

# 无穷级数教学中的思政案例设计

潘淑杰

山东理工大学, 数学与统计学院, 山东 淄博

收稿日期: 2021年9月13日; 录用日期: 2021年10月20日; 发布日期: 2021年10月27日

---

## 摘要

课程思政是要把思政教育根据教学内容潜移默化地融入到课堂教学中, 其中的关键就是如何挖掘思政元素。本文以无穷级数为例, 设计了无穷级数教学中的典型思政案例, 使思政元素能够自然地融入到课堂教学的过程中, 进而在向学生传授知识的同时, 引导学生领悟数学真谛, 以实现教学育人的目的。

## 关键词

无穷级数, 课程思政, 案例设计

---

# Design of Ideological and Political Cases in Infinite Series Teaching

Shujie Pan

School of Mathematics and Statistics, Shandong University of Technology, Zibo Shandong

Received: Sep. 13<sup>th</sup>, 2021; accepted: Oct. 20<sup>th</sup>, 2021; published: Oct. 27<sup>th</sup>, 2021

---

## Abstract

The course of ideological and political education is to imperceptibly integrate the ideological and political education into the classroom teaching according to the teaching content, and the key is how to tap the ideological and political elements. Taking infinite series as an example, this paper designs typical ideological and political cases in infinite series teaching, so that ideological and political elements can be naturally integrated into the process of classroom teaching, and then guide students to understand the true meaning of mathematics while imparting knowledge to students, so as to achieve the purpose of teaching and educating people.

## Keywords

Infinite Series, Curriculum Infiltrated Ideological and Political Education, Case Design

---

Copyright © 2021 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

## 1. 引言

无穷级数是高等数学课程中一个重要的知识点，它是表示函数、研究函数以及数值计算的一种有效工具。在实际教学过程中，可以发现学生对无穷级数概念的理解与掌握并不尽人意，甚至有的学生直至学完无穷级数，对无穷级数的理解还是停留在表面。由此教师在课堂授课中，如何有效地帮助学生克服学习的困难，使学生正确构建起对无穷级数概念的正确理解是非常重要的。

本文结合在无穷级数的知识发生发展的过程中产生的典型案例和学习无穷级数时需要掌握的重要思想方法，设计了无穷级数课程思政的案例，并进行了思政元素的挖掘渗透。一方面，通过案例的设置可以达到设疑、提出问题的目的，进而可以引起学生的好奇心和求知欲，使学生从被动接受知识转变为主动探索求知，而通过思政元素的渗透可以使学生的求知更加具有主动性。另一方面，从无穷级数理论中蕴含的思想方法切入思政元素，不仅让学生体会到数学中处处有人生哲理，还可以让学生明确潜藏于无穷级数理论中的重要思想方法，进而对无穷级数的学习充满信心。同时，这些思政案例的设计也便于高校教师把案例设计到自己的课堂教学过程中。当然课程思政目标是需要长期积累才能实现的，我们相信量变终究会引起质变，这一点在对无穷级数的教学和学习中也能体现出来。

## 2. 从无穷级数的历史发展及重构切入思政元素

### 思政案例 1

无穷级数起源于公元前，最早的无穷级数主要源于哲学和逻辑的悖论，例如，芝诺的二分法到把 1 分解成无穷级数

$$1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots + \frac{1}{2^n} + \cdots。$$

公元前 300 年我国著名哲学家庄周所著的《庄子·天下篇》记载：“一尺之棰，日取其半，万世不竭。”意思是一尺长的棍棒，每日截取它的一半，永远截不完。而将每天截下的那一部分长度加起来用数学形式表达出来也是上面的无穷级数。

一直到十五、十六世纪，无穷级数的理论研究也没有取得重大进展。但是在这之前关于无穷级数的思想的积累，为十七、十八世纪无穷级数的发展奠定了基础。最终，柯西在前人的基础上，在 1821 年的《分析教程》一书中给出无穷级数相关概念的现代定义。

思政元素切入点：无穷级数的理论从萌芽到一步一步完善、成熟到近代理论的进一步发展，处处体现出数学家们的坚持不懈、勇于探索的精神。无穷级数正是依靠一代代数学家们的不断传承与敢于质疑、敢于创新的精神发展起来的，而且一切成就、成果都不是一蹴而就，需要几代人的努力，甚至需要几千年的积累。我们新时代的大学生更需要向老一辈的数学家们学习，学习他们坚忍不拔的数学精神，学习他们为科学奉献的精神。

## 3. 从无穷级数的问题切入思政元素

无穷级数从发现开始，出现过很多关于级数和的悖论，把悖论引入课堂教学不仅能够激发学生的求知欲，也可以作为课程思政的切入点。

## 思政案例 2

**悖论 1** 无穷级数  $1-1+1-1+1-1+\dots$  相加的结果是什么？

**悖论 2** 讨论  $0.9999\dots$  与  $1$  的大小关系。

悖论 1 通常会有三种求解方法[1]:

第一种方法:  $1-1+1-1+1-1+\dots = (1-1)+(1-1)+(1-1)+\dots = 0$ 。

第二种方法:  $1-1+1-1+1-1+\dots = 1+(-1+1)+(-1+1)+\dots = 1$ 。

第三种方法:  $1-1+1-1+1-1+\dots = 1-(1-1+1-1+1-1+\dots)$ 。

移项后, 可以算出  $1-1+1-1+1-1+\dots = 1/2$ 。

对于同一个无穷级数, 利用三种不同的方法计算出三个结果, 这是怎么回事呢? 问题出在哪里?

对于悖论 2, 初学者往往根据直观经验, 判断  $0.9999\dots < 1$ 。但是, 如果把  $0.9999\dots$  写成无穷级数, 即有

$$0.9999\dots = 0.9 + 0.09 + 0.009 + 0.0009 + \dots$$

而右边是以  $0.1$  为公比的等比级数, 其前  $n$  项和  $s_n = \frac{0.9(1-0.1^n)}{1-0.1}$ 。

再求极限, 可得  $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = 1$ , 所以  $0.9999\dots = 1$ 。

这个结果打破了我们的直观认识, 即使我们计算出  $0.9999\dots = 1$ , 很多初学者也是很难从心里接受这一结果。为什么会出现这种情况? 问题又出在哪里呢?

思政元素切入点: 这两个悖论的出现, 主要是因为我们运用了有限的运算和思想方法去解决无限的问题, 从而得到了错误的结论。由此我们可以得到这样的认知, 看问题的时候不能先入为主, 不能想当然的用已知的方法解决未知的问题, 特别是不能唯经验论。

另一方面, 悖论 2 说明了无限积累的作用, 量变终究会有质的飞跃。小到一个人的成长需要点滴的积累, 大到一个国家的发展也需要点滴的积累, 所以我们要注意平时的一点一滴的积累。

## 思政案例 3

调和级数  $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n} + \dots$  是发散的。

调和级数可以通过蜗牛爬绳的故事引出, 以加深学生对调和级数的认识, 直观的体现调和级数中蕴含的“蜗牛精神”[2]。

思政元素切入点: 尽管调和级数的一般项越来越小, 而且无限逼近于零, 但是和却为无穷大, 所以说调和级数把无限累积的力量体现的淋漓尽致, 点点滴滴也可以汇聚成河。“勿以恶小而为之, 勿以善小而不为”, 要铭记“养小德才能成大德”。

## 4. 从数学家们的经历切入思政元素

自古以来, 数学史也是数学家们的奋斗史, 数学家们坚持不懈的科学精神就是一部现成的思政宝库, 通过选择数学家典型的经历和事迹故事可以达到思政的目的。

### 思政案例 4

在幂级数中讲到阿贝尔定理时, 可以介绍挪威数学家阿贝尔在贫穷、饥寒的环境里, 坚定信念, 创造出大量的开创性的数学成果[3]。在讲到无穷级数收敛的时候, 可以介绍柯西最早给出收敛的定义。他在数学方面的成就辉煌且数量惊人, 柯西的名字与许多定理、准则一起流传至今。讲授傅里叶级数时, 可以介绍傅里叶在研究热的传播时创立了一套数学理论。

思政元素切入点: 数学家们自身的经历和取得的成就, 本身就是最好的思政素材, 数学家们取得成

就的背后，是他们辛勤的付出。阿贝尔人穷志不穷，柯西一生孜孜不倦、勤奋工作，傅里叶对待热学极度痴迷和并且善于发现问题。通过了解数学家的经历，感受数学家们的科学精神，学习数学家们为科学奉献的精神，达到教书育人的目的。

## 5. 从无穷级数蕴含的数学思想方法切入思政元素

高等数学中蕴含着丰富的数学思想方法，加强数学思想方法的教学，既能提高学生的综合素质，又能培养学生的兴趣，领会数学精神。

### 思政案例 5 正项级数敛散性判别中的比较思想方法

正项级数的比较审敛法，是要求找一个适当的级数作为比较的对象，通过比较得到原级数的收敛性的方法。

正项级数的比值审敛法，只需将级数的后一项与前一项比较即可判定其收敛性。虽然比值审敛法不需要借助其它级数，使用起来简单方便，但是当  $\rho = 1$  时无法判别。所以这两种审敛法在使用时要注意结合使用。

思政元素切入点：人生如数学处处存在比较，与人相比，特别是与优秀的人相比，可以看到自己的不足；与己相比，可以看到自己的进步与成长。但是这种比较需要恰当，正项级数的判别法是如此，人亦如此。

每个人都有自己的长处和优点，也有短处和弱点，正像比值审敛法  $\rho = 1$  时的不完美。正视短处，发挥长处，更好的促进个人发展。

### 思政案例 6 级数展开与转化的思想方法

将函数展开成幂级数主要有直接展开法和间接展开法。直接展开法给出了基本初等函数  $e^x$ ， $\sin x$ ， $(1+x)^m$ ， $\dots$  的幂级数展开式，过程比较复杂。间接展开法是运用变量代换、逐项求导积分、化归等方法 [4]，将未知函数转化成已知展开式的函数，进而得到幂级数展开式的方法。

思政元素切入点：直接展开法繁琐而复杂，但是必不可少，是间接展开法的基础。间接展开法是将未知的问题转化为已知的问题，从而使问题得以解决。而这种方法的前提是必须有“已知的问题”作为基础，并且转化时要有适当的目标性，不能盲目进行转化。

人生规划如同对函数进行幂级数展开：首先要有基础的积累，然后知道自己的人生目标是什么，朝着目标去奋斗，定能实现。大学阶段的学习就是基础的积累，在学习的过程中确立正确的人生观，价值观，做好学业规划和人生规划。换一个角度看，间接展开更像是站在巨人的肩膀上，从而更容易取得更大的成绩。

## 6. 结语

把知识背后蕴含的思政元素自然地融入课堂，不仅可以使学生对知识进行系统性的把握，也会使其领悟到知识背后蕴含的哲理。将无穷级数的思政案例融入教学过程，可以实现更好的授课效果，达到思政育人目标。例如，将思政案例与启发式或问题引导式教学结合，可以激发学生的求知欲，培养学生主动探寻的精神。总之在无穷级数教学中，通过思政案例可以引导学生积极思考，鼓励学生敢于发表自己的见解，敢于尝试与创新，使学生不再枯燥无味地为了学习而学习。

## 基金项目

1. 山东省本科教学改革研究项目重大子课题(山东省高校理学、工学类专业课程思政教学设计研究与实践(T2020005))。
2. 山东理工大学课程思政教育教学改革项目(高等数学)。

## 参考文献

- [1] 陈建华. HPM 视角下无穷级数概念的教学设计[J]. 大学数学, 2018, 34(6): 30-36.
- [2] 刘淑芹. 高等数学中的课程思政案例[J]. 教育教学论坛, 2018(52): 36-37.
- [3] 王书臣, 周文书, 刘强. 课程思政背景下高等数学教学设计研究[J]. 大连民族大学学报, 2021, 23(1): 89-93.
- [4] 慕运动, 许小艳. 基于无穷级数教与学中的数学素养的培养[J]. 大学数学, 2014, 30(S1): 81-86.