Creative Education Studies 创新教育研究, 2020, 8(6), 1001-1006
Published Online December 2020 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/ces
https://doi.org/10.12677/ces.2020.86163

Hans汉斯

关于解决数学分析和高等代数问题的教学探讨

周秀香

岭南师范学院数学与统计学院，广东 湛江
Email: zhouxiuxiang@163.com

收稿日期：2020年11月26日；录用日期：2020年12月9日；发布日期：2020年12月16日

摘　要

数学分析、高等代数两门课程的理论和思想有着很大的不同，但两者之间又有着密切的联系。本文通过典型的例题，结合不同的解题思想，探究数学分析和高等代数有关问题及解法的相互融合和渗透。

关键词

数学分析，高等代数，解法融合

Teaching Research of Solving Methods of Problems between Mathematical Analysis and Advanced Algebra

Xiuxiang Zhou

School of Mathematics and Statistics, Lingnan Normal University, Zhanjiang Guangdong
Email: zhouxiuxiang@163.com

Received: Nov. 26th, 2020; accepted: Dec. 9th, 2020; published: Dec. 16th, 2020

Abstract

The theory and thoughts in mathematical analysis and advanced algebra are different; however they are closely related to each other. In this paper, we illustrate mutual penetration of solving methods of problem between mathematical analysis and advanced algebra by some typical examples.

文章引用: 周秀香. 关于解决数学分析和高等代数问题的教学探讨[J]. 创新教育研究, 2020, 8(6): 1001-1006.
DOI: 10.12677/ces.2020.86163

Keywords

Mathematical Analysis, Advanced Algebra, Mutual Penetration of Solving Method

1. 前言

数学分析与高等代数是数学专业的两门基础课程，也是两门必修课。数学分析主要内容包括极限、连续、微分和积分等；高等代数主要内容包括多项式、行列式、线性方程组、矩阵和特征值等[1] [2]。两门课程中的内容不同，问题不同，那么解决问题的方法和思想自然不同。但是它们之间又有着很密切的联系。例如矩阵的正定性在求解函数极值问题中的应用，函数的连续性在矩阵分析中的应用[3]。因此，如何在教学中将这两门课的内容更好地交叉、融合，我们作了积极的探索。本文通过列举几道典型的题目，探究教师在习题课中如何深入挖掘数学分析和高等代数两个学科之间知识和方法的内在联系，进而培养学生综合运用所学知识解决问题的能力。

2. 高等代数在数学分析中的应用

在分析中正确应用高等代数的知识和思想，可以简化计算过程，从而有效提高数学分析教学质量和教学效率。

首先，介绍一道数学分析中的证明题[4]。

例 1.1 设函数 $f(x)$ 在 $a \le x \le b$ 上有定义，并且存在二阶导数，证明：对于任意 $a<x<b$，存在 $\xi \in (a,b)$，有

$$\frac{1}{x-b}\left[\frac{f(x)-f(a)}{x-a}-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\right]=\frac{1}{2}f''(\xi).$$

分析：此题可以借助泰勒公式以及柯西中值定理等结果证明，而我们采用行列式构造辅助函数的方法。

证明：对于任意 $t,x \in (a,b)$，构造

$$F(t)=\begin{vmatrix} f(t) & t^2 & t & 1 \\ f(x) & x^2 & x & 1 \\ f(a) & a^2 & a & 1 \\ f(b) & b^2 & b & 1 \end{vmatrix}.$$

利用行列式性质可得 $F(a)=F(b)=F(x)=0$. 运用两次罗尔定理，存在 $\xi \in (a,b)$ 使 $F''(\xi)=0$。又因为

$$F''(\xi)=\begin{vmatrix} f''(\xi) & 2 & 0 & 0 \\ f(x) & x^2 & x & 1 \\ f(a) & a^2 & a & 1 \\ f(b) & b^2 & b & 1 \end{vmatrix}=f''(\xi)\begin{vmatrix} x^2 & x & 1 \\ a^2 & a & 1 \\ b^2 & b & 1 \end{vmatrix}-2\begin{vmatrix} f(x) & x & 1 \\ f(a) & a & 1 \\ f(b) & b & 1 \end{vmatrix},$$

所以

$$\frac{f''(\xi)}{2}=\frac{\begin{vmatrix} f(x) & x & 1 \\ f(a) & a & 1 \\ f(b) & b & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x^2 & x & 1 \\ a^2 & a & 1 \\ b^2 & b & 1 \end{vmatrix}}=\frac{\begin{vmatrix} f(x) & x & 1 \\ f(a)-f(x) & a-x & 0 \\ f(b)-f(a) & b-a & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x^2 & x & 1 \\ a^2 & a & 1 \\ b^2 & b & 1 \end{vmatrix}},$$

整理即得所证。证毕

特征值和特征向量是高等代数课程中的重要概念，它在生物学、力学、天气的稳定性等方面应用广泛[5]。下面给出特征值和特征向量在条件极值中的应用。

例 1.2 求函数 $f(x_1,x_2,x_3)=3x_1^2+4x_2^2+5x_3^2$ 在 $x_1^2+x_2^2+x_3^2=1$ 约束下的最小值。

解：(拉格朗日乘子法)由于函数 f 在单位球面 $x_1^2+x_2^2+x_3^2=1$ 上连续，从而必在此球面某点达到最小值。进一步，最小值点一定是条件稳定点。设

$$F(x_1,x_2,x_3,\lambda)=3x_1^2+4x_2^2+5x_3^2-\lambda\left(x_1^2+x_2^2+x_3^2-1\right).$$

求 F 的一阶偏导数，并令其为零，则有

$$\begin{cases} F_{x_1}(x_1,x_2,x_3,\lambda)=6x_1-2\lambda x_1=0, \\ F_{x_2}(x_1,x_2,x_3,\lambda)=8x_2-2\lambda x_2=0, \\ F_{x_3}(x_1,x_2,x_3,\lambda)=10x_3-2\lambda x_3=0, \\ F_{\lambda}(x_1,x_2,x_3,\lambda)=x_1^2+x_2^2+x_3^2-1=0. \end{cases} \tag{1}$$

求得(1)的解 $\lambda=3,x_1=\pm1,x_2=x_3=0$ 或 $\lambda=4,x_2=\pm1,x_1=x_3=0$ 或 $\lambda=5,x_3=\pm1,x_1=x_2=0$ 。因此，最小值为 $f(\pm1,0,0)=3$ 。

(特征值法)因为约束条件为标准类型，令

$$A=\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix},\quad X=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}.$$

则有

$$f(x_1,x_2,x_3)=X^{\mathrm{T}}AX.$$

从而方程组(1)中的前三个式子表示为 $AX=\lambda X$ 。这样，找寻 f 的极值点问题转化为求解 $AX=\lambda X$ 的非零解，即方阵 A 的特征向量。又由于条件限制为 $X^{\mathrm{T}}X=1$，所以

$$f(X)=X^{\mathrm{T}}AX=\lambda X^{\mathrm{T}}X=\lambda.$$

因此 f 的最小值是对应矩阵 A 的最小特征值。显然 A 的特征值为

$$\lambda_1=3,\lambda_2=4,\lambda_3=5.$$

因此，最小值为 3。

注：通过比较不难发现，特征值法求解过程比较抽象，但注意到 f 在单位球面上的最小值就是其对应矩阵的最小特征值，又比较直观；拉格朗日乘子法是将条件极值问题转化为无条件极值问题，比较容易理解。在讲解类似题目时，如果可以同时介绍拉格朗日乘子法和特征值法这两种方法，那么学生会发现数学分析和高等代数这两个不同学科的知识点之间的联系。这样不仅能加深对相关知识的理解，真正

DOI: 10.12677/ces.2020.86163

构建起大学数学知识体系，而且能激发学习的兴趣和提高学习的积极性。

3. 数学分析在高等代数中的应用

高等代数中的某些问题，若结合数学分析的思想和方法，则问题解决起来可能会相对简洁。下面分别利用数学分析中的函数连续性和无穷积分解决某些矩阵问题。

例 2.1 设 A 是 n 阶实对称矩阵。如果存在两个 n 维实向量 X_1，X_2 使得 $X_1^{\mathrm{T}}AX_1<0, X_2^{\mathrm{T}}AX_2>0$，则存在非零的 n 维实向量 X_0 使得 $X_0^{\mathrm{T}}AX_0=0$ 。

分析：此题可以根据矩阵 A 的正、负惯性指数都不为零，找到可逆矩阵 C 使得 $C^{\mathrm{T}}AC$ 为对角矩阵，并且对角线上至少有一个 1 和一个−1，从而构造出满足条件的实向量 X_0。这里运用数学分析中的函数思想给出一个证明。

证明：注意到两个向量 X_1 和 X_2 非零并线性无关。否则 $X_2=\mu X_1$。于是，$X_2^{\mathrm{T}}AX_2=\mu^2X_1^{\mathrm{T}}AX_1<0$，与 $X_2^{\mathrm{T}}AX_2>0$ 产生矛盾。

对 $t\in[0,1]$，令 $Y_t=(1-t)X_1+tX_2$。由于 X_1 和 X_2 线性无关，所以 Y_t 是非零向量。令 $f(t)=Y_t^{\mathrm{T}}AY_t$，则 f 在[0,1]上连续且 $f(0)<0<f(1)$。由介值定理可得，存在 $t_0\in[0,1]$ 使得

$$f(t_0)=Y_{t_0}^{\mathrm{T}}AY_{t_0}=0.$$

取 $X_0=Y_{t_0}$ 即得所证。证毕

例 2.2 设 $a_i>0(i=1,2,\cdots,n)$ 且互不相等，证明矩阵

$$A=\left(\frac{1}{a_i+a_j}\right)_{n\times n}$$

为正定矩阵。

证明：显然 A 是实对称矩阵。对于任意非零向量 $X^{\mathrm{T}}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，有

$$f(X)=X^{\mathrm{T}}AX=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{1}{a_i+a_j}\right)x_ix_j=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}x_ix_j\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-(a_i+a_j)t}\mathrm{d}t$$
$$=\int_0^{+\infty}\left(\sum_{i=1}^{n}\mathrm{e}^{-a_it}x_i\right)\left(\sum_{j=1}^{n}\mathrm{e}^{-a_jt}x_j\right)\mathrm{d}t=\int_0^{+\infty}\left(\sum_{i=1}^{n}\mathrm{e}^{-a_it}x_i\right)^2\mathrm{d}t.$$

根据条件可得 $(\mathrm{e}^{-a_1t}x_1,\mathrm{e}^{-a_2t}x_2,\cdots,\mathrm{e}^{-a_nt}x_n)$ 非零，因此上式中的被积函数大于零。从而 $f(X)$ 正定，即 A 正定。证毕

注：以上是纯粹的代数问题。正所谓“它山之石可以攻玉”，在证明过程中适当运用数学分析的思想方法还是行之有效的。

4. 数学分析和高等代数相结合

下面的两个例子是高等代数与数学分析相结合的问题，所以在解法上也是将两者交替使用[6] [7]。

例 3.1 设函数 f_1,f_2 存在导数，求极限

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\begin{vmatrix} f_1(x) & f_1(x+h) \\ f_2(x) & f_2(x+h) \end{vmatrix}.$$

解：由行列式的性质，原式变形为

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\begin{vmatrix} f_1(x) & f_1(x+h)-f_1(x) \\ f_2(x) & f_2(x+h)-f_2(x) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} f_1(x) & \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f_1(x+h)-f_1(x)}{h} \\ f_2(x) & \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f_2(x+h)-f_2(x)}{h} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} f_1(x) & f_1'(x) \\ f_2(x) & f_2'(x) \end{vmatrix}.$$

注：从上面的例子可以看到，学科内容相互交叉，思想方法相互渗透。

例 3.2 设 A 是 n 阶正定矩阵， B 是非零实数列向量，a 为实数。设方程组 $(A+aI)X=B$ 的解为 $X=X(a)$，证明函数 $f(a)=|X(a)|$ 在 $[0,+\infty)$ 上严格递减。

证明：因为 A 是 n 阶正定矩阵，所以存在正交阵 S，使得

$$S^{\mathrm{T}}AS=\mathrm{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n), \tag{2}$$

其中 $\lambda_i>0, i=1,2,\cdots,n$ 。将(2)式代入线性方程组 $(A+aI)X=B$ 可得

$$S\,\mathrm{diag}(\lambda_1+a,\lambda_2+a,\cdots,\lambda_n+a)S^{\mathrm{T}}X=B,$$

即

$$\mathrm{diag}(\lambda_1+a,\lambda_2+a,\cdots,\lambda_n+a)S^{\mathrm{T}}X=S^{\mathrm{T}}B.$$

令

$$Y=S^{\mathrm{T}}X=(y_1,y_2,\cdots,y_n)^{\mathrm{T}},$$
$$C=S^{\mathrm{T}}B=(c_1,c_2,\cdots,c_n)^{\mathrm{T}}.$$

于是 $|Y|=|X|$，并且 $\mathrm{diag}(\lambda_1+a,\lambda_2+a,\cdots,\lambda_n+a)Y=C$ 。从而 $y_i=\dfrac{c_i}{\lambda_i+a}$ 。进一步，

$$f(a)=|X(a)|=|Y(a)|=\left[\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{c_i}{\lambda_i+a}\right)^2\right]^{1/2}。$$

当 $c_i\neq 0$ 时， $\left|\dfrac{c_i}{\lambda_i+a}\right|=\dfrac{|c_i|}{\lambda_i+a}$ 关于变量 a 严格单调递减；当 $c_i=0$ 时，此项为零。由于 B 是非零向量，所以 $C=S^{\mathrm{T}}B$ 也是非零向量，即 c_i 不全为零。因此，函数 $f(a)=|X(a)|$ 在 $[0,+\infty)$ 上严格递减。

5. 结束语

习题教学是数学教学中一种必不可少的课型，其目的在于巩固和深化基础知识，培养和提高学生分析问题、解决问题的能力。通过探讨得知，高等代数与数学分析二者之间在解决问题时可以相互渗透。本着完整原则和融合原则打破数学科目的界限，可以充分发挥习题课的作用。因此，在教学过程中，教师要强调不同学科的交融性，培养学生融合知识的能力，从而达到培养其创新思维能力的效果。

基金项目

此项工作得到国家自然科学基金项目资助，项目批准号：11926331。

参考文献

[1] 北京大学数学系前代数小组. 高等代数(第四版) [M]. 北京: 高等教育出版社, 2013.

[2] 华北师范大学数学系. 数学分析(第四版) [M]. 北京: 高等教育出版社, 2010.
[3] 余昱. 函数连续性在矩阵分析中的使用方法及作用[J]. 教育学研究, 2013(7): 264.
[4] 蒲和平. 大学生数学竞赛教程[M]. 北京: 电子工业出版社, 2014: 350.
[5] 周琴. 矩阵特征值和特征向量在实际中的应用及其实现[J]. 高师理科学刊, 2019(7): 8-10.
[6] 陈凌云. 数学分析与高等代数综合性问题的解法探讨[J]. 丽水师范专科学校学报, 2002, 24(5): 66-68.
[7] 关静. 大学数学习题课上多学科融合题目的选择[J]. 科学创新导报, 2013(32): 107.