Advances in Education 教育进展, 2019, 9(6), 695-698
Published Online November 2019 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/ae
https://doi.org/10.12677/ae.2019.96113

Hans汉斯

Research on the Design of Linear Algebra Classroom Learning Environment Based on Problem Solving

Juan Xu*, Ying Wang

School of Mathematics and Statistics, Linyi University, Linyi Shandong
Email: *xujuan0120@126.com

Received: Oct. 16th, 2019; accepted: Oct. 30th, 2019; published: Nov. 7th, 2019

Abstract

Problem-solving generally adopts the conceptual model of means-purpose. In order to solve the problem, learners must recognize and reconstruct the current knowledge and deduce the relationship between the knowledge and problem solving. Starting from the subject characteristics of linear algebra and the specific content, this paper introduces how to design the learning environment according to the content, and how to guide students to change from memory and calculation of machinery to understanding and application, thus improving the quality of teaching and learning.

Keywords

Problem-Solving, Linear Algebra, Design the Learning Environment

基于问题解决的线性代数课堂学习环境设计的探究

许　娟*，王　颖

临沂大学数学与统计学院，山东 临沂
Email: *xujuan0120@126.com

收稿日期：2019年10月16日；录用日期：2019年10月30日；发布日期：2019年11月7日

摘　要

问题解决一般采用“手段—目的”的概念构想模型，为了解决问题，学习者必须重新识别，并重构当前

*通讯作者。

文章引用: 许娟, 王颖. 基于问题解决的线性代数课堂学习环境设计的探究[J]. 教育进展, 2019, 9(6): 695-698.
DOI: 10.12677/ae.2019.96113

所学知识，推断出当前所学与问题解决之间的关系。本文从线性代数的学科特点以及具体教学内容着手，介绍了如何根据教学内容设计问题、解决问题的学习环境，并引导学生如何从机械的记忆和计算转向理解和应用，从而提高教与学的质量。

关键词

问题解决，线性代数，学习环境设计

1. 引言

线性代数课程是高等学校理工科各专业学生必修的重要基础理论课，它广泛应用于科学技术的各个领域，尤其是在计算机日益普及的今天，求解大型线性方程组、矩阵的特征值与特征向量等等已成为科学技术人员经常遇到的课题，因此学习和掌握线性代数的理论和方法是掌握现代科学技术以及从事科学研究的重要基础和手段[1]。因此，要通过教学环节逐步培养学生具有综合运用所学知识去分析和解决实际问题的能力。因为，问题解决是最真实的，是与学生联系最为紧密的学习活动。

2. 基于问题解决的线性代数课堂学习环境设计的必要性

2.1. 线性代数课堂教与学面临的问题

首先，线性代数本身内容比较抽象，大多数院校所采用的教材在内容的安排上多以概念、定理、公式推导为主，习题设计包括期末测试多是考察计算能力为主，鲜有实际问题的应用和真实情景的再现。

其次，线性代数的课时安排相对与其教学内容显得有些单薄(大多数为 32 或 48 学时)，于是就导致目前大多数教师在实践教学中为了完成进度主要采用纯传授式地教，而学生也主要以计算能力为目标进行必要的随堂或课后练习，以高中时代的大量刷题来应对考试。知识或信息由教师在课堂传授给学生，学生机械地接受和记忆，照搬照抄做题套路，缺少对知识的理解和应用，也就不会因地制宜地进行知识的有效迁移和应用。

2.2. 改变传统课堂学习环境的必要性

首先，从宏观角度看，目前大的教育环境正在发生深刻的变革，随着社会的发展，教育目标也在不断发生变化，社会期待在学校经过系统学习和训练的学生能够把所学用于实践，能够准确地识别问题、解决问题，期待学生能够展示他们的适应性专长。从个体而言，在学校接受系统学习的年龄也就在 6 岁到 22 岁之间，人生所接受的绝大多数教育来自校外，这就要求自身能够根据环境的变化对所学进行有效的重构和迁移。

其次，问题解决是最真实的，它是与学生联系最为紧密的学习活动，问题解决环境下建构的知识更容易理解，有说服力，也更能激发学生的学习兴趣和动力，进行更有意义的深入学习。单凭记忆而不在真实情景下应用过的知识更容易被遗忘，不能被有效利用。单纯的运算教学是有害的，因为它阻滞了后续学习、自主学习和自适应学习，限制过程的抽象表达能力[2] [3] [4]。

3. 基于问题解决的课堂学习环境设计的实践探究

如果教学以学生对教师所教内容的最初记忆为起点，那么，学生还需要理解知识的目前状态，并从实际出发去建设之、改进之，而且能够在不确定的情形下做出决定，当学生能够掌握更为复杂的概念的时候，就需要教师以恰当的发展方式展现给学生。以下用具体的实例来介绍如何根据教学内容来设计问题。

方阵的特征值和特征向量是线性代数中非常重要的内容，除了给定一个方阵会计算它的特征值和特征向量这种单纯的运算能力之外，我们可以引入以下问题，在引导学生解决的过程中加深概念的理解与应用，激发学生的学习动力和创造性。

3.1. 斐波那契数列

斐波那契数列是一个非常著名的数列，学生也比较熟悉，由数学家列昂纳多·斐波那契引入，它指的是如下的数列：1、1、2、3、5、8、13、21、34、55、89……斐波那契数列在现代物理、准晶体结构、化学等领域都有直接的应用。它的递推公式是 $F_{n+2}=F_{n+1}+F_n, n\in N^+$。

问题是：如何利用所学得到此数列的第 100 项？如何分析它的增长速度？

分析并引导学生思考：

1) 递推公式是一个代数方程不是方程组，如何转化为 $u_{n+1}=Au_n$ 的形式？即如何用 2 * 2 的方程组来代替原来的差分方程？

2) 如何定义向量 u_n？

具体过程如下：

建立方程组 $\begin{cases} F_{n+2}=F_{n+1}+F_n \\ F_{n+1}=F_{n+1} \end{cases}$，设 $u_n=\begin{pmatrix} F_{n+1} \\ F_n \end{pmatrix}$ (这一步是关键)，于是得到

$$u_{n+1}=\begin{pmatrix} F_{n+2} \\ F_{n+1} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} F_{n+1} \\ F_n \end{pmatrix}=Au_n$$

这样的问题就需要学习者必须重新识别并重构当前所学知识，并推断出当前所学的方阵的特征值与特征向量与所要解决的问题之间的关系，从而深入主动思考，加深概念的理解和运用。

3.2. 微分方程中的应用

在许多的应用问题中，有些量是随时间连续变化的，它们与下面的微分方程组有关：

$$\begin{gathered} x_1'=a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n \\ x_2'=a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n \\ \vdots \\ x_n'=a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n \end{gathered}$$

其中，$x_1,x_2,\cdots,x_n$ 是关于 t 的可导函数，a_{ij} 是常数，该方程组最主要的特征是线性性质，于是，我们可以把它写成如下形式：$x'(t)=Ax(t)$。

在课堂上，关键是要引导学生怎么将解一阶导数常系数线性方程转化为方阵求解特征值和特征向量的问题。

分析问题并转化：对于一般的方程 $x'=Ax$，它的解是形如 $x(t)=v\mathrm{e}^{\lambda t}$ 的函数的线性组合，其中 λ 是数，v 是非零向量，注意到

$$x'(t)=\lambda v\mathrm{e}^{\lambda t}，\quad Ax(t)=Av\mathrm{e}^{\lambda t}，$$

由于 $e^{\lambda t} \neq 0$ 于是有

$$x'(t) = Ax(t) \Leftrightarrow \lambda v = Av,$$

即当且仅当 λ 是矩阵的特征值，而 v 这个非零向量正是其所对应的特征向量。

这样就在当前所学与已有经验之间建立起了联系，为了加深理解，课堂上还可以通过例题来强化。比如求解 $\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = -x_1 + 2x_2 \\ \dfrac{dx_2}{dt} = x_1 - 2x_2 \end{cases}$，当然也可以放到一定的情境中练习，比如一些动力系统等等。

基金项目

国家自然科学基金(11701252)，临沂大学博士科研启动基金(LYDX2016BS080)。

参考文献

[1] 同济大学数学系, 编. 线性代数(第六版) [M]. 北京: 高等教育出版社, 2013.

[2] 孙春涛, 蹇红. 关于线性代数课程教学方法的探讨[J]. 教育教学论坛, 2014, 5(22): 70-71.

[3] 钟诚. 应用型本科院校高等数学课程教学改革的探析[J]. 教育现代化, 2017, 4(21): 28-29.

[4] Lay, D.C., Lay, S.R., McDonald, J.J., 著. 线性代数及其应用[M]. 刘深泉, 张万芹, 等, 译. 北京: 机械工业出版社, 2018.