**Advances in Education** 教育进展, 2023, 13(8), 5840-5844
Published Online August 2023 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/ae
https://doi.org/10.12677/ae.2023.138910

Hans汉斯

# 2022年全国甲卷第16题的多解探究

**余春蓉，陈　冲**

西华师范大学数学与信息学院，四川　南充

收稿日期：2023年7月15日；录用日期：2023年8月14日；发布日期：2023年8月22日

## 摘　要

**2022年全国甲卷16题主要是对高中知识余弦定理和求最值的知识点的考察，主要考察学科知识和学科素养。虽然难度中等，但此题题型和图像结构需要同学联系到解三角形的基本模型。余弦定理和几何知识本就联系紧密，这就使得本题可以从不懂的数学角度出现多种解法。同时在解三角形中要有方程思想、函数思想和不等式等思想。本文用波利亚解题思路引导进行一题多解，分析方法的优劣，提供在多解中灵活挑选最优解。**

## 关键词

**2022高考题，解法分析，数学核心素养**

# Exploration of Multiple Solutions to Question 16 of the 2022 National Grade A Exam

**Chunrong Yu, Chong Chen**

School of Mathematics and Information, China West Normal University, Nanchong Sichuan

Received: Jul. 15th, 2023; accepted: Aug. 14th, 2023; published: Aug. 22nd, 2023

## Abstract

**This question is the last blank filling question in the 2022 national volume A and B, focusing on the examinees' mastery of the Law of cosines, Pythagorean theorem, distance formula between two points, complementary Trigonometric functions formula, mean inequality, Discriminant, finding the maximum value of a function by using derivatives and other specific knowledge points, as well as the thought of combining logarithms with graphs, function thought understanding and applying**

文章引用: 余春蓉, 陈冲. 2022 年全国甲卷第 16 题的多解探究[J]. 教育进展, 2023, 13(8): 5840-5844.
DOI: 10.12677/ae.2023.138910

**mathematical concepts such as transformation of ideas. As the final question of filling in the blank, this question has a wide range of knowledge, low overall difficulty, and diverse methods. It has many flexible choices for students and requires high flexibility in their thinking. In terms of core competencies, this question examines aspects such as logical reasoning, computational ability, and geometric intuition.**

## Keywords

**2022 College Entrance Examination Questions, Solution Analysis, Mathematical Core Literacy**



## 1. 试题再现

已知 $\Delta ABC$ 中，点 $D$ 在边 $BC$ 上，$\angle ADB=120^\circ$，$AD=2$，$CD=2BD$。当 $\dfrac{AC}{AB}$ 取得最小值时，$BD=$ _____。

## 2. 试题分析

此题为 2022 年全国甲卷文科和理科最后一个填空题，重点考察考生对余弦定理、勾股定理、两点之间的距离公式、互补的三角函数公式、均值不等式、判别式、利用导数求函数最值等具体知识点的灵活应用的掌握情况，以及对数形结合思想、函数思想、转换思想等数学思想的理解与应用。在核心素养上，此题考察了逻辑推理、运算能力、几何直观等方面。

## 3. 波利亚解题解模型

解题是数学的心脏，波利亚实质上是把“解题能力”作为“中学”数学教学的主要目的[1]。波利亚在其著作《怎样解题》中指出问题解决可以分四个基本过程：弄清问题、拟定计划、实现计划、回顾。“弄清问题”是认识问题、并对问题进行表征的过程，我们必须理解题目，必须清楚地看到所要求的是什么；“拟定计划”的过程是在“过去的经验和已有的知识”基础上，探索解题思路的发现过程，我们必须知道各个知识点是如何相关的，根据未知量和数据之间的关系得到解题的思路并拟定一个方案；“实现计划”虽为主体工作，但较为容易完成，是思路打通之后具体实施信息资源的逻辑配置，我们需要耐心指导我们的方案；“回顾”是所完成的解答检查和讨论它，它最容易被忽视的阶段[2]。在整个解题表中“拟定计划”是关键环节和核心内容。

## 4. 解题探究

本题按照波利亚解题的步骤进行多解分析。

第一步，弄清问题。已知 $\angle ADB=120^\circ$，$AD=2$，$CD=2BD$，互余得 $\angle ADC=60^\circ$ 本题的未知是 $\dfrac{AC}{AB}$ 取得最小值 $BD$ 的值是多少？$AC$、$AB$ 与 $BD$ 的关系是什么样的？

第二步，拟定计划，找到已知条件和未知之间的联系。根据已知条件画出草图。想要求得 $\dfrac{AC}{AB}$ 取得最小值时 $BD$ 的值是多少。就需要把 $AC$ 除以 $AB$ 用 $BD$ 表示出来，我们可以选择余弦定理、构造直角三

角或建系方法把 $\frac{AC}{AB}$ 处理成只含有一个变量，然后通过均值不等式、判别式法或求导进行求函数最值[3]。

第三步，实现计划，利用找到的联系进行解题。

解题步骤（一）：用 $BD$ 表示 $\frac{AC}{AB}$ 建立关系式，可用以下三种方法求解

方法一：灵活运用余弦定理

根据题意画出三角形如图 1，设 $CD = 2BD = 2x > 0$，则在 $\Delta ABD$ 中，$AB^2 = BD^2 + AD^2 - 2BD \cdot AD\cos\angle ADB = x^2 + 4 + 2x$，则在 $\Delta ACD$ 中，$AC^2 = CD^2 + AD^2 - 2CD \cdot AD\cos\angle ADC = 4x^2 + 4 + 4x$，即 $\frac{AC^2}{AB^2} = \frac{4x^2 + 4 - 4x}{x^2 + 4 + 2x}$。

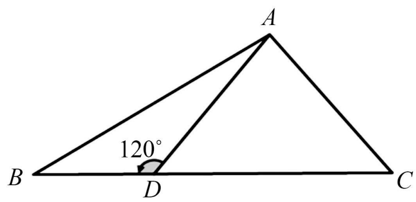


**Figure 1.** An example using cosine theorem
**图 1.** 运用余弦定理举例示意图

评析：在方法一中，已知 $CD = 2BD$ 就可以用未知数 $x$ 表示出 $CD$ 和 $BD$，方便运算。已知在三角形 $\Delta ABD$ 中的 $AD$ 和 $\angle ACD$ 已知 $\angle ADB = 120^\circ$，通过互余的条件推出 $\angle ADC = 60^\circ$。在 $\Delta ABD$ 中已知 $AD$、$BD$ 和 $\angle ADB$，在 $\Delta ACD$ 中已知 $CD$、$AD$ 和 $\angle ADC$。已知两边一角，就可以用余弦定理分别表示出 $AB$ 和 $AC$，使得 $\frac{AC^2}{AB^2}$ 用含有一个未知数的式子来表示。我们可知三角形的两边及其夹角直接求出第三边，可利用余弦定理。使用余弦定理的优点是学生比较熟悉、常用，是重点也是热点。但是本题需要在两个三角形中分别用余弦定理，这就要求学生思维明捷，同时对于互补角条件比较敏感。

方法二：构造直角三角形 $\Delta ABD$

如下图 2 所示，过 $A$ 过做 $CD$ 的垂线交于 $F$ 点，设 $CD = 2BD = 2x > 0$，则 $DF = 1$，$AF = \sqrt{3}$，$BF = x + 1$，$CF = 2x - 1$，$DF = 1$。在 $Rt\Delta ABE$ 中，$AB^2 = (x+1)^2 + 3 = x^2 + 2x + 4$，在 $Rt\Delta ACE$ $AC^2 = 3 + (2x-1)^2 = 4x^2 + 4 - 4x$，所以 $\frac{AC^2}{AB^2} = \frac{4x^2 + 4 - 4x}{x^2 + 4 + 2x}$。

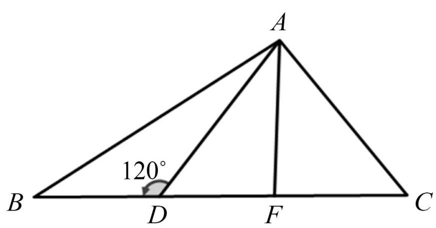


**Figure 2.** Schematic diagram of constructing right triangle
**图 2.** 构造直角三角形示意图

评析：在方法二中利用 $\angle ADB = 120^\circ$，我们就可以思考构造三个直角三角形 $\Delta AFD$，$\Delta AFC$，$\Delta AFB$，在 $\Delta AFD$ 中利用勾股定理分别表示出斜边 $DF = 1$，$AF = \sqrt{3}$，然后根据 $CD = 2BD$，设 $BD = 1$ 就可以表

示出 $BF = x+1$， $CF = 2x-1$。

直角三角形中边与角的关系式比较容易的，如果能在解三角形时构造直角三角形，会简化运算。勾股定理是初中都开始接触，学生更加熟悉，但对于高中生学习大量篇幅的三角函数后容易被思维定式，对于构造辅助线是学生容易忽略的。

方法三：建立直角坐标系

如下图 3 所示，令 $BD = x$，以 $D$ 为原点，$DC$ 为 $x$ 轴，建立平面直角坐标系，则 $C(2x,0)$， $A(1,\sqrt{3})$，$B(-x,0)$， 即 $\dfrac{AC^2}{AB^2} = \dfrac{(2x-1)^2+3}{(x+1)^2+3} = \dfrac{4x^2+4-4x}{x^2+4+2x}$。

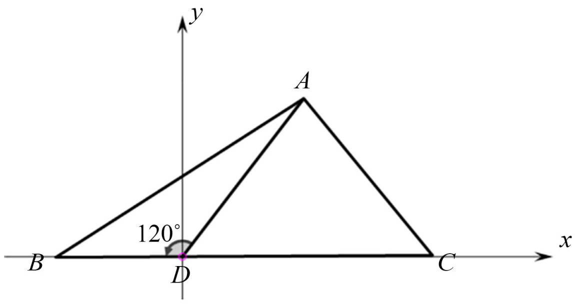


**Figure 3.** Schematic diagram of establishing rectangular coordinate system
**图 3.** 建立直角坐标系示意图

评析：$BF,CF$ 的长度可以用两点之间的坐标公式，这就使我们可以选择建立坐标系，把点 $C,A,B$ 的坐标表示出来，同样利用 $\angle ADB = 120^\circ, AD = 2, CD = 2BD$ 的关系，用含有一个未知数表示。建系用两点之间的距离公式表示线段长度，思路简单不易出错，但是学生可能缺乏建系意识。只有苏教版在习题中要求学生建立直角坐标系证明余弦定理，很多老师忽略坐标系的证明，导致学生面对平面几何图形，学生缺乏“建系”的意识。

解题步骤(二)：求解 $\dfrac{AC^2}{AB^2} = \dfrac{4x^2+4-4x}{x^2+4+2x}$ 的最值。

方法一：基本不等式

$\dfrac{4x^2+4-4x}{x^2+4+2x} = \dfrac{4(x^2+4+2x)-12(1+x)}{x^2+4+2x} = 4-\dfrac{12}{(x+1)+\dfrac{3}{x+1}} \geq 4-2\sqrt{3}$， 当且仅当 $x+1 = \dfrac{3}{x+1}$ 取得最小值。即 $x = \sqrt{3}-1$ 时等号成立。所以当 $\dfrac{AC}{AB}$ 取最小时， $BD = \sqrt{3}-1$。

评析：对于步骤一解出 $\dfrac{AC}{AB}$ 的含一个未知数的表达式，首先对式子处理成能用不等式的结构，因为分子和分母未知数的最高次数都为 2，可选用配凑法，把分母作为一个整体，这是本题的关键和难点，利用基本不等式使用的前提条件可求得未知数 $x$。当基本不等式与其他知识相结合时，往往是提供一个应用基本不等式的条件，然后利用常数代换求最值，学生在使用均值不等式一定要注意等号成立的条件。

方法二：判别式法

解析：记 $n = \dfrac{4x^2+4+4x}{x^2+4+2x}$ 则 $(4-n)y^2-(4+2n)x+(4-4n)=0$。由方程有解得：

$\Delta=(4+2n)^2-4(4-n)(4-4n)\geq 0$， $n^2-8n+4\leq 0$，解得 $4-2\sqrt{3}\leq n\leq 4+2\sqrt{3}$，所以 $n_{\min}=4-2\sqrt{3}$，此时 $y=\frac{2+t}{4-t}=\sqrt{3}-1$，所以当 $\frac{AC}{AB}$ 取最小时， $BD=\sqrt{3}-1$。

评析：若函数 $f(x)$ 可以化成一个系数含有 $y$ 关于 $x$ 的二次方程，$a(y)x^2+b(y)x+c(y)=0$ 在 $a(y)\neq 0$ 时，因为 $x,y$ 都是实数，所以由 $\Delta=[b(y)]^2-4a(y)c(y)=0$。因此在定义域内，我们可以求出 y 的函数最值。此种方法老师教授较少，对于学生也是最为陌生的一种方法。思路简单清晰，但是计算量不是最简单的，学生也几乎不会使用这种方法。

方法三：函数求导法

解析：令 $f(x)=\frac{4x^2+4+4x}{x^2+4+2x}=4-12\cdot\frac{x+1}{x^2+2x+4}$，求导得 $f(x)'=12\cdot\frac{x^2+2x-2}{(x^2+4+2x)^2}$。因为在 $(0,\sqrt{3}-1)$，$f(x)'<0$，在 $(\sqrt{3}-1,+\infty)$ 上， $f(x)'>0$。所以函数在 $(0,\sqrt{3}-1)$ 单调递减，在 $(\sqrt{3}-1,+\infty)$ 单调递。即在 $x=\sqrt{3}-1$ 函数 $f(x)$ 取得小值，故 $BD=\sqrt{3}-1$。

评析：利用导数的意义，函数求导判断单调性，从而求函数最值，是高中导数的一个重要应用[4]。这种方法对于大多数学生是最熟悉的，思路清晰，只是对于复杂函数求导本就是一个难点，计算复杂且易出错，耗时久，一般不是选择题和填空题的最佳选择。

第四步：回顾正面检验每一步，推理是有效的，演算是准确的，回顾这个解题过程可以看到当 $BD=\sqrt{3}-1$ 时满足 $\frac{AC}{AB}$ 取最小值。

## 5. 思考与延伸

利用余弦定理解决“一角 + 对边”模型的最值问题，常与三角函数、均值不等式和数形结合思想。在解三角形时必须具备方程思想、不等式思想、函数思想和坐标系思想[5]。可用不同的思想解三角形，使得一题多解，同时出现巧妙的解法。所谓一题多解，就是在解题中要求学生对于问题的条件和相关的结论能进行深入分析，从不同数学知识角度进行不同解法，学生在多解中分析出最简捷且快速的方法[6]。经过这样长期训练，能使学生数学思维得到发散，而且在考试中能快速思维迁移并择优解决数学问题。

在高考时学生可选择适合自己的方法快速和准确的解题。“均值不等式”在中学数学中求函数、几何的最值是研究函数与几何性质的一个极其重要的方面，尽管其严格的理论指导需要借助高等数学知识，但由于它涉及的知识面宽、方法灵活、应用广泛、训练思维能力的效果显著，所以在高考和数学竞赛中占有相当重要的地位。这启示我们，在数学教学中应该注重基础知识，熟练知识之间的内在逻辑和通性通法，融会贯通。

## 参考文献

[1] 李建华. 波利亚的“问题解决”理论及其发展[J]. 数学通报, 2009, 48(12): 9-14.

[2] 罗增儒，罗新兵. 波利亚的怎样解题表(续) [J]. 中学数学教学参考, 2004(5): 29-32.

[3] 赵娜. 浅谈函数最值的几种解法[J]. 科技创新与应用, 2012(8): 219-220.

[4] 程学祥. 探究导数在高中数学解题中的应用[J]. 数学学习与研究, 2018(15): 90.

[5] 彭红，杨旭. 新高考解三角形必备两个意识和五个思想[J]. 中学数学研究(华南师范大学版)，2022，486(11): 10-13.

[6] 杨孝斌，周国利，周娅. 两道“解三角形”高考题的解法研究、比较分析及教学启示——以全国 III 卷理科数学 2017 年第 17 题、2019 年第 18 题为例[J]. 兴义民族师范学院学报, 2020, 125(1): 112-116+124.