

结合专业应用的线性代数教学模式探索

李刘文¹, 邹温林^{2*}

¹金陵科技学院理学院, 江苏 南京

²南京晓庄学院信息工程学院, 江苏 南京

收稿日期: 2023年11月17日; 录用日期: 2023年12月19日; 发布日期: 2023年12月26日

摘要

针对当前线性代数教学中存在的问题和不足, 文章提出将线性代数的知识与相应的专业领域应用相结合的教学模式, 简单介绍了线性代数在数字图像处理、机器学习和密码编码学等学科领域中典型的应用教学案例。教学实践表明, 该教学模式可以有效增强本课程对学生的吸引力, 提高学生学习的积极性, 提升教学质量。

关键词

线性代数, 专业应用, 教学案例, 教学质量, 教学模式

Exploration of Linear Algebra Teaching Mode Combined with Professional Application

Liuwen Li¹, Wenlin Zou^{2*}

¹College of Science, Jinling Institute of Technology, Nanjing Jiangsu

²College of Information Engineering, Nanjing Xiaozhuang University, Nanjing Jiangsu

Received: Nov. 17th, 2023; accepted: Dec. 19th, 2023; published: Dec. 26th, 2023

Abstract

Aiming at the problems and shortcomings in the current linear algebra teaching, this paper puts forward a teaching mode that combines the knowledge of linear algebra with the application of corresponding professional fields, and briefly introduces the typical application teaching cases of

*通讯作者。

linear algebra in digital image processing, machine learning and cryptography. The teaching practice shows that this teaching mode can effectively enhance the attraction of the course to students, improve the enthusiasm of students to learn, and improve the teaching quality.

Keywords

Linear Algebra, Professional Applications, Teaching Cases, Teaching Quality, Teaching Mode

Copyright © 2023 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

线性代数是众多理工科专业的重要数学基础课程之一,广泛应用于各个领域,如:工程、物理、计算机科学、统计学等,其为学生提供了解决实际问题 and 深入专业领域所需的数学工具和思维方法。通过学习线性代数,理工科专业学生可以更好地理解和解决线性问题、进行数据处理与模型建立、理解高维空间概念、结合理论与应用,以及运用算法和计算机编程解决实际问题[1]。因此,线性代数课程对于理工科学生的学习和发展具有不可替代的重要意义。

从教学实践和学生反馈来看,目前线性代数教学中主要存在以下问题:

1) 抽象概念理解困难:线性代数中涉及到许多抽象的概念和符号,学生往往难以理解其几何和实际应用之间的联系[2]。

2) 缺乏实际应用场景:传统的线性代数教学方法缺乏与实际问题的联系,导致学生对线性代数的应用的意义和价值认识不足[3] [4]。

3) 缺乏问题解决能力:线性代数的学习需要学生具备良好的问题解决能力和建模能力,但大部分学生在这方面存在欠缺[5]。

4) 课堂互动不足:传统线性代数教学往往以讲授为主,课堂互动不足,无法激发学生的积极性和学习兴趣。

5) 考试导向教学:部分线性代数课程过于注重应试,教师教学侧重于教授考试重点和解题技巧,而忽略了培养学生对线性代数理论的深入理解和实际应用能力。

针对上述线性代数教学中存在的问题,需要将线性代数的知识与相应的专业领域应用相结合,对目前的教学方法进行改革创新,提升教学成效。线性代数课程中涉及到概念和算法在数字图像处理、机器学习和密码编码学等领域都有重要的应用。例如,在图像处理领域,矩阵奇异值分解被广泛应用于图像压缩、图像恢复和图像增强等领域的算法设计与实现中;在机器学习领域,矩阵特征值、特征向量和线性组合等知识被用于数据建模、特征提取和预测模型等关键任务;在密码学领域,矩阵运算为研究密码编码解码的重要理论基础。鉴于线性代数课程在上述专业领域的重要作用,因此,探索结合专业应用的线性代数教学方法对于提高学生的学习热情和应用能力具有重要的意义。

本文旨在从图像处理、机器学习和密码学等专业领域的应用角度出发,探索与专业应用相结合的教学方法,旨在帮助学生更好地理解和应用线性代数的概念和原理。通过结合专业应用,学生可以更直观地感受到线性代数理论与实际问题的联系,增强其问题解决与模型建立的能力,提高专业应用的实践能力和创新能力。

2. 结合专业应用的教学案例

2.1. 线性代数在图像处理中的应用

图像处理是线性代数的一个重要应用领域, 比如可以应用线性代数中的奇异值分解等知识来进行图像压缩和增强操作。因此, 可以将图像处理中的算法作为典型教学案例引入到线性代数的课堂教学中, 来展现所学概念和算法的应用价值, 增加课堂的趣味性。

2.1.1. 图像压缩

图像压缩是图像处理中的关键技术之一, 在图像传输和存储中起着重要作用。而线性代数中的矩阵奇异值分解(Singular Value Decomposition, SVD)可以应用于图像压缩算法中[6]。SVD 可以将一个矩阵分解为三个矩阵的乘积: $A = U\Sigma V^T$, 其中 U 和 V 是正交矩阵, Σ 是一个对角矩阵。通过保留奇异值较大的部分, 可以实现对图像的压缩。

例如, 当应用 SVD 进行图像压缩时, 可以将一个图像矩阵 A 分解为三个矩阵 U 、 Σ 和 V^T 。然后, 通过保留奇异值较大的部分, 可以重构出一个近似的图像矩阵 \hat{A} , 从而实现图像的压缩。这样的应用会让学生更好地理解奇异值分解的几何意义和实际应用价值。

2.1.2. 图像增强

在图像处理中, 有时需要进行图像的恢复和增强。基于奇异值分解(SVD)的图像增强技术是一种常用的方法, 能够提高图像质量、增强图像特征, 并对图像进行降噪和去模糊处理。该技术通过对图像矩阵进行 SVD 分解, 提取图像的主要信息, 并进一步对重构的图像进行增强操作[7]。例如, 下面是基于 SVD 的图像增强算法的主要步骤:

1) 图像表示:

将待增强的图像表示为一个矩阵。假设待增强的灰度图像为 I , 可以将其表示为一个大小为 $M \times N$ 的矩阵, 其中 M 和 N 分别表示图像的高度和宽度。

2) SVD 分解:

对图像矩阵进行奇异值分解(SVD)。SVD 将矩阵分解为三个矩阵的乘积: $I = U\Sigma V^T$, 其中 U 和 V 是正交矩阵, Σ 是一个对角矩阵。

3) 选择奇异值:

选择保留的奇异值个数。奇异值按照从大到小的顺序排列, 因此可以通过保留前几个大的奇异值来实现降维和去噪的效果。通过观察奇异值的分布情况, 选择一个合适的截断点。

4) 重构图像:

通过保留的奇异值重构图像。将截断后的奇异值和对应的 U 、 V 、 Σ 矩阵乘起来, 得到图像的重构矩阵 I' 。

5) 图像增强:

对重构后的图像进行进一步的增强操作, 例如对比度增强、亮度调整、锐化等。

2.2. 线性代数在机器学习中的应用

机器学习是当今热门的领域之一, 而线性代数在机器学习中有广泛的应用。了解线性代数在机器学习中的应用, 可以帮助学生理解机器学习算法的原理和推导过程。

2.2.1. 线性回归

线性回归是一种广泛应用于统计学和机器学习领域的基本的预测模型[8]。它用于建立两个或更多变

量之间线性关系的模型, 并通过这个线性模型来进行预测和解释数据。线性回归模型可以表示为: $Y = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \dots + \beta_r X_r + \varepsilon$ 其中, Y 是因变量(目标变量), X_1, X_2 等是自变量(特征变量), $\beta_0, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_r$ 是回归系数, ε 是误差项。回归系数表示了因变量与自变量之间的线性关系的权重, 而误差项表示了因变量中无法被自变量解释的随机误差。线性回归的目标是通过最小化所有数据点到回归线的垂直距离之和(即最小二乘法), 找到最合适的回归系数, 使得预测值与实际观测值之间的误差最小化。

例如, 我们有一个数据集, 包含房屋的面积(X_1)、房间数(X_2)和房屋价格(Y)。通过线性回归方法来建立房屋面积和房间数与价格之间的关系, 并用于预测未知房屋的价格。

2.2.2. 主成分分析与特征提取

主成分分析(Principal Component Analysis, PCA)是一种常用的数据降维技术, 用于提取数据的主要特征。在机器学习中, PCA 方法可以应用于特征提取和数据可视化[9]。

例如, 假设有一个灰度图像, 图像大小为 100×100 像素, 每个像素点用一个 0~255 的灰度值表示。这样的图像可以看作是一个高维数据集, 每个像素点对应一个特征。现在希望对该图像进行特征提取和降维, 以便用更少的特征来表示图像, 并且保留图像的主要特征。

首先, 将图像转换为一个 10,000 维的向量, 表示为 X 。然后, 对 X 进行去均值化处理, 使数据中心位于原点。接下来, 计算去均值化后的数据的协方差矩阵 C 。协方差矩阵反映了图像中像素点之间的相关性。进行特征值分解, 得到特征值和对应的特征向量。假设得到了前 k 个最大的特征值和对应的特征向量, 构成新的特征向量矩阵 V_{new} 。最后, 将原始图像的像素点向量 X 投影到新空间中: $Y = X * V_{new}$ 。通过这样的降维过程, 将原始 10,000 维的图像数据降维到了低维的空间, 保留了图像中的主要特征。新的特征向量 Y 可以用更少的特征表示原始图像, 并且可以在一定程度上还原原始图像。

在图像处理中, 应用 PCA 方法可以用更少的特征来表示图像, 从而减少图像数据的存储和处理成本。同时, PCA 方法还能够去除图像中的噪声和冗余信息, 提高图像处理的效果。此外, 通过降维, 可以实现图像数据的可视化和分析, 更好地理解图像的结构和特征。

2.3. 线性代数在密码学中的应用

密码学是信息安全领域中的重要部分, 而线性代数在密码学中有广泛的应用。了解线性代数在密码学中的应用, 可以帮助学生理解密码算法的设计原理和加密解密过程。

2.3.1. 矩阵加密与解密

在密码学中, 矩阵加密算法常常用于加密和解密数据[10]。矩阵加密算法利用线性代数中的矩阵运算来对数据进行转换和混淆, 从而实现对数据的加密保护。

例如, 以古典加密体制中的 Hill 算法为例, 当用该加密算法对一段文本进行加密时, 可以将文本数据表示为一个矩阵。然后, 通过对该矩阵与密钥矩阵进行一系列的矩阵运算和变换, 可以得到该文本加密后的矩阵表示——密文, 实现了加密。密文传送到接收方, 再把密文矩阵与密钥的逆矩阵进行相应的运算和变换, 还原出原文本, 完成解密。

2.3.2. 线性代数在密码破解中的应用

线性代数的概念和方法也被广泛应用于密码的破解过程中。密码破解者利用线性代数中的矩阵运算和行列式的性质来推断和破解密码算法。

例如, 当应用线性代数进行密码破解时, 密码破解者可以通过构建密码算法的矩阵模型, 并利用矩阵运算和行列式的性质来推断出密码算法的秘密参数或密钥。

3. 结束语

本文简要分析了当前线性代数教学存在的问题, 根据该课程的教学现状, 提出了结合专业应用的教学模式。该教学方法注重理论与实践相结合, 由于结合了专业应用, 可以增强本课程的趣味性, 也可以有效调动学生学习本课程的积极性, 有助于培养学生解决问题和数学建模能力。教学实践表明, 结合专业应用的教学模式, 可以有效增强本课程对学生的吸引力, 提高学生学习的积极性, 提升教学质量。

针对不同授课对象所处的专业, 设计和开发更加契合专业背景的教学策略与教学资源, 以满足不同专业学生的学习需求, 提高线性代数教学效果, 是我们后续完善本教学模式改革的主要工作。

基金项目

本文受金陵科技学院博士/高层次人才研究基金资助项目(jit-b-202043)支持。

参考文献

- [1] 王晓民, 苏道毕力格. 基于应用案例和几何意义的线性代数教学研究[J]. 高教学刊, 2021, 7(14): 104-107.
- [2] 李清华, 王宝娟. 线性代数知识点的可视化教学设计探索与实践[J]. 大学数学, 2022, 38(2): 112-119.
- [3] 汪赛. 基于实际工程应用的线性代数教学[J]. 数学学习与研究, 2018(19): 13-13.
- [4] 杨威, 高淑萍, 陈怀琛, 等. 新工科背景下线性代数教学改革与探索——以国家精品在线开放课程《实用大众线性代数》为例[J]. 高教学刊, 2020(5): 8-12.
- [5] 杨威, 高淑萍, 陈怀琛. 慕课背景下 MATLAB 与线性代数应用的融合——介绍国家精品在线开放课程“实用大众线性代数(MATLAB 版)” [J]. 高等数学研究, 2019, 22(3): 60-62.
- [6] 邓子云. 基于奇异值分解的图像压缩技术[J]. 计算机系统应用, 2021, 30(2): 35-42.
- [7] 鲁晓东. 基于奇异值分解的运动模糊图像广义逆恢复方法[J]. 应用光学, 2013, 34(1): 90-94.
- [8] 朱依然, 钱宇航, 郭红萍. 房价影响因素的统计推断方法[J]. 统计与管理, 2022, 37(5): 58-63.
- [9] 赵蕾, 惠燕, 张忠, 等. 基于二维主成分分析的图像特征提取研究[J]. 航空计算技术, 2019, 49(5): 40-42.
- [10] 任伟, 许瑞, 宋军. 现代密码学[M]. 北京: 机械工业出版社, 2020.