

Analyses of Rate Equations of Fiber Lasers with Three-Energy-Level Dopants

Xianzhu Meng

Shandong Provincial Key Laboratory of Optical Communication Science and Technology,
School of Physics Science and Information Engineering, Liaocheng University, Liaocheng Shandong
Email: mengxz@lcu.edu.cn

Received: Aug. 27th, 2015; accepted: Sep. 15th, 2015; published: Sep. 18th, 2015

Copyright © 2015 by author and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

Abstract

The rate equations of fiber lasers with three-energy-level dopants are anglicized. An expression of the unit step response of the fiber laser with three-energy-level dopants has been obtained from rate equations in a constant pump power. With these expressions, output characteristic of the fiber laser with three-energy-level dopants has been studied. The output characteristic of the fiber laser with three-energy-level dopants depends on its damping ratio, and the different damped oscillation curves and over-damped monotonic decay curves can be obtained for various damping ratio of the fiber laser with three-energy-level dopants. If $0 < \xi < 1$, the photon density curves of stimulated radiation of the fiber laser will be a damping oscillation curves. If $\xi = 1$ or $\xi > 1$, the photon density curves of stimulated radiation of the fiber laser will be non-oscillating monotonic decay curves.

Keywords

Lasers, Fiber Lasers, Three-Energy-Level Ion, Rate Equations, Pump Power

对三能级光纤激光器速率方程组的分析

孟现柱

聊城大学物理科学与信息工程学院, 山东省光通信科学与技术重点实验室, 山东 聊城
Email: mengxz@lcu.edu.cn

收稿日期: 2015年8月27日; 录用日期: 2015年9月15日; 发布日期: 2015年9月18日

文章引用: 孟现柱. 对三能级光纤激光器速率方程组的分析[J]. 应用物理, 2015, 5(8): 77-82.

<http://dx.doi.org/10.12677/app.2015.58011>

摘要

对三能级光纤激光器的速率方程组进行了分析。在恒定泵浦功率的情况下，求解了三能级光纤激光器的速率方程组，获得了三能级光纤激光器的单位阶跃响应。并利用三能级光纤激光器的单位阶跃响应对三能级光纤激光器的输出特性进行了研究，研究表明：三能级光纤激光器的输出特性取决于三能级光纤激光器的阻尼比 ξ 。对于不同的阻尼比，可以得到不同阻尼的衰减振荡曲线以及过阻尼时的单调衰减曲线。当 $0 < \xi < 1$ 时，三能级光纤激光器受激辐射的单位光子数密度将以频率 ω_d 做衰减振荡。当 $\xi = 1$ 或 $\xi > 1$ 时，三能级光纤激光器受激辐射的单位光子数密度将无振荡单调上升。

关键词

激光器，光纤激光器，三能级粒子，速率方程，泵浦功率

1. 引言

光纤激光器(Fiber Laser)是指用掺稀土元素玻璃光纤作为增益介质的激光器，目前已经成为重要的光源[1]-[4]，大量的理论与实验研究表明，可以用速率方程组来研究光纤激光器的特性。迄今，除了采用数值方法来求解速率方程组外[5][6]，人们还对速率方程组进行了解析求解[7]-[9]。例如，Chen [7]与 Zhang [8]等人获得了掺杂三能级光纤激光器速率方程组的解析解，窦汝海[9]等人利用三能级光纤激光器泵浦功率阈值的解析表达式对其阈值特性进行了具体分析。在本文中，我们在恒定泵浦功率的情况下，求解了三能级光纤激光器的速率方程组，获得了三能级光纤激光器的单位阶跃响应。并利用三能级光纤激光器的单位阶跃响应对三能级光纤激光器的输出特性进行了研究，结果表明：三能级光纤激光器的输出特性取决于三能级光纤激光器的阻尼比 ξ 。对于不同的阻尼比，可以得到不同阻尼的衰减振荡曲线以及过阻尼时的单调衰减曲线。当 $0 < \xi < 1$ 时，三能级光纤激光器受激辐射的单位光子数密度将以频率 ω_d 做衰减振荡。当 $\xi = 1$ 或 $\xi > 1$ 时，三能级光纤激光器受激辐射的单位光子数密度将无振荡单调上升。

2. 三能级光纤激光器的速率方程组

在三能级光纤激光器中，基质中有基态 E_1 、亚稳态 E_2 、激发态 E_3 三个能级，通过抽运过程能够以一定的抽运速率把处于基态 E_1 的粒子抽运到激发态 E_3 ，而处于激发态 E_3 的粒子能够通过自发辐射跃迁到亚稳态 E_2 或基态 E_1 ，处于亚稳态 E_2 的粒子能够通过自发辐射或受激辐射跃迁到基态 E_1 ，处于基态 E_1 的粒子通过受激吸收也能够跃迁到亚稳态 E_2 。

根据激光理论， dt 时间内从基态 E_1 泵浦到激发态 E_3 的粒子数密度：

$$dn_p = wn_1 dt \quad (1)$$

其中 w 为泵浦抽运速率， n_1 为处于基态 E_1 的粒子数密度。 dt 时间内从激发态 E_3 跃迁到基态 E_1 的自发辐射光子数密度：

$$dn_{31} = A_{31}n_3 dt \quad (2)$$

其中 A_{31} 为自发辐射爱因斯坦系数， n_3 为处于激发态 E_3 的粒子数密度。 dt 时间内从激发态 E_3 跃迁到亚稳态 E_2 的自发辐射光子数密度：

$$dn_{32} = A_{32}n_3 dt \quad (3)$$

其中 A_{32} 为自发辐射爱因斯坦系数。 dt 时间内从亚稳态 E_2 跃迁到激发态 E_3 的粒子数密度:

$$dn_{23} = w_{23}n_2 dt \quad (4)$$

其中 $w_{23} = B_{23}u(\nu)$ 为吸收速率, B_{23} 为受激吸收爱因斯坦系数, $u(\nu)$ 为光的辐射能密度, n_2 为处于亚稳态 E_2 的粒子数密度。 dt 时间内从亚稳态 E_2 跃迁到基态 E_1 的自发辐射光子数密度:

$$dn_{21} = A_{21}n_2 dt \quad (5)$$

其中 A_{21} 为自发辐射爱因斯坦系数。 dt 时间内从亚稳态 E_2 跃迁到基态 E_1 的受激辐射光子数密度:

$$dn'_{21} = w_{21}n_2 dt \quad (6)$$

其中 $w_{21} = B_{21}u(\nu)$ 为受激辐射速率, B_{21} 称为受激辐射爱因斯坦系数。 dt 时间内从基态 E_1 跃迁到亚稳态 E_2 的受激吸收光子数密度:

$$dn_{12} = w_{12}n_1 dt \quad (7)$$

其中 $w_{12} = B_{12}u(\nu)$ 为吸收速率, B_{12} 为受激吸收爱因斯坦系数, $u(\nu)$ 为光的辐射能密度。由式(1)~式(7), dt 时间内 n_1 的增量:

$$dn_1 = -dn_p - dn_{12} + dn_{31} + dn_{21} + dn'_{21} = (-wn_1 - w_{12}n_1 + A_{31}n_3 + A_{21}n_2 + w_{21}n_2) dt \quad (8)$$

由式(1)~式(7), dt 时间内 n_2 的增量:

$$dn_2 = dn_{32} - dn_{23} - dn_{21} - dn'_{21} + dn_{12} = (A_{32}n_3 - w_{23}n_2 - A_{21}n_2 - w_{21}n_2 + w_{12}n_1) dt \quad (9)$$

设处于基态 E_1 和亚稳态 E_2 、激发态 E_3 的总粒子数密度为:

$$n_z = n_1 + n_2 + n_3 \quad (10)$$

由式(8)~式(10)得描述亚稳态 E_2 的微分方程:

$$\frac{1}{\omega_0^2} \frac{d^2 n_2}{dt^2} + \frac{2\xi}{\omega_0} \frac{dn_2}{dt} + n_2 = n_{\max} \quad (11)$$

其中 $\omega_0^2 = (A_{31} - A_{21} - w_{21})(w_{12} - A_{32}) + (w + A_{31} + w_{12})(A_{32} + w_{23} + A_{21} + w_{21})$, 为三能级光纤激光器的固有频率; $\xi = \frac{A_{32} + w_{23} + A_{21} + w_{21} + w + A_{31} + w_{12}}{2\omega_0}$, 为三能级光纤激光器的阻尼比; $n_{\max} = \frac{wA_{32} + w_{12}A_{32} + w_{21}A_{31}}{\omega_0^2}$ 。

3. 分析与讨论

对于恒定泵浦抽运功率的三能级光纤激光器, w 为常数。这种系统的输出特性取决于系统的阻尼比 ξ , 由于 $\xi \neq 0$ 。下面分别讨论 $0 < \xi < 1$ 、 $\xi = 1$ 、 $\xi > 1$ 三种情况对应的输出特性。

3.1. 三能级光纤激光器的欠阻尼响应

当 $0 < \xi < 1$, 并输入单位阶跃函数时, 系统的单位阶跃响应为:

$$n_2 = 1 - \frac{e^{-\xi\omega_0 t}}{\sqrt{1-\xi^2}} \sin(\omega_d t + \theta) \quad (12)$$

其中 $\theta = \tan^{-1} \sqrt{1-\xi^2} / \xi$, $\omega_d = \omega_0 \sqrt{1-\xi^2}$, 这时 n_2 将以频率 ω_d 做衰减振荡。 ξ 越大, 衰减越快, 可见此时三能级光纤激光器处于欠阻尼状态。由式(5)、式(12)得:

$$\frac{dn_{21}}{dt} = \left[1 - \frac{e^{-\zeta\omega_0 t}}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sin(\omega_d t + \theta) \right] A_{21} \quad (13)$$

这时单位时间内从亚稳态 E_2 跃迁到基态 E_1 的自发辐射的单位光子数密度将以频率 ω_d 做衰减振荡。
由式(6)、式(12)得:

$$\frac{dn'_{21}}{dt} = \left[1 - \frac{e^{-\zeta\omega_0 t}}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sin(\omega_d t + \theta) \right] w_{21} \quad (14)$$

这时单位时间内从亚稳态 E_2 跃迁到基态 E_1 的受激辐射的单位光子数密度将以频率 ω_d 做衰减振荡。

3.2. 三能级光纤激光器的临界阻尼响应

当 $\zeta = 1$ ，并输入单位阶跃函数时，系统的单位阶跃响应为:

$$n_2 = 1 - (1 + \omega_0 t) e^{-\omega_0 t} \quad (15)$$

这时 n_2 将无振荡单调上升，可见此时三能级光纤激光器处于临界阻尼状态。由式(5)、式(15)得:

$$\frac{dn_{21}}{dt} = \left[1 - (1 + \omega_0 t) e^{-\omega_0 t} \right] A_{21} \quad (16)$$

这时单位时间内从亚稳态 E_2 跃迁到基态 E_1 的自发辐射的单位光子数密度将无振荡单调上升。
由式(6)、式(15)得:

$$\frac{dn'_{21}}{dt} = \left[1 - (1 + \omega_0 t) e^{-\omega_0 t} \right] w_{21} \quad (17)$$

这时单位时间内从亚稳态 E_2 跃迁到基态 E_1 的受激辐射的单位光子数密度将无振荡单调上升。

3.3. 三能级光纤激光器的过阻尼响应

当 $\zeta > 1$ ，并输入单位阶跃函数时，系统的单位阶跃响应为:

$$n_2 = 1 - \frac{1}{2\sqrt{1-\zeta^2}} \sin\left(\frac{e^{\lambda_1 \omega_0 t}}{\lambda_1} + \frac{e^{\lambda_2 \omega_0 t}}{\lambda_2}\right) \quad (18)$$

其中 $\lambda_1 = -\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1}$ ， $\lambda_2 = -\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1}$ ，这时 n_2 将无振荡单调上升，可见此时三能级光纤激光器处于过阻尼状态，近似一阶系统。由式(5)、式(18)得:

$$\frac{dn_{21}}{dt} = \left[1 - \frac{1}{2\sqrt{1-\zeta^2}} \sin\left(\frac{e^{\lambda_1 \omega_0 t}}{\lambda_1} + \frac{e^{\lambda_2 \omega_0 t}}{\lambda_2}\right) \right] A_{21} \quad (19)$$

这时单位时间内从亚稳态 E_2 跃迁到基态 E_1 的自发辐射的单位光子数密度将无振荡单调上升。
由式(6)、式(18)得:

$$\frac{dn'_{21}}{dt} = \left[1 - \frac{1}{2\sqrt{1-\zeta^2}} \sin\left(\frac{e^{\lambda_1 \omega_0 t}}{\lambda_1} + \frac{e^{\lambda_2 \omega_0 t}}{\lambda_2}\right) \right] w_{21} \quad (20)$$

这时单位时间内从亚稳态 E_2 跃迁到基态 E_1 的受激辐射的单位光子数密度将无振荡单调上升。图 1 给出了不同阻尼比的三能级光纤激光器的输出特性曲线。

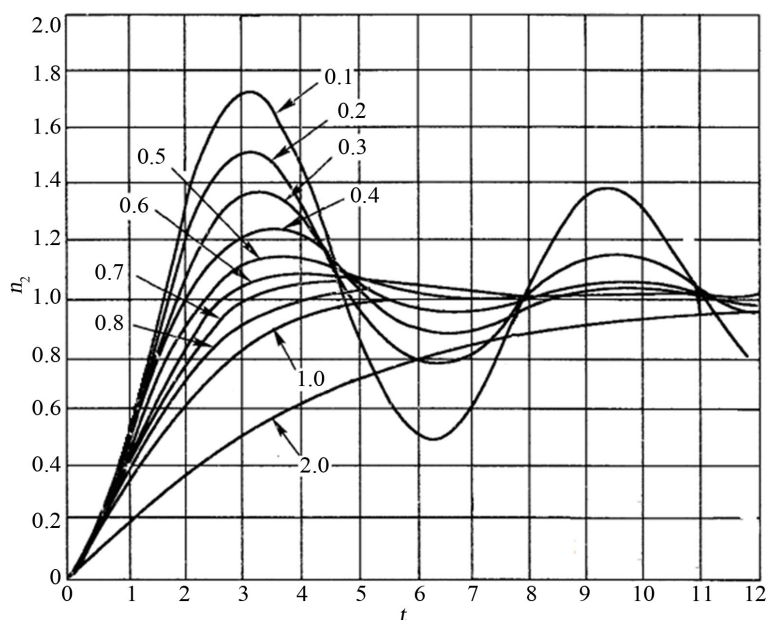


Figure 1. The output characteristic of fiber lasers with three-energy-level dopants
图 1. 三能级光纤激光器的输出特性曲线

4. 结论

综上所述可以看出,三能级光纤激光器的输出特性取决于三能级光纤激光器的阻尼比 ζ 。对于不同的阻尼比,可以得到不同阻尼的衰减振荡曲线以及过阻尼时的单调衰减曲线。当 $0 < \zeta < 1$ 时,三能级光纤激光器受激辐射的单位光子数密度将以频率 ω_d 做衰减振荡。当 $\zeta = 1$ 或 $\zeta > 1$ 时,三能级光纤激光器受激辐射的单位光子数密度将无振荡单调上升。

基金项目

国家自然科学基金(批准号: 11275089, 11375081)和山东省自然科学基金(批准号: ZR2011FQ001)资助的课题。

参考文献 (References)

- [1] Fu, L.B., Ibsen, M., Richardson, D.J., et al. (2005) Compact high-power tunable three-level operation of double cladding Nd-doped fiber laser. *Photonics Technology Letters*, **17**, 306-308. <http://dx.doi.org/10.1109/lpt.2004.840034>
- [2] Huo, Y., Cheo, P.K. and King, G.G. (2005) Modeling and experiments of actively Q-switched Er^{3+} - Yb^{3+} codoped cladding-pumped fiber lasers. *Journal of Quantum Electronics*, **41**, 573-580.
- [3] Wang, Y., Xu, C. and Po, H. (2004) Thermal effects in kilowatt fiber lasers. *Photonics Technology Letters*, **16**, 63-65. <http://dx.doi.org/10.1109/LPT.2003.818913>
- [4] Nilsson, J., Clarkson, W.A., Selvas, R., et al. (2004) High-power wavelength-tunable cladding-pumped rare-earth-doped silica fiber lasers. *Optical Fiber Technology*, **10**, 5-30. <http://dx.doi.org/10.1016/j.yofte.2003.07.001>
- [5] 彭跃峰, 唐淳, 蒋建锋 (2004) 掺 Yb^{3+} 双包层光纤激光器的数值分析. *强激光与粒子束*, **16**, 1259-1262.
- [6] 陈吉欣, 隋展, 陈福深, 等 (2005) 单点侧向泵浦掺 Yb^{3+} 双包层光纤激光器理论研究. *强激光与粒子束*, **17**, 673-676.
- [7] Chen, J., Zhu, X. and Sibbett, W. (1992) Derivation of the threshold pump power of erbium-doped fiber lasers. *Optics Letters*, **17**, 926-928. <http://dx.doi.org/10.1364/OL.17.000926>
- [8] Zhang, L., Duan, Z. and Chen, J. (2006) Analytical solutions to rate equations of fiber lasers containing three-energy-

level ions. *Optics Communications*, **267**, 149-153. <http://dx.doi.org/10.1016/j.optcom.2006.06.008>

- [9] 窦汝海, 陈建国, 段志春, 张利平 (2007) 三能级光纤激光器速率方程组的阈值解析解. *强激光与粒子束*, **19**, 1608-1613.