 逼近解列的一致有界性

先对$\left(u^n_L,\omega^n_L\right)$进行估计，对$(4.1)_1$作用$\dot{\Delta}_j$，

$$\partial_t\dot{\Delta}_j u^n_L-\Delta\dot{\Delta}_j u^n_L=\operatorname{curl}\dot{\Delta}_j\omega^n_L,$$

再对上式两端乘以$\dot{\Delta}_j u^n_L$并在$\mathbb{R}^d$上积分，利用 Young 不等式可得

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left\|\dot{\Delta}_j u^n_L\right\|^2_{L^2}+\left\|\nabla\dot{\Delta}_j u^n_L\right\|^2_{L^2}&=\int_{\mathbb{R}^d}\operatorname{curl}\dot{\Delta}_j\omega^n_L\cdot\dot{\Delta}_j u^n_L\mathrm{d}x\\ &=\int_{\mathbb{R}^d}\dot{\Delta}_j\omega^n_L\cdot\operatorname{curl}\dot{\Delta}_j u^n_L\mathrm{d}x\\ &\le\left\|\dot{\Delta}_j\omega^n_L\right\|^2_{L^2}+\frac{1}{4}\left\|\nabla\dot{\Delta}_j u^n_L\right\|^2_{L^2}.\end{aligned} \tag{4.3}$$

同理有

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left\|\dot{\Delta}_j\omega^n_L\right\|^2_{L^2}+\left\|\nabla\dot{\Delta}_j\omega^n_L\right\|^2_{L^2}+\left\|\operatorname{div}\dot{\Delta}_j\omega^n_L\right\|^2_{L^2}+2\left\|\dot{\Delta}_j\omega^n_L\right\|^2_{L^2}\\ &=\int_{\mathbb{R}^d}\operatorname{curl}\dot{\Delta}_j u^n_L\cdot\dot{\Delta}_j\omega^n_L\mathrm{d}x\le\left\|\dot{\Delta}_j\omega^n_L\right\|^2_{L^2}+\frac{1}{4}\left\|\nabla\dot{\Delta}_j u^n_L\right\|^2_{L^2}.\end{aligned} \tag{4.4}$$

将(4.3)和(4.4)相加，利用 Bernstein 不等式得到

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\left\|\dot{\Delta}_j u_L^n\right\|_{L^2}^2+\left\|\dot{\Delta}_j \omega_L^n\right\|_{L^2}^2\right)+c2^{2j}\left(\left\|\dot{\Delta}_j u_L^n\right\|_{L^2}^2+\left\|\dot{\Delta}_j \omega_L^n\right\|_{L^2}^2\right)\le 0,$$

则有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\left\|\dot{\Delta}_j u_L^n\right\|_{L^2}+\left\|\dot{\Delta}_j \omega_L^n\right\|_{L^2}\right)+c2^{2j}\left(\left\|\dot{\Delta}_j u_L^n\right\|_{L^2}+\left\|\dot{\Delta}_j \omega_L^n\right\|_{L^2}\right)\le 0.$$

对上式在 $[0,T]$ 上积分，再乘以 $2^{j\left(\frac{d}{2}-1\right)}$ 并对 $j\in\mathbb{Z}$ 求和即得

$$\left\|\left(u_L^n,\omega_L^n\right)\right\|_{\tilde{L}_T^\infty(\dot{B}_{2,1}^{\frac{d}{2}-1})\cap L_T^1(\dot{B}_{2,1}^{\frac{d}{2}+1})}\le C\left\|\left(u_0,\omega_0\right)\right\|_{\dot{B}_{2,1}^{\frac{d}{2}-1}}. \tag{4.5}$$

又由引理 3.1

$$\left\|u_L^n\right\|_{L_T^1(\dot{B}_{2,1}^{\frac{d}{2}+1})}\le C\sum_j 2^{j\left(\frac{d}{2}-1\right)}\left\|\dot{\Delta}_j u_0\right\|_{L^2}\left(1-\mathrm{e}^{-cT2^{2j}}\right)+C\sum_j 2^{j\left(\frac{d}{2}-1\right)}\left\|\dot{\Delta}_j \mathrm{curl}\,\omega_L^n\right\|_{L_T^1\left(L^2\right)}\left(1-\mathrm{e}^{-cT2^{2j}}\right). \tag{4.6}$$

由于 $\nabla\operatorname{div}\mathcal{Q}\omega_L^n=\Delta\mathcal{Q}\omega_L^n$，将 ω_L^n 的方程$(4.1)_2$分解为

$$\begin{cases}\partial_t\mathcal{P}\omega_L^n-\Delta\mathcal{P}\omega_L^n+2\mathcal{P}\omega_L^n=\mathrm{curl}\mathcal{P}u_L^n,\\ \partial_t\mathcal{Q}\omega_L^n-2\Delta\mathcal{Q}\omega_L^n+2\mathcal{Q}\omega_L^n=0,\end{cases} \tag{4.7}$$

易知 $\mathrm{curl}\,\mathcal{P}=\mathrm{curl}$，则对$(4.7)_1$和$(4.7)_2$分别运用引理 3.1、注 3.2，再由 $\mathcal{PQ}$ 的性质可得

$$\begin{aligned}\left\|\omega_L^n\right\|_{L_T^1(\dot{B}_{2,1}^{\frac{d}{2}+1})}&\le C\left(\left\|\mathcal{P}\omega_L^n\right\|_{L_T^1(\dot{B}_{2,1}^{\frac{d}{2}+1})}+\left\|\mathcal{Q}\omega_L^n\right\|_{L_T^1(\dot{B}_{2,1}^{\frac{d}{2}+1})}\right)\\&\le C\sum_j 2^{j\left(\frac{d}{2}-1\right)}\left\|\dot{\Delta}_j\omega_0\right\|_{L^2}\left(1-\mathrm{e}^{-cT2^{2j}}\right)+C\sum_j 2^{j\left(\frac{d}{2}-1\right)}\left\|\dot{\Delta}_j\,\mathrm{curl}\,u_L^n\right\|_{L_T^1\left(L^2\right)}\left(1-\mathrm{e}^{-cT2^{2j}}\right).\end{aligned} \tag{4.8}$$

根据 $\left(u_L^n,\omega_L^n\right)$ 的估计(4.5) (4.6)和(4.8)，我们可选取一个时间 $T>0$ 使得对 $n\in\mathbb{N}$，有以下不等式成立：

$$T\le\eta^3,\qquad \left\|\left(u_L^n,\omega_L^n\right)\right\|_{\tilde{L}_T^\infty(\dot{B}_{2,1}^{\frac{d}{2}-1})}\le CU_0,\qquad \left\|\left(u_L^n,\omega_L^n\right)\right\|_{L_T^1(\dot{B}_{2,1}^{\frac{d}{2}+1})}\le C\eta^2, \tag{4.9}$$

其中 $\eta\ll 1$，$U_0\triangleq\left\|\left(u_0,\omega_0\right)\right\|_{\dot{B}_{2,1}^{\frac{d}{2}-1}}$。

对于 $\left(\bar{u}^{n+1},\bar{\varpi}^{n+1}\right)$，我们运用归纳法证明以下估计成立

$$\left\|\left(\bar{u}^n,\bar{\varpi}^n\right)\right\|_{\tilde{L}_T^\infty(\dot{B}_{2,1}^{\frac{d}{2}-1})\cap L_T^1(\dot{B}_{2,1}^{\frac{d}{2}+1})}\le\eta. \tag{4.10}$$

假设(4.10)成立，则下证(4.10)对于 $n+1$ 成立。

通过类似于(4.5)式的估计过程可得

$$\left\|\left(\bar{u}^{n+1},\bar{\varpi}^{n+1}\right)\right\|_{\tilde{L}_T^\infty(\dot{B}_{2,1}^{\frac{d}{2}-1})\cap L_T^1(\dot{B}_{2,1}^{\frac{d}{2}+1})}\le C\left\|\left(\mathcal{P}\left(u^n\cdot\nabla u^n\right),u^n\cdot\nabla\omega^n\right)\right\|_{L_T^1(\dot{B}_{2,1}^{\frac{d}{2}-1})}. \tag{4.11}$$

对于上式右端两项，利用引理 3.3、引理 3.4 以及(4.9)和(4.10)有

$$\begin{aligned}\left\|\mathcal{P}\left(u^n\cdot\nabla u^n\right)\right\|_{L_T^1(\dot{B}_{2,1}^{\frac{d}{2}-1})}&\le C\left\|u^n\right\|_{L_T^2(\dot{B}_{2,1}^{\frac{d}{2}})}^2\\&\le C\left\|u_L^n\right\|_{L_T^2(\dot{B}_{2,1}^{\frac{d}{2}})}^2+C\left\|\bar{u}^n\right\|_{L_T^2(\dot{B}_{2,1}^{\frac{d}{2}})}^2\\&\le C\left\|u_L^n\right\|_{\tilde{L}_T^\infty(\dot{B}_{2,1}^{\frac{d}{2}-1})}\left\|u_L^n\right\|_{L_T^1(\dot{B}_{2,1}^{\frac{d}{2}+1})}+C\left\|\bar{u}^n\right\|_{\tilde{L}_T^\infty(\dot{B}_{2,1}^{\frac{d}{2}-1})}\left\|\bar{u}^n\right\|_{L_T^1(\dot{B}_{2,1}^{\frac{d}{2}+1})}\\&\le C\left(U_0+1\right)\eta^2,\end{aligned} \tag{4.12}$$

$$
\begin{aligned}
\left\|u^n\cdot\nabla\omega^n\right\|_{L_T^1(\dot{B}_{2,1}^{\frac{d}{2}-1})} &\le C\left\|u^n\right\|_{L_T^2(\dot{B}_{2,1}^{\frac{d}{2}})}\left\|\omega^n\right\|_{L_T^2(\dot{B}_{2,1}^{\frac{d}{2}})} \le C\left\|u^n\right\|_{L_T^2(\dot{B}_{2,1}^{\frac{d}{2}})}^2 + C\left\|\omega^n\right\|_{L_T^2(\dot{B}_{2,1}^{\frac{d}{2}})}^2 \\
&\le C\left(\left\|u_L^n\right\|_{L_T^2(\dot{B}_{2,1}^{\frac{d}{2}})}^2 + \left\|\bar{u}^n\right\|_{L_T^2(\dot{B}_{2,1}^{\frac{d}{2}})}^2 + \left\|\omega_L^n\right\|_{L_T^2(\dot{B}_{2,1}^{\frac{d}{2}})}^2 + \left\|\bar{\omega}^n\right\|_{L_T^2(\dot{B}_{2,1}^{\frac{d}{2}})}^2\right) \\
&\le C\left(\left\|u_L^n\right\|_{\tilde{L}_T^\infty(\dot{B}_{2,1}^{\frac{d}{2}-1})}\left\|u_L^n\right\|_{L_T^1(\dot{B}_{2,1}^{\frac{d}{2}+1})} + \left\|\bar{u}^n\right\|_{\tilde{L}_T^\infty(\dot{B}_{2,1}^{\frac{d}{2}-1})}\left\|\bar{u}^n\right\|_{L_T^1(\dot{B}_{2,1}^{\frac{d}{2}+1})}\right) \\
&\quad + C\left(\left\|\omega_L^n\right\|_{\tilde{L}_T^\infty(\dot{B}_{2,1}^{\frac{d}{2}-1})}\left\|\omega_L^n\right\|_{L_T^1(\dot{B}_{2,1}^{\frac{d}{2}+1})} + \left\|\bar{\omega}^n\right\|_{\tilde{L}_T^\infty(\dot{B}_{2,1}^{\frac{d}{2}-1})}\left\|\bar{\omega}^n\right\|_{L_T^1(\dot{B}_{2,1}^{\frac{d}{2}+1})}\right) \\
&\le C\left(U_0+1\right)\eta^2.
\end{aligned} \tag{4.13}
$$

将(4.12)和(4.13)代入(4.11)，并取η足够小，使得$C\left(U_0+1\right)\eta\le 1$，即得

$$
\left\|\left(\bar{u}^{n+1},\bar{\omega}^{n+1}\right)\right\|_{\tilde{L}_T^\infty(\dot{B}_{2,1}^{\frac{d}{2}-1})\cap L_T^1(\dot{B}_{2,1}^{\frac{d}{2}+1})} \le \eta. \tag{4.14}
$$

因此，(4.10)对于$n+1$成立。

4.3. 解的存在性和唯一性

下证：对于所有的$n\ge 1$，$T_*>0$足够小，$\left(u^n,\omega^n\right)$为空间$L^2\left(0,T_*;\dot{B}_{2,1}^{\frac{d}{2}}\right)$中的柯西序列。

令$\delta u^{n+1}=u^{n+1}-u^n$，$\delta\omega^{n+1}=\omega^{n+1}-\omega^n$，$\forall n\ge 1$，

$$
\begin{cases}
\partial_t\delta u^{n+1}-\Delta\delta u^{n+1}=\mathrm{curl}\,\delta\omega^{n+1}-\left[\mathcal{P}\left(u^n\cdot\nabla u^n\right)-\mathcal{P}\left(u^{n-1}\cdot\nabla u^{n-1}\right)\right],\\
\partial_t\delta\omega^{n+1}-\Delta\delta\omega^{n+1}-\nabla\,\mathrm{div}\,\delta\omega^{n+1}+2\delta\omega^{n+1}=\mathrm{curl}\,\delta u^{n+1}-\left[u^n\cdot\nabla\omega^n-u^{n-1}\cdot\nabla\omega^{n-1}\right],\\
\mathrm{div}u^n=0,\\
\left.\left(\delta u^{n+1},\delta\omega^{n+1}\right)\right|_{t=0}=\left(\dot{\Delta}_{n+1}u_0,\dot{\Delta}_{n+1}\omega_0\right),
\end{cases} \tag{4.15}
$$

对任意的$T\in\left]0,T_*\right[$，记$V^{n+1}=\left\|\left(\delta u^{n+1},\delta\omega^{n+1}\right)\right\|_{L_T^2(\dot{B}_{2,1}^{\frac{d}{2}})}$。

分别将算子$\mathcal{P},\mathcal{Q}$作用于方程$(4.15)_2$，对$(4.15)_2$分解后的两个方程以及$(4.15)_1$分别运用引理3.1、注3.2，再相加得到

$$
\begin{aligned}
&\left\|\delta u^{n+1}\right\|_{L_T^2(\dot{B}_{2,1}^{\frac{d}{2}})}+\left\|\delta\omega^{n+1}\right\|_{L_T^2(\dot{B}_{2,1}^{\frac{d}{2}})} \\
&\le C\left(\left\|\dot{\Delta}_{n+1}u_0\right\|_{\dot{B}_{2,1}^{\frac{d}{2}-1}}+\left\|\mathrm{curl}\,\delta\omega^{n+1}\right\|_{L_T^1(\dot{B}_{2,1}^{\frac{d}{2}-1})}+\left\|\mathcal{P}\left(u^n\cdot\nabla u^n\right)-\mathcal{P}\left(u^{n-1}\cdot\nabla u^{n-1}\right)\right\|_{L_T^1(\dot{B}_{2,1}^{\frac{d}{2}-1})}\right) \\
&\quad +C\left(\left\|\dot{\Delta}_{n+1}\omega_0\right\|_{\dot{B}_{2,1}^{\frac{d}{2}-1}}+\left\|\mathrm{curl}\,\delta u^{n+1}\right\|_{L_T^1(\dot{B}_{2,1}^{\frac{d}{2}-1})}+\left\|u^n\cdot\nabla\omega^n-u^{n-1}\cdot\nabla\omega^{n-1}\right\|_{L_T^1(\dot{B}_{2,1}^{\frac{d}{2}-1})}\right).
\end{aligned} \tag{4.16}
$$

下面对上式右端项进行估计：

由 Bernstein 不等式、Holder 不等式以及引理 3.3，可得

$$
\left\|\mathrm{curl}\left(\delta u^{n+1},\delta\omega^{n+1}\right)\right\|_{L_T^1(\dot{B}_{2,1}^{\frac{d}{2}-1})}\le C\left\|\left(\delta u^{n+1},\delta\omega^{n+1}\right)\right\|_{L_T^1(\dot{B}_{2,1}^{\frac{d}{2}})}\le CT^{\frac{1}{2}}\left\|\left(\delta u^{n+1},\delta\omega^{n+1}\right)\right\|_{L_T^2(\dot{B}_{2,1}^{\frac{d}{2}})}, \tag{4.17}
$$

$$\begin{aligned}
&\left\|\mathcal{P}\left(u^n\cdot\nabla u^n\right)-\mathcal{P}\left(u^{n-1}\cdot\nabla u^{n-1}\right)\right\|_{L_T^1(\dot{B}_{2,1}^{\frac{d}{2}-1})}\\
&\le C\left\|\mathcal{P}\left(u^n\cdot\nabla u^n-u^n\cdot\nabla u^{n-1}\right)+\mathcal{P}\left(u^n\cdot\nabla u^{n-1}-u^{n-1}\cdot\nabla u^{n-1}\right)\right\|_{L_T^1(\dot{B}_{2,1}^{\frac{d}{2}-1})}\\
&\le C\left\|\mathcal{P}\left(u^n\cdot\nabla\delta u^n\right)-\mathcal{P}\left(\delta u^n\cdot\nabla u^{n-1}\right)\right\|_{L_T^1(\dot{B}_{2,1}^{\frac{d}{2}-1})}\\
&\le C\left\|\left(u^n,u^{n-1}\right)\right\|_{L_T^2(\dot{B}_{2,1}^{\frac{d}{2}})}\left\|\delta u^n\right\|_{L_T^2(\dot{B}_{2,1}^{\frac{d}{2}})},
\end{aligned}\tag{4.18}$$

$$\begin{aligned}
&\left\|u^n\cdot\nabla\omega^n-u^{n-1}\cdot\nabla\omega^{n-1}\right\|_{L_T^1(\dot{B}_{2,1}^{\frac{d}{2}-1})}\\
&\le C\left\|u^n\cdot\nabla\omega^n-u^n\cdot\nabla\omega^{n-1}+u^n\cdot\nabla\omega^{n-1}-u^{n-1}\cdot\nabla\omega^{n-1}\right\|_{L_T^1(\dot{B}_{2,1}^{\frac{d}{2}-1})}\\
&\le C\left\|u^n\cdot\nabla\delta\omega^n-\delta u^n\cdot\nabla\omega^{n-1}\right\|_{L_T^1(\dot{B}_{2,1}^{\frac{d}{2}-1})}\\
&\le C\left(\left\|u^{n-1}\right\|_{L_T^2(\dot{B}_{2,1}^{\frac{d}{2}})}\left\|\delta\omega^n\right\|_{L_T^2(\dot{B}_{2,1}^{\frac{d}{2}})}+\left\|\omega^{n-1}\right\|_{L_T^2(\dot{B}_{2,1}^{\frac{d}{2}})}\left\|\delta u^n\right\|_{L_T^2(\dot{B}_{2,1}^{\frac{d}{2}})}\right).
\end{aligned}\tag{4.19}$$

$$\left\|\dot{\Delta}_{n+1}\left(u_0,\omega_0\right)\right\|_{\dot{B}_{2,1}^{\frac{d}{2}-1}}\le C\left\|\left(u_0,\omega_0\right)\right\|_{\dot{B}_{2,1}^{\frac{d}{2}-1}}.\tag{4.20}$$

记 $\delta_n\triangleq\left\|\dot{\Delta}_{n+1}\left(u_0,\omega_0\right)\right\|_{\dot{B}_{2,1}^{\frac{d}{2}-1}}$，我们知道初值 $\left(u_0,\omega_0\right)\in\dot{B}_{2,1}^{\frac{d}{2}-1}\left(\mathbb{R}^d\right)\times\dot{B}_{2,1}^{\frac{d}{2}-1}\left(\mathbb{R}^d\right)$，由此可得当 $n\to\infty$ 时，$\delta_n\to0$。通过(4.9)和(4.10)以及引理 3.4，易知 $\left\|\left(u^n,\omega^n\right)\right\|_{L_T^2(\dot{B}_{2,1}^{\frac{d}{2}})}$ 是有界的。结合(4.16)~(4.20)，我们得到对任意的 $T\in\left]0,T_*\right[$，

$$V^{n+1}\le C^*\delta_n+C^*T^{\frac{1}{2}}V^{n+1}+C^*\mathfrak{D}(T)V^n,\tag{4.21}$$

其中 $C^*>0$ 是一个常数。取 T_* 使得 $C^*T_*^{\frac{1}{2}}\le\frac{1}{4}$，$C^*\mathfrak{D}(T_*)\le\frac{1}{4}$，则

$$V^{n+1}\le\frac{4C^*}{3}\delta_n+\frac{1}{3}V^n.\tag{4.22}$$

这表明序列 $\left\{\left(u^n,\omega^n\right)\right\}$ 在 $L^2\left(0,T_*;\dot{B}_{2,1}^{\frac{d}{2}}\right)$ 中收敛。结合(4.1)和(4.2)，可得极限 (u,ω) 是系统(1.3)对于初值 $\left(u_0,\omega_0\right)\in\dot{B}_{2,1}^{\frac{d}{2}-1}\times\dot{B}_{2,1}^{\frac{d}{2}-1}$ 的解且

$$(u,\omega)\in\tilde{L}_T^\infty\left(\dot{B}_{2,1}^{\frac{d}{2}-1}\right)\cap L_T^1\left(\dot{B}_{2,1}^{\frac{d}{2}+1}\right).\tag{4.23}$$

类似于解局部存在的证明过程，可以得到解 (u,ω) 的唯一性。

5. 总结

微极流方程又称非对称流方程，由于微极流系统中耦合项的存在，使得对该系统的处理存在一定困难，对于微极流系统适定性的研究也有待完善。本文研究了 $d\,(d\ge2)$ 维不可压缩微极流方程在 L^2 框架下的临界 Besov 空间中的局部适定性，主要借鉴[13]的方法。首先构造逼近解列，证明逼近解列一致有界后，再通过证明逼近解列在解空间中为柯西序列，得到极限存在，随后证明该极限在分布的意义下为方程(1.3)的解，从而完成了存在性的证明。唯一性可由类似于柯西列的证明过程得到。本文的创新点在于在证明逼近解列一致有界的过程中，利用 Qian 等人在[9]中的技巧，可在使用 L^2 能量方法时将(1.3)中的 2ω 与

$\mathrm{curl}\,u, \mathrm{curl}\,\omega$ 相抵消，相较于[5]中运用 Green 矩阵的方法更为简便，当然本文这种方法只适用于 L^2 框架。

参考文献

[1] Eringen, A.C. (1966) Theory of Micropolar Fluid. *Journal of Mathematics and Mechanics*, **16**, 1-18. https://doi.org/10.1512/iumj.1967.16.16001

[2] Fujita, H. and Kato, T. (1964) On the Navier-Stokes Initial Value Problem. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, **16**, 269-315. https://doi.org/10.1007/BF00276188

[3] Cannone, M. (1995) Ondelettes, Paraproduits et Navier-Stokes. Diderot Editeur, Paris.

[4] Chemin, J.Y. (1999) Théorèmesd'unicité pour le système de Navier-Stokes tridimensionnel. *Journal d'Analyse Mathématique*, **77**, 27-50. https://doi.org/10.1007/BF02791256

[5] Chen, Q. and Miao, C. (2012) Global Well-Posedness for the Micropolar Fluid System in Critical Besov Spaces. *Journal of Differential Equations*, **252**, 2698-2724. https://doi.org/10.1016/j.jde.2011.09.035

[6] Song, Z. (2021) The Gevrey Analyticity and Decay for the Micropolar System in the Critical Besov Space. *Journal of Evolution Equations*, **21**, 4751-4771. https://doi.org/10.1007/s00028-021-00731-0

[7] Chen, M. (2013) Global Well-Posedness of the 2D Incompressible Micropolar Fluid Flows with Partial Viscosity and Angular Viscosity. *Acta Mathematica Scientia*, **33**, 929-935. https://doi.org/10.1016/S0252-9602(13)60051-X

[8] Dong, B., Li, J. and Wu, J. (2017) Global Well-Posedness and Large-Time Decay for the 2D Micropolar Equations. *Journal of Differential Equations*, **262**, 3488-3523. https://doi.org/10.1016/j.jde.2016.11.029

[9] Qian, C., Chen, H. and Zhang, T. (2022) Global Existence of Weak Solutions for 3D Incompressible Inhomogeneous Asymmetric Fluids. *Mathematische Annalen*, 1-39. https://doi.org/10.1007/s00208-022-02427-3

[10] Bahouri, H., Chemin, J.Y. and Danchin, R. (2011) Fourier Analysis and Nonlinear Partial Differential Equations. *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften*, Vol. 343, Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-642-16830-7

[11] Danchin, R. (2001) Local Theory in Critical Spaces for Compressible Viscous and Heat-Conductive Gases. *Communications in Partial Differential Equations*, **26**, 1183-1233. https://doi.org/10.1081/PDE-100106132

[12] Danchin, R. and Xu, J. (2017) Optimal Time-Decay Estimates for the Compressible Navier-Stokes Equations in the Critical L^p Framework. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, **224**, 53-90. https://doi.org/10.1007/s00205-016-1067-y

[13] Danchin, R. (2006) The Inviscid Limit for Density-Dependent Incompressible Fluids. *Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse*: *Mathématiques*, **15**, 637-688. https://doi.org/10.5802/afst.1133