Creative Education Studies 创新教育研究, 2024, 12(3), 188-194
Published Online March 2024 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/ces
https://doi.org/10.12677/ces.2024.123150

Hans汉斯

深度学习视域下初中数学解题模型教学设计探究

——以“半角模型”为例

胡驿乔

黄冈师范学院数学与统计学院，湖北 黄冈

收稿日期：2023年12月9日；录用日期：2024年3月14日；发布日期：2024年3月22日

摘 要

本研究从深度学习的视域下分析目前初中数学解题模型的现状，明确深度学习下的解题模型教学设计研究的必要性。文中提出解题模型教学的对应策略并结合“半角模型”探讨教学策略，在教学设计中穿插多种教学手段引导学生对“半角模型”的理解，提升学生利用数学模型的解题能力。

关键词

深度学习，初中数学，解题模型

Exploration of Teaching Design for Middle School Mathematics Problem Solving Models from the Perspective of Deep Learning

—Taking the “Half Corner Model” as an Example

Yiqiao Hu

School of Mathematics and Statistics, Huanggang Normal University, Huanggang Hubei

Received: Dec. 9th, 2023; accepted: Mar. 14th, 2024; published: Mar. 22nd, 2024

Abstract

The article analyzes the current situation of middle school mathematics problem-solving models from the perspective of deep learning, and clarifies the necessity of teaching design research on

文章引用: 胡驿乔. 深度学习视域下初中数学解题模型教学设计探究[J]. 创新教育研究, 2024, 12(3): 188-194.
DOI: 10.12677/ces.2024.123150

problem-solving models in deep learning. It proposes corresponding strategies for teaching problem-solving models and explores teaching strategies in combination with the “half angle model”. We insert various teaching methods into teaching design to guide students to understand the “half angle model” and enhance their ability to use mathematical models to solve problems.

Keywords

Deep Learning, Junior High School Mathematics, Problem Solving Model

1. 引言

在初中数学习题课堂中，教师根据学生已经完成作业的正确率来确定习题课需要讲解的内容，这样的传统习题课堂的前提是需要学生们在课前或者课中大量完成习题，不仅浪费学生的时间，更是让学生不能得到针对性的训练。针对学生能否在作业练习中快速将题型归类的这一问题，解题模型教学就显得尤为重要，解题模型不仅有助于学生解题规范化，更能为学生加强知识的理解与迁移提供条件。本文从深度学习出发结合初中数学“半角模型”为例，探索初中解题模型教学的可行性。

2. 深度学习与初中数学解题模型教学相结合

美国学者 Marton 和 Saljo 最早提出深度学习(Deep Learning)的概念。他们认为深度学习是指学习者在理解的基础上，能够批判性地学习新思想和事实，并将它们融入已有的认知结构中，能够在众多知识间建立联系，并能够将已有的知识迁移到新的情境中，做出决策和解决问题。刘晓玫教授[1]指出，数学的深度学习是以教师为引导，以数学核心知识为载体，以学生围绕具有挑战性的学习任务全身心投入到学习活动为过程，以学生运用观察、运算、分析、推理等方式获得数学核心知识、提高思维能力形成核心素养为目标。

随着深度学习的思想提出，如何做好深度学习成为了国内众多学者探讨的焦点。朱荣光[2]认为，深度学习是在知识传授的过程中触及教学本质，并伴随更多附加价值，这包括个性化的理解、更好的信息整合和信息结构化、更好的迁移运用能力以及有利于自主学习。张银[3]通过初中数学实验性教学表明，学习要有深度，学生学习数学要从“学”到“用”、从“用”到“悟”的转变，将数学知识化为己用，通过教学策略创新走“深度学习”之路，夯实学生数学学科核心素养，为“学数学”和“用数学”提供支撑。徐沙沙[4]在分析 2018 年江苏省徐州市考生作答中考数学压轴题误用“四点共圆”方法的答题现象，深刻剖析了传统教学方式的局限性，并提出了进行初中数学解题模型系统教学实践研究的紧迫性。

3. 深度学习下初中数学模型教学策略

3.1. 以培养学科素养为核心促进深度学习

《义务教育课程标准(2020 版)》[5]指出，数学课程要从会用数学的眼光观察世界，会用数学的思维思考世界，会用数学的语言表达世界这三方面来培养学生的核心素养。随着初中数学学习的难度加大，在初中课堂中出现教师只侧重某个素养的教学也是十分普遍的，这种以教师为主导的独立性课堂就忽视

了学生的主体性，也忽视了多种核心素养串联并进的重要性。张银强[6]认为，深度学习是一种基于理解更多关注应用、分析、评价与创造层面的高阶思维的学习，它的目标是发展学生的核心素养。深度学习强调了学生在完成学习任务的过程中需要充分调动学生的知识储备和数学能力，由此可见，深度学习的核心还是要围绕学生学科素养的培养展开。

3.2. 以提升解题能力为目标促进深度学习

深度学习在解题能力方面要求学生能深刻理解、熟练掌握、灵活运用所学知识，并进行深入思考探究。教师可以布置实践性训练来引导学生运用解题能力。在解题过程中，教师需要规范学生的解题步骤，确保学生能够做到以下几点：完整而不繁琐，在完善解题过程时，学生应确保步骤齐全避免遗漏，解题过程应保持简洁明了，避免冗余和啰嗦；规范而不刻板，在应用数学语言时，学生应遵循规范的表述方式，使得其他人能够容易理解，学生应避免过于刻板和生硬的表述，以提高解题文的通顺性和可读性；深刻而不肤浅，在回顾评价习题时，学生应深入思考问题，挖掘问题的本质，学生应避免对问题的理解停留于表面，以提高解题的准确性和全面性。通过实践性训练，教师可以帮助学生培养解题能力，并养成良好的解题习惯，这将促进学生在数学方面的深度学习。

3.3. 以注重知识关联为导向促进深度学习

在实施解题模型教学时，确实会涉及到许多公式和定理。为了进行深度学习，我们必须要以新旧知识的关联为重点。在构建这种关联的过程中，可以帮助学生在错综复杂的知识中建立一个整体的数学知识网络，并促使他们更深入地思考和探索这些知识。在建立知识关联之后，通过具体的解题模型，学生可以将所学知识点进行再次整合。在延伸思考的过程中，学生可以将抽象化的知识通过具体的模型形象化，从而加深对知识的理解和应用。总的来说，通过实施解题模型教学，我们可以帮助学生更好地理解和掌握数学知识，提高他们的解题能力和综合素质。而下文所讲的“半角模型”也是通过具体图形论证而将抽象化的定理连接起来。

3.4. 以开阔学生思维为主导促进深度学习

通过具体问题调动学生主体性，开阔学生思维，推进课堂探究。这就要求教师要针对课堂内容提出有效的问题，抓住学生的注意力，在课堂中使之紧跟课堂节奏，从是什么，为什么，怎么样一步一步扩充思路、延伸思考。根据维果斯基的“最近发展区”理论，一个好的问题应基于学生原有的认知思维和能力基础与学生可能达到的发展水平之间的差距，选择难易适中的问题进行教学。若教师选择的问题过于简单，不仅无法达到训练思维的目的，而且会使学生失去了探究的欲望。相反，若在课堂中安排难度较大的问题，学生抓不住问题本身的要点，那么思维则无从展开。教师在教育过程中，确实需要运用数学模型来帮助学生理解和掌握抽象的概念，这样，学生可以通过观察和分析实际问题，逐步提升自己的抽象思维能力。此外，教师还应该引导学生从浅层思考向深度思维迈进，让他们学会透过现象看本质，从而更好地理解和掌握知识。

4. 深度学习下初中数学解题模型教学实践

通过分析全等三角形解题的实际综合运用，我们发现学生在全等三角形证明方面的综合应用能力较为薄弱。学生在解题时，往往无法灵活运用定理、辅助线等方法来解决问题。当考点的出题方式不同，或者问题的表述有所差异时，学生往往不能迅速调整解题策略，将已掌握的知识和方法灵活运用到新的问题中。针对这一问题，教师在教学过程中需要加强对全等三角形证明的多样化训练，提高学生在此类问题上的应变能力。具体来说，教师可以设计一系列具有针对性的练习，涵盖各种出题方式和问题的类

型。在解题训练过程中，教师应引导学生深入理解全等三角形的性质和判定方法，并熟练掌握各种辅助线的作法。通过解题模型的总结，学生将能够在面对不同出题方式和问题时，灵活运用所学知识，提高解题能力。

4.1. 教学活动一：例题引入

例题 1 如图 1，已知正方形 ABCD 的边长为 3，E、F 分别是 BC、DC 边上的点，且∠EAF = 45°，将 ΔBAE 绕点 A 顺时针旋转 90°得到 ΔADE'。若 BE = 1，则 EF 的长为

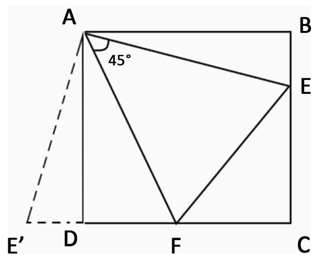

Figure 1. Square ABCD
图 1. 正方形 ABCD

学生自主探究再进行小组讨论以下两个问题：

1) 可以通过已经学过的知识来解决这个问题吗？

2) 题目中哪个条件为解题提供了基础？

教师首先与学生共同回顾题干中出现的旋转的定义及性质：图形的旋转是图形的每一个点在平面上绕着某一固定点旋转固定角度的位置移动；旋转前后图形全等，即旋转前后图形的大小和形状没有改变。紧接着教师提出设问：“这道题为何要以 A 点为旋转中心，将 ΔABE 顺时针旋转 90°呢？”激发学生探究兴趣，并引导学生说出该题旋转的目的在于构造一个与 ΔEAF 全等的三角形，使得 ΔEAF ≌ ΔE'AF。

教师请一位同学在黑板具体证明过程如下：

∵ΔBAE 沿点 A 顺时针旋转得到 ΔDAE'，∴AE = AE'，∠BAE = ∠DAE'。

∵在正方形 ABCD 中∠BAD = 90°，且∠EAF = 45°，∴∠BAE + ∠DAF = 45°。

∵∠BAE = ∠DAE'，∠BAE + ∠DAF = 45°，∴∠E'AF = ∠EAF。

∵AE = AE'，∠E'AF = ∠EAF，AF = AF(SAS)，∴ΔEAF ≌ ΔE'AF。

教师向其他学生发问，上述证明过程是否存在不足之处。有学生提出，ΔBAE 旋转至 ΔDAE'时，E'、D、F 三点共线是否需要证明。请学生尝试证明三点共线，紧接着教师引导学生继续解题，由 ΔEAF ≌ ΔE'AF 可得 EF = E'F 且 BE = DE'。

学生提出设 DF = X，那么 EF = E'F = X + 1，CF = 3 − X，CE = BC − BE = 3 − 1 = 2，在 RTΔEFC 中可利用勾股定理列出方程式，则有 $CF^2 + CE^2 = EF^2$，$(3-X)^2 + 2^2 = (X+1)^2$，$X = \frac{3}{2}$，则 EF 的长为 $\frac{5}{2}$。

本题综合了旋转、三角形全等、勾股定理、二次方程等初中数学知识，将看似零散的知识考点集中到一起，不难看出习题对学生解题能力的要求之高，充分体现了系统初中数学知识体系对于解题的重要性。

4.2. 教学活动二：深入探究

例题 2 如图 2，在 ΔABC 中，∠BAC = 120°，AB = AC，点 M、N 在边 BC 上，且∠MAN = 60°，若 BM = 2，CN = 3，求 MN 的长度。

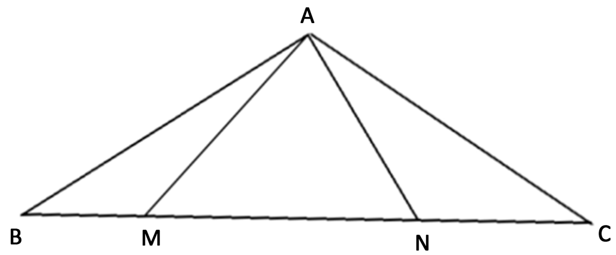

Figure 2. △ABC
图 2. △ABC

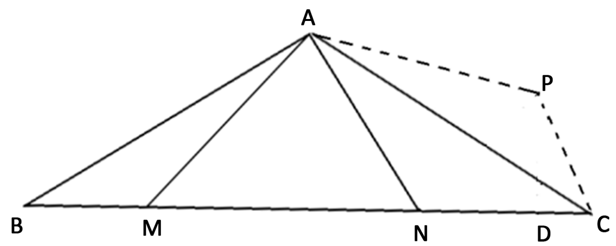

Figure 3. Rotate △ABM to △APC
图 3. 旋转△ABM 至△APC

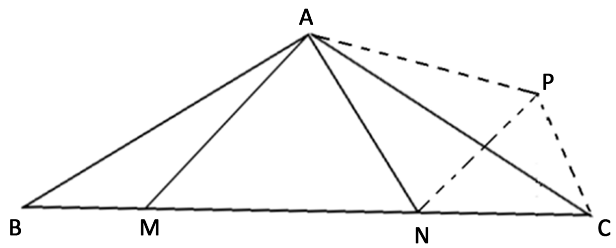

Figure 4. Connect NP
图 4. 连接 NP

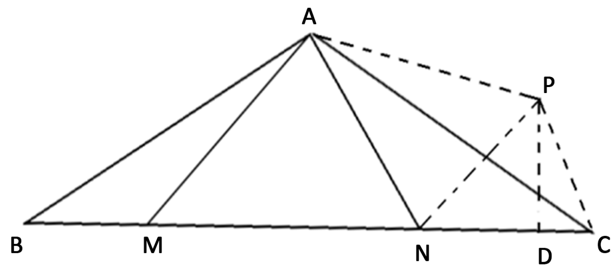

Figure 5. Make PD perpendicular to NC, with the foot perpendicular to D
图 5. 作 PD 垂直于 NC，垂足为 D

教师抛出问题，请学生思考能否从上一题中得到启发。学生回答先通过旋转构造全等三角形再解决接下来的问题。

学生提出把 ΔABM 绕点 A 逆时针旋转 120˚得到 ΔACP(如图 3)，根据旋转的性质，得 $\Delta ABM \cong \Delta ACP$，$\therefore AM = AP$，$\angle BAM = \angle CAP$。

经过旋转后，图中并未出现全等三角形，这时教师适当提示可以再次通过辅助线构造全等三角形，有学生提出可连接 P、N 两点(如图 4)即出现与 ΔAMN 全等的 ΔANP。

学生进行证明过程如下：

$\because \angle BAC = 120^\circ$，$\angle MAN = 60^\circ$，$\therefore \angle BAM + \angle NAC = 60^\circ$，

且$\angle BAM = \angle CAP$，则$\angle PAN = \angle MAN = 60^\circ$。

又$\because AM = AP$，$AN = AN$，$\therefore \Delta MAN \cong \Delta PAN(SAS)$。$\therefore MN = PN$。

$\because \angle BAC = 120^\circ$，$AB = AC$，$\therefore \angle B = \angle ACB = 30^\circ$

过点 P 作 BC 的垂线，垂足为 D (如图 5)，

$\because PD \perp CN$，$\angle NCP = 60^\circ$，

$\therefore CD = \frac{1}{2}PC = 1$，$PD = \sqrt{3}CD = \sqrt{3}$，$\therefore DN = CN - CD = 2$。

$\therefore MN^2 = PN^2 = PD^2 + DN^2 = 7$，则 $MN = PN = \sqrt{7}$。

4.3. 教学活动三：变式练习

例题 3 如图 6，在四边形 ABCD 中$\angle B + \angle D = 180^\circ$，$AD = AB$，点 E、F 分别是线段 BC、CD 上的点，且 $BE + DF = EF$，求证：$\angle EAF = \frac{1}{2}\angle BAD$。

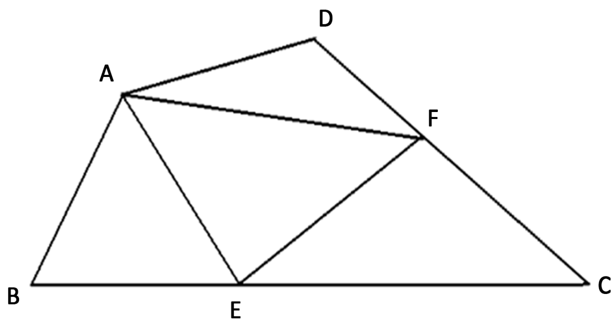

Figure 6. Example diagram
图 6. 例题图

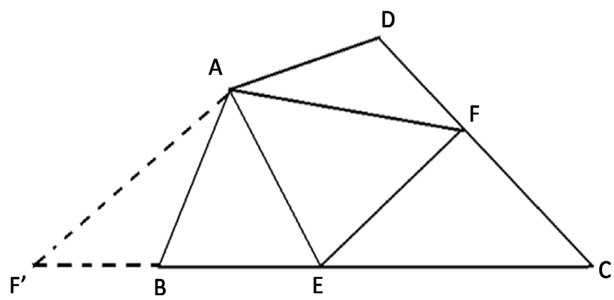

Figure 7. Example diagram
图 7. 例题图

在这一题当中学生阅读完题干就立即提出，将 ΔADF 沿点 A 顺时针旋转至 AD 与 AB 重合(如图 7)，且$\angle B + \angle D = 180^\circ$，$AD = AB$ 则 D、B、E 三点共线，形成 $\Delta AF'E$。

$\because AF' = AF$，$AE = AE$，$F'E = BE + DF = EF$，$\therefore \Delta AF'E \cong \Delta AFE$。即可得$\angle FAE = \angle F'AE$。

$\because \angle F'AE = \angle DAF + \angle BAE$，$\therefore \angle FAE = \angle DAF + \angle BAE$，则有$\angle EAF = \frac{1}{2}BAD$。

通过前两个教学活动的探究，学生已初步具备了自主发现“半角模型”对应的解题切入点，为变式

练习提供了方法基础。

4.4. 教学活动四：模型总结

教师通过母题与变式练习引导学生观察发现该模型的特点。从题型题干出发，在题干中总是出现在 90˚的角内嵌套一个 45˚的角或是在 120˚的角内嵌套一个 60˚的角进行考察。从解题思路出发，构成 90˚的两邻边相等(AB = AD)，只需把 AB 旋转到 AD 或 AD 旋转到 AB，构造全等三角形即可解决接下来的问题。无论是 90˚还是 120˚内嵌套半角，由于对角互补(如∠B + ∠D = 180˚，最后通过旋转后证明全等即可，但其中要注意的是三点共线需进行说明)。从考点考查出发，该模型主要考查学生对于旋转的应用，旋转半角两侧的三角形，构造出全等三角形。

4.5. 教学活动五：教学反馈

当然，本文教学模型还可以探究出其他更多的结论，学生可在课后再进行深入思考自主探究。教师可以先提出部分结论，学生在学习过半角模型后再通过尝试证明过程，在这些结论的基础上挖掘出更多的结论。鼓励学生在练习时自行总结，从知识点到思想方法再到解题模型，由浅入深，由简到繁，发现探索。在以后的课堂中，不使用练习题作为教学反馈的唯一方式，组织学生分享在课后练习中所发现的类似模型问题。

5. 结语

初中数学课堂教学立足于培养学生的数学核心素养，回归于习题实践，通过设计具有挑战性和启发性的习题，引导学生通过实践、探索和思考，掌握数学知识和方法，提高数学思维能力和应用能力。初中知识相较小学知识量大而杂，如果不能将这些知识及时建立联系，那么学生在数学学习时就会发现知识越学越多，在输出解题时会大打折扣。对此，教师作为课堂教学的引导者，应充分意识到解题模型教学对学生建立知识迁移、强化知识关联的重要性，帮助学生归类题型，找到解题突破口，为快速解题打下了基础。在教学过程当中，教学环节由简入繁、由易到难，让学生通过解决问题一步步获得成就感，激发了学习数学的兴趣，提高学生的课堂参与度和自主探索的能力。在此次教学过程中，教师通过解题模型教学中，有意识地紧抓课堂培养学生建模、方程、类比等多种数学思想，从而达到深度学习的目的。

参考文献

[1] 刘晓玫. 数学深度学习的教学理解与策略[J]. 基础教育课程, 2019(8): 33-38.

[2] 朱荣光. 触发深度学习的问题和情境[J]. 人民教育, 2021(23): 65-67.

[3] 张银. 指向深度学习的初中数学实验性教学[J]. 人民教育, 2022(20): 77-78.

[4] 徐沙沙, 代建军. 一道中考压轴题引发的数学深度学习实践研究[J]. 基础教育课程, 2020(Z2): 108-116.

[5] 中华人民共和国教育部. 义务教育数学课程标准(2022 年版) [M]. 北京: 北京师范大学出版社, 2022.

[6] 张银强, 刘兴福. 基于初中数学深度学习探究活动设计的一些策略[J]. 数学通报, 2022, 61(7): 39-43.