Creative Education Studies 创新教育研究, **2021, 9(3), 577-584**
Published Online June 2021 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/ces
https://doi.org/10.12677/ces.2021.93094

高等数学中求极限的若干方法

梁志鹏，杨进霞*

塔里木大学信息工程学院，新疆 阿拉尔
Email: *1256504637@qq.com

收稿日期：2021年3月8日；录用日期：2021年6月4日；发布日期：2021年6月11日

摘 要

极限是高等数学中的一个重要的概念，因此研究如何求解极限是很有必要的，本文主要探讨、归纳总结在高等数学教学中求极限的一般常用方法，至于其余更多的方法，有赖于人们去创造和发现。

关键词

高等数学，极限，方法

Some Methods to Find Limit in Advanced Mathematics

Zhipeng Liang, Jinxia Yang*

School of Information Engineering, Tarim University, Alar Xinjiang
Email: *1256504637@qq.com

Received: Mar. 8th, 2021; accepted: Jun. 4th, 2021; published: Jun. 11th, 2021

Abstract

Limit is an important concept in higher mathematics, so it is necessary to study how to solve the limit. This paper mainly discusses and summarizes the general methods of limit in higher mathematics teaching. As for the other more methods, it depends on people to create and discover.

Keywords

Advanced Mathematics, Limit, Method

*通讯作者。

文章引用: 梁志鹏, 杨进霞. 高等数学中求极限的若干方法[J]. 创新教育研究, 2021, 9(3): 577-584.
DOI: 10.12677/ces.2021.93094

1. 引言

高等数学是以函数为研究对象、以极限理论与极限方法为基本方法、以微积分学为主要内容的一门学科，而极限思想贯穿于高等数学始终，比如导数、微积分的概念、级数的敛散性等都要用到极限理论，其重要性及难易程度不言而喻，尤其所讨论的求极限这类问题一般来说都比较困难，没有统一的方法。现就求解极限的方法做一归纳，有助于初学者更好地应用。

2. 极限的若干方法

2.1. 利用极限的四则运算法则[1]求函数的极限

1) 直接利用四则运算性质求解

若 $\lim f(x)=A, \lim g(x)=B$，则

① $\lim\left[f(x)\pm g(x)\right]=\lim f(x)\pm\lim g(x)=A\pm B$

② $\lim\left[f(x)\cdot g(x)\right]=\lim f(x)\cdot\lim g(x)=A\cdot B$

③ $\lim\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\lim f(x)}{\lim g(x)}=\dfrac{A}{B}(B\neq 0)$

这种方法主要应用于求一些简单函数的和、差、积、商的极限。一般情况下，要使用这些法则，往往需要根据具体情况对函数做某些恒等变形或者化简才可以解决，那么常用的变形或化简有分式的约分或通分、分式的分解、分子或分母的有理化、三角函数的恒等变形、某些求和或求积公式以及适当的变量替换。

例 1. 求 $\lim\limits_{x\to 1}\left(3x^2-5x+8\right)$

从初等函数的连续性出发，将 1 直接代入函数是有意义的，即可得到极限值。

解 $\lim\limits_{x\to 1}\left(3x^2-5x+8\right)=\lim\limits_{x\to 1}3x^2-\lim\limits_{x\to 1}5x+\lim\limits_{x\to 1}8=6$

总结：一些简单的函数可以通过其连续性，可以得到函数的极限值等于其函数值。

2) 因式分解消去零因子求极限

有些分式结构的函数，如果用直接代入法会出现分子或者分母为零的情形，使得原函数没有意义。

做法：将所给函数因式分解，分子分母约去零因子。

例 2. $\lim\limits_{x\to 9}\dfrac{x-2\sqrt{x}-3}{x-9}$

分析 当 $x\to 9$ 时，分子、分母的极限都为零，通过观察，分子、分母中含有公因子 $\sqrt{x}-3$。

解 $\lim\limits_{x\to 9}\dfrac{x-2\sqrt{x}-3}{x-9}=\lim\limits_{x\to 9}\dfrac{\left(\sqrt{x}-3\right)\left(\sqrt{x}+1\right)}{\left(\sqrt{x}-3\right)\left(\sqrt{x}+3\right)}=\lim\limits_{x\to 9}\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+3}=\dfrac{4}{6}=\dfrac{2}{3}$

3) 利用无穷大量与无穷小量的倒数关系求极限

例 3. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+2x-5}{x^2+x-6}$

分析 当$x \to 2$时，分母的极限是零，分子的极限是 3。根据实际情况分母不能为零，所以利用无穷大量和无穷小量的倒数关系来确定其极限。

解 因为 $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+x-6}{x^2+2x-5}=\dfrac{\lim\limits_{x\to 2}\left(x^2+x-6\right)}{\lim\limits_{x\to 2}\left(x^2+2x-5\right)}=\dfrac{0}{3}=0$

所以$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+2x-5}{x^2+x-6}=\infty$

4) 有理根式的函数极限，通常采用分子、分母有理化的方法来求极限

分析 当$x \to 0$时，分子的极限为零，分母的极限是零。

做法：通常采用平方差的关系将某一部分根式去掉，然后再利用四则运算来求解。

例 4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{1-\sqrt{1+x^2}}$

解 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{1-\sqrt{1+x^2}}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2\left(1+\sqrt{1+x^2}\right)}{\left(1-\sqrt{1+x^2}\right)\left(1+\sqrt{1+x^2}\right)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2\left(1+\sqrt{1+x^2}\right)}{1-\left(1+x^2\right)}=-\lim\limits_{x\to 0}\left(1+\sqrt{1+x^2}\right)=-2$

5) 分子分母降幂法求极限

对于某些函数求极限时，我们可以通过对分子分母同时除以最高次幂来求极限。

例 5. 求 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3-3x+1}{3x^3+4x-2}$

该题中我们发现分子分母的最高次幂是x^3，所以同时分子分母同时除以x^3，然后求得极限，又注意到分子分母的后两项极限为零，最后直接得极限值。

解 原式$=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2-\dfrac{3}{x^2}+\dfrac{1}{x^3}}{3+\dfrac{4}{x}-\dfrac{2}{x^3}}=\dfrac{2}{3}$

归纳[2]：当$a_0 \ne 0, b_0 \ne 0$，m 和 n 为非负整数时，有

$$\lim_{x\to\infty}\frac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+\cdots+b_m}=\begin{cases}0, 当n<m\\ \infty, 当n>m\\ \dfrac{a_0}{b_0}, 当n=m\end{cases}$$

2.2. 利用无穷小求极限

利用无穷小求函数的极限一般有两种方法：一种是利用无穷小的性质，即有界函数与无穷小的积还是无穷小；另一种是利用等价无穷小替换的方法求极限，但应用该方法时，我们要注意只能对乘积和商进行替换，对和差不能替换，否则得到错解。

例 6. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+2}{x^2+1}(\cos x+1)$

解 当$x\to\infty$时，$\dfrac{x+2}{x^2+1}\to 0$，是无穷小；又当$x\to\infty$时，$\cos x$振荡无极限，但$|\cos x|\le 1$，从而$|\cos x+1|\le 2$，是有界函数，故根据无穷小的性质有

DOI: 10.12677/ces.2021.93094

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x+2}{x^2+1}(\cos x+1)=0\,.$$

例 7. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(1-\cos x)\sin 2x}{\left(e^{2x}-1\right)\ln\left(1+x^2\right)}$

解 当 $x\to0$ 时，$1-\cos x\sim\dfrac{1}{2}x^2$，$\sin 2x\sim 2x$，$e^{2x}-1\sim 2x$，$\ln\left(1+x^2\right)\sim x^2$，所以有

$$\lim_{x\to0}\frac{(1-\cos x)\sin 2x}{\left(e^{2x}-1\right)\ln\left(1+x^2\right)}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{2}x^2\cdot 2x}{2x\cdot x^2}=\frac{1}{2}$$

2.3. 利用两个准则[3]求极限

1) 单调有界准则

若数列单调递增有上界，或单调递减有下界，则数列必存在极限。

使用原则及步骤：

递推类的数列(即后一项是可以由前一项通过式子推出来的)，一般包含两个步骤：

① 证明数列有界(数学归纳法)，单调。

② 假设数列极限为 A，通过递推式两端求极限建立关于 A 的方程，从而求出极限 A。

例 8. 证明数列 $\sqrt{2},\sqrt{2+\sqrt{2}},\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}},\cdots$ 极限存在，并求出极限值。

解 记数列为 $\{x_n\}$，则有 $x_n=\sqrt{2+x_{n-1}}$

① 先证 $\{x_n\}$ 有界，显然，$x_1=\sqrt{2}<2$，设当 $n=k$ 时，$x_k<2$，则当 $n=k+1$ 时，

$$x_{k+1}=\sqrt{2+x_k}<\sqrt{2+2}=2$$

再证 $\{x_n\}$ 单调。$x_{n+1}-x_n=\sqrt{2+x_n}-x_n=\dfrac{2+x_n-x_n^2}{\sqrt{2+x_n}+x_n}=\dfrac{(2-x_n)(1+x_n)}{\sqrt{2+x_n}+x_n}>0$

所以 $\{x_n\}$ 是单调递增数列。

由此可知，$\{x_n\}$ 单调递增有上界必存在极限。

② 设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{2+x_{n-1}}$，所以 $A=\sqrt{2+A}$，解得 $A=2$。

2) 两边夹准则

设在 x_0 的邻域内，恒有 $\varphi(x)\le f(x)\le\phi(x)$，且 $\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=\lim\limits_{x\to x_0}\phi(x)=A$，则 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$ [1]。

例 9. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right)$

解 $\dfrac{n}{\sqrt{n^2+n}}\le\dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+n}}\le\dfrac{n}{\sqrt{n^2+1}}$

而 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{\sqrt{n^2+n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}}=1$，$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{\sqrt{n^2+1}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}}=1$

利用两边夹准则，可得 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right)=1$

2.4. 利用两个重要极限[4]求极限

1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$，$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sin x}=1$ (解决 $\dfrac{0}{0}$ 型且含有三角函数的极限)

① 变形体 $\lim\limits_{u(x)\to 0}\dfrac{\sin u(x)}{u(x)}=1$，$\lim\limits_{u(x)\to 0}\dfrac{u(x)}{\sin u(x)}=1$

② 区别 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin x}{x}=0$

例 10. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin mx}{\sin nx}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin mx}{mx}\cdot mx\cdot\dfrac{nx}{\sin nx}\cdot\dfrac{1}{nx}=\dfrac{m}{n}$ (“凑”重要极限形式)

2) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x}=\mathrm{e}$，$\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}$ (解决 $(1+0)^{\infty}=1^{\infty}$ 型极限)

变形体 $\lim\limits_{u(x)\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{u(x)}\right)^{u(x)}=\mathrm{e}$，$\lim\limits_{u(x)\to 0}\left(1+u(x)\right)^{\frac{1}{u(x)}}=\mathrm{e}$

例 11. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{kn}\right)^{n}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{kn}\right)^{kn\cdot\frac{1}{k}}=\mathrm{e}^{\frac{1}{k}}$ (“凑”重要极限形式)

2.5. 利用洛必达法则求极限

在无穷小(大)量阶的比较中，有可能会出现两个无穷小(大)量之比的极限，此时无法确定极限是否存在，所以此类问题需要用洛必达法则解决。在使用洛必达法则时，应注意条件是否满足，只要有一条不满足，洛必达法则就不能使用，如果要使用，我们要对不满足洛必达法则使用条件的不定式需先变形，再求解。

此法则是在一定条件下通过分子、分母分别求导再求极限来确定未定式值的方法。

未定式：$\dfrac{0}{0},\dfrac{\infty}{\infty},\infty-\infty,0\cdot\infty,0^{0},0^{\infty},\infty^{0},1^{\infty}$ 等形式。

1) $\dfrac{0}{0}$ 型

例 12. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\tan x}{(\sin x)^{3}}$

解

$$\begin{aligned}\text{原式}&=\lim_{x\to 0}\frac{x-\tan x}{x^{3}}\quad\left(\frac{0}{0}\text{型}\right)\\&=\lim_{x\to 0}\frac{1-\sec^{2}x}{3x^{2}}\\&=\lim_{x\to 0}\frac{-\tan^{2}x}{3x^{2}}\quad\left(x\sim\tan x\,(x\to 0)\right)\\&=-\frac{1}{3}\end{aligned}$$

2) $\dfrac{\infty}{\infty}$ 型

例 13. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x^{\alpha}}\ (\alpha>0)$

解 原式 $=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\frac{1}{x}}{\alpha x^{\alpha-1}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{\alpha x^{\alpha}}=0$

3) $\infty-\infty$ 型

方法：通过化简，通分，根式有理化和变量替换等方法。转化为 $\frac{0}{0}$ 或 $\frac{\infty}{\infty}$ 型再计算。

例 14. 求 $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sec x-\tan x)$

$$\text{原式}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1}{\cos x}-\frac{\sin x}{\cos x}\right)=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1-\sin x}{\cos x}\right)=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{-\cos x}{-\sin x}=0$$

注意：在使用 L'Hospital 法则之前，要解决“是不是”与“能不能”的问题，即是不是未定式，能不能直接使用，需满足三个条件：

a. 是不是 $\frac{0}{0}$ 或 $\frac{\infty}{\infty}$ 型；

b. $f(x)$ 与 $g(x)$ 是不是可导；

c. $\lim\frac{f'(x)}{g'(x)}$ 是不是一个确定的常数或 ∞。

技巧及使用注意事项：

① 非未定式(即定式)的极限式不能使用法则，如：

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{1+x^2}=0$$

② 使用 L'Hospital 法则求极限过程要及时化简，及时替换、及时变换、及时整理

③ 使用 L'Hospital 法则求导后出现极限不存在现象，如 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x+\sin x}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1+\cos x}{1}$ 不存在。

正解 $\text{原式}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1+\frac{\sin x}{x}}{1}=1$

④ 多次使用 L'Hospital 法则后出现循环现象，如：

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$$

4) $0\cdot\infty$ 型(取倒数)

方法：$0\cdot\infty=0\cdot\frac{1}{0}\to\frac{0}{0}$ 或 $0\cdot\infty=\frac{1}{\infty}\cdot\infty\to\frac{\infty}{\infty}$

例 15. $\lim\limits_{x\to 0^+}\sqrt{x}\ln x$

解 $\text{原式}=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{\frac{1}{\sqrt{x}}}=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}}=\lim\limits_{x\to 0^+}\left(-2\sqrt{x}\right)=0$

5) $0^0,\infty^0,1^\infty$ 型，可利用 $\lim f(x)^{g(x)}=e^{\lim g(x)\ln f(x)}$ 转化为 $0\cdot\infty$ 型，再转化为 $\frac{0}{0}$ 或 $\frac{\infty}{\infty}$

① 0^0 型(取对数，再取倒数)

例 16. $\lim\limits_{x\to 0^+}x^{\sin x}$

解 $\lim\limits_{x\to0^+} x^{\sin x} = \lim\limits_{x\to0^+} \mathrm{e}^{\sin x\cdot\ln x} = \mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to0^+}\sin x\cdot\ln x} = \mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\ln x}{\frac{1}{\sin x}}} = \mathrm{e}^0 = 1$

② 1^∞ 型(取对数，再取倒数)

例 17. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2-1}{x^2+1}\right)^x$

解 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2-1}{x^2+1}\right)^x = \lim\limits_{x\to\infty}\mathrm{e}^{x\cdot\ln\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)} = \lim\limits_{x\to\infty}\mathrm{e}^{\frac{\ln\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)}{\frac{1}{x}}} = \mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\frac{2x}{x^2-1}-\frac{2x}{x^2+1}}{-\frac{1}{x^2}}} = \mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to\infty}-\frac{4x^3}{(x^2-1)(x^2+1)}} = \mathrm{e}^0 = 1$

③ ∞^0 型(取对数，再取倒数)

例 18. $\lim\limits_{x\to\infty}(1+x)^{\frac{1}{x}}$

解 $\lim\limits_{x\to\infty}(1+x)^{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x\to\infty}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}\cdot\ln(1+x)} = \mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}\cdot\ln(1+x)} = \mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{1+x}}{1}} = \mathrm{e}^0 = 1$

2.6. 利用 Taylor 公式[5]求极限

注意：在应用公式求极限时，时常遇到的一个问题是：不知道将该函数展开到第几项，展开少了会导致计算错误，展开多了又计算麻烦，故总结如下：

1) 在除法运算中应该展开到第几项：

若 $\lim\dfrac{f(x)}{g(x)}$，则将 $f(x)$ 与 $g(x)$ 展开到同次幂，达到精度，否则会出现。如：

$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x-x}{x^3}$，由于分母是 x^3，故将分子中的 $\sin x$ 应该展开到 x^3 项，即 $\sin x = x-\dfrac{x^3}{3!}+o\left(x^3\right)$。

所以，原式 $=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x-\frac{x^3}{3}+o\left(x^3\right)-x}{x^3} = -\dfrac{1}{6}$。

若仅展开到 x 项，即 $\sin x = x+o(x)$，则导致错误结果 0。

2) 在加减运算中应该展开到第 n 项：

若 $\lim\left[f(x)\pm g(x)\right]$，则对其中的一项或 n 项展开时，应该展开到运算后的首个非零项。如：

$\lim\limits_{x\to0}\left[\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x^2}\ln(1+x)\right]$，对 $\ln(1+x)$ 展开时，应该展开到 x^2 项，即 $\ln(1+x) = x-\dfrac{1}{2}x^2+o\left(x^2\right)$。所以，

原式 $=\lim\limits_{x\to0}\left[\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x^2}\left(x-\dfrac{1}{2}x^2+o\left(x^2\right)\right)\right] = \lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{x^2}\cdot o\left(x^2\right)\right) = \dfrac{1}{2}$

若仅展开到 x 项，即 $\ln(1+x) = x+o(x)$，则导致错误 0。

例 19. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\frac{1}{2}x^2+1-\sqrt{1+x^2}}{\left(\cos x-\mathrm{e}^{x^2}\right)\sin x^2}$

解 $\sqrt{1+x^2} = 1+\dfrac{1}{2}x^2-\dfrac{1}{8}x^4+o\left(x^4\right)$

$\sin x^2 \sim x^2\ (x\to0)$

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2}x^2 + o\left(x^2\right),\ \ \mathrm{e}^{x^2} = 1 + x^2 + o\left(x^2\right)$$

$$故原式 = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{8}x^4 + o\left(x^4\right)}{-\frac{3}{2}x^4 + o\left(x^4\right)} = -\frac{1}{12}。$$

3. 小结

以上求极限的几种方法互相之间有交叉，说明求极限需要灵活应用不同的方法，学会融会贯通。当然除了上面介绍的几种方法以外，还有很多其他方法。比如利用定积分的定义求极限，利用中值定理求极限等等。

参考文献

[1] 同济大学数学系. 高等数学(同济七版) [M]. 北京: 高等教育出版社, 2017.

[2] 周保平. 高等数学[M]. 北京: 北京邮电大学出版社, 2020.

[3] 滕桂兰, 郭洪芝. 高等数学——微积分[M]. 北京: 东方出版社, 2000.

[4] 石建城, 李佩芝, 徐文雄. 高等数学例题与习题集[M]. 西安: 西安交通大学出版社, 2002.

[5] 薛志纯. 高等数学[M]. 北京: 清华大学出版社, 2008.