Computer Science and Application 计算机科学与应用, 2020, 10(6), 1122-1130
Published Online June 2020 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/csa
https://doi.org/10.12677/csa.2020.106116

The Hamiltonian Decomposition and Its Properties of Exchanged Folded Crossed Cube

Yaxin Gou

College of Mathematics and Statistics, Northwest Normal University, Lanzhou Gansu
Email: Gouyaxinw@163.com

Received: May 16th, 2020; accepted: May 28th, 2020; published: Jun. 4th, 2020

Abstract

Exchanged folded crossed cube ($EFCQ(s,t)$) is a new interconnection network for parallel computation. In this article, author proved $EFCQ(s,t)$ is Hamiltonian decomposition, when $s=t=1;2$. And $EFCQ(s,t)$ can be decomposed into a Hamiltonian cycle and s perfect matching, when $s=t=1;2;3$. Finally, some properties of $EFCQ(s,t)$ are proved.

Keywords

Exchanged Folded Crossed Cube, Hamiltonian Decomposition, Hamiltonian Cycle, Perfect Matching

交换折叠交叉立方体的Hamilton分解及其性质

苟娅昕

西北师范大学数学与统计学院，甘肃 兰州
Email: Gouyaxinw@163.com

收稿日期：2020年5月16日；录用日期：2020年5月28日；发布日期：2020年6月4日

摘　要

交换折叠交叉立方体($EFCQ(s,t)$)是一种用于并行计算的新型互连网络。在这篇文章中，作者证明了 $s=t=1;2$ 时，$EFCQ(s,t)$ 是Hamilton可分解的；$s=t=1;2;3$ 时，$EFCQ(s,t)$ 可以分解为一个Hamilton圈和s个完美对集。最后对 $EFCQ(s,t)$ 的一些性质进行了证明。

文章引用: 苟娅昕. 交换折叠交叉立方体的 Hamilton 分解及其性质[J]. 计算机科学与应用, 2020, 10(6): 1122-1130.
DOI: 10.12677/csa.2020.106116

关键词

交换折叠交叉立方体，Hamilton可分解，Hamilton圈，完美对集

1. 引言

互连网络在并行计算机系统中扮演了十分重要的角色，影响着系统的性能。尤其是在硬件开销，可扩展性，通信性能，可靠性等方面起着决定性的作用。为使大规模的并行计算系统拥有性能高的优点，并且极大地降低成本。选择有效的互连网络拓扑，成为研究界非常关注的重点。刚开始提出的均为一些平凡网络，但这些网络很多都存在不足之处。但随着超立方体网络的诞生，因为其可扩展性，正则性，强容错性以及对称性，这些很好的性质，使得超立方体网络成为并行处理和并行计算机系统常用的拓扑之一，并且得到了非常广泛的应用。与此同时超立方体网络的某些方面又存在一定的不足，为了改进这些现有的问题，超立方体的变型又被相继提出。例如折叠交叉立方体[1]，交换超立方体[2]，交换交叉立方体[3]，交叉超立方体[4]，莫比乌斯立方体[4]等。其中，K. Bhavani 和 Sudarson Jena 在 2018 年提出交换折叠交叉立方体。交换折叠交叉立方体的出现，相对于互连网络中其他拓扑，在成本和直径上有了实质性的改善。2019 年，蔡学鹏，杨伟等人提出交换折叠交叉立方体的连通度和超连通度。

在这篇文章中，证明了交换折叠交叉立方体的正则性以及该网络是一个 Hamilton 图，并且证明了在 $EFCQ(s,t)$ 中，若有 $s=t=1;2$，则 $EFCQ(s,t)$ 是 Hamilton 可分解的和若有 $s=t=1;2;3$，则 $EFCQ(s,t)$ 可以分解为一个 Hamilton 圈和 s 个完美对集的并。并且给出了 $EFCQ(3,3)$ 的三条性质。

2. 基本概念

定义 1 [5] G 的 Hamilton 圈是指包含 G 的每个顶点的圈。

定义 2 [5] 一个图若包含 Hamilton 圈，则称这个图是 Hamilton 图。

定义 3 [5] 称图 G 是 k 正则的，若对所有 $v\in V$，有 $d(v)=k$。

定义 4 [5] 设 M 是 E 的一个子集，它的元素是 G 中的连杆，并且这些连杆中的任意两个在 G 中均不相邻，则称 M 为 G 的对集(或匹配)；M 中的一条边的两个端点称为在 M 下是配对的；若对集 M 的某条边与顶点 v 关联，则称 M 饱和顶点 v，并且称 v 是 M 饱和的，否则称 v 是 M 非饱和的。若 G 的每个顶点均为 M 饱和的，则称 M 为 G 的完美对集。

定义 5 [6] 设 G 是正则图，$E(G)$ 是 G 的边集，我们称 G 是 Hamilton 可分解的，如果

要么 a) $\deg(G)=2k$，且 $E(G)$ 能被划分成 k 个 Hamilton 圈；

要么 b) $\deg(G)=2k+1$，且 $E(G)$ 能被划分成 k 个 Hamilton 圈和一个完美对集。

其中 $\deg(G)$ 表示 G 的顶点度。

定义 6 [7] [8] [9] $s+t+1$-维交换折叠交叉立方体网络被定义为一个无向图 $EFCQ(s,t)=(V,E)$，其中 $s\ge 1,t\ge 1$。

V 是图中顶点的集合，且 $V=\{a_{s-1}\cdots a_0 b_{t-1}\cdots b_0 c \mid a_i,b_j,c\in\{0,1\}, i\in[0,s-1], j\in[0,t-1]\}$。

E 是图中边的集合，且 E 是由四种互不相交的边集 $E_1\cup E_2\cup E_3\cup E_4$ 组成，对任意两个顶点有

$u,v \in V, E_1, E_2, E_3, E_4$，定义如下

1) $(u,v) \in E_1$，当且仅当 $u[0] \neq v[0], u \oplus v = 1$ 其中 $\oplus$ 是异或操作。

2) $(u,v) \in E_2$，当且仅当 $u[t:1] = v[t:1], u[0] = v[0] = 0$ 并且 $(u[s+t:t+1], v[s+t:t+1]) \in E(CQ_S)$。

3) $(u,v) \in E_3$，当且仅当 $u[s+t:t+1] = v[s+t:t+1], u[0] = v[0] = 1$ 并且 $(u[t:1], v[t:1]) \in E(CQ_t)$。

4) $(u,v) \in E_4$，当且仅当 $u = \{a_{s-1} \cdots a_0 b_{t-1} \cdots b_0 c\}, v = \{\overline{a_{s-1}} \cdots \overline{a_0} \overline{b_{t-1}} \cdots \overline{b_0} \overline{c}\}$ 且 $\overline{a_i} = 1 - a_i, \overline{b_j} = 1 - b_j, \overline{c} = 1 - c$ $a_i, b_j, c \in \{0,1\}, i \in [0, s-1], j \in [0, t-1]$。

3. 主要结果

引理[7]在 $EFCQ(s,t)$ 中二进制字符串最低位为 0 的点的度为 $s+2$；二进制字符串最低位为 1 的点的度为 $t+2$。

定理 1：$EFCQ(s,t)$ 是正则的，若 $s = t, s \geq 1, t \geq 1$。

$EFCQ(s,t)$ 是非正则的，若 $s \neq t, s \geq 1, t \geq 1$。

证明：K. Bhavani 在文献[7]中证明了 $EFCQ(s,t)$ 的度。在 $EFCQ(s,t)$ 中二进制字符串最低位为 0 的点的度为 $s+2$；二进制字符串最低位为 1 的点的度为 $t+2$。故当 $s = t$ 时，在 $EFCQ(s,t)$ 中，对任意 $v \in V$，都有 $\deg(v) = s+2$。根据定义 3，$EFCQ(s,t)$ 是正则的。同理，当 $s \neq t$ 时，$EFCQ(s,t)$ 是非正则的。

定理 2：$EFCQ(s,t)$ 是 Hamilton 图。

证明：周东仿在文献[9]中，提出了 Hamiltonian cycle 算法，通过调用这个算法可以得到 $ECQ(s,t)$ 上的一个 Hamilton 圈。由于 $EFCQ(s,t)$ 是在 $ECQ(s,t)$ 的基础上在互补的两个点上增加一条补边所得，根据定义 2，$EFCQ(s,t)$ 是 Hamilton 图。

定理 3：1) $EFCQ(1,1)$ 是 Hamilton 可分解的。

2) $EFCQ(2,2)$ 是 Hamilton 可分解的。

证明 1)：在 $EFCQ(1,1)$ 中，$\deg(EFCQ(1,1)) = 3$，$EFCQ(1,1)$ 是正则图。则根据定义 5 可知 $EFCQ(1,1)$ 能被划分成 1 个边不交的 Hamilton 圈和 1 个完美对集的并(如图 1)。

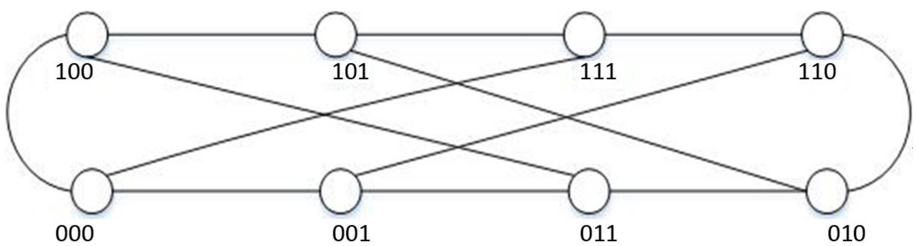

Figure 1. $EFCQ(1,1)$

图 1. $EFCQ(1,1)$ 的图表示

$EFCQ(1,1)$ 中的 Hamilton 圈为：

100-101-111-110-010-011-001-000-100

$EFCQ(1,1)$ 中的完美对集为：

100-011, 101-010, 111-000, 110-001

证明 2)：在 $EFCQ(2,2)$ 中，$\deg(EFCQ(2,2)) = 4$，$EFCQ(2,2)$ 是正则图。则根据定义 5 可知 $EFCQ(2,2)$ 能被划分成 2 个边不交的 Hamilton 圈(如图 2)。

$EFCQ(2,2)$ 中的 Hamilton 圈 H_1 为：

01000-01001-01011-01010-11010-11011-11001-11000-10000-10001-10011-10010-00010-00011-00111-00110-01110-01111-01101-01100-11100-11101-11111-11110-10110-10111-10101-10100-00100-00101-00001-00000-01000

$EFCQ(2,2)$ 中的 Hamilton 圈 H_2 为：

01000-11000-00111-00101-11010-10010-01101-01001-10110-00110-11001-11101-00010-01010-10101-10001-01110-11110-00001-00011-11100-10100-01011-01111-10000-00000-11111-11011-00100-01100-10011-10111-01000

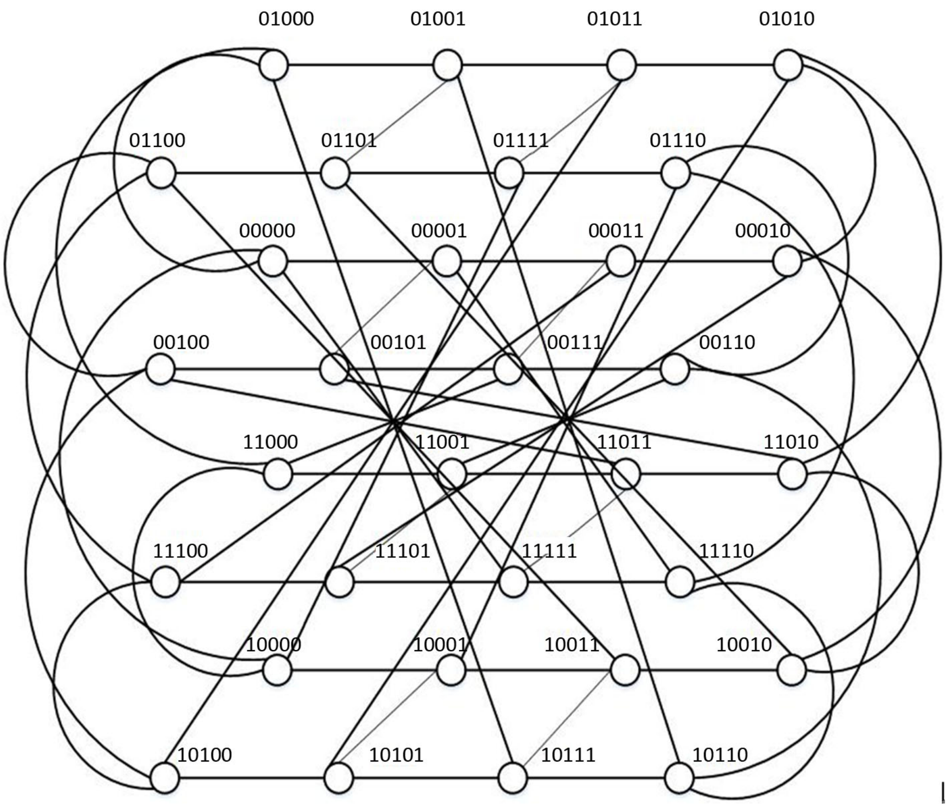

Figure 2. $EFCQ(2,2)$

图 2. $EFCQ(2,2)$ 的图表示

定理 4 1) $EFCQ(3,3)$ 可以分解为 24 个 8 圈 16 个 4 圈和一个完美对集并。

2) $EFCQ(3,3)$ 可以分解为 32 个 4 圈 16 个 8 圈和一个完美对集并。

3) $EFCQ(3,3)$ 可以分解为一个 Hamilton 圈 22 个 4 圈 5 个 8 圈和一个完美对集的并(如图 3)。

图 3 是 $ECQ(3,3)$，$EFCQ(3,3)$ 是在它的基础上增加补边，连接 $ECQ(3,3)$ 中互补的两个点所得。

证明 1)：令 $a_2 \in \{0,1\}$，$EFCQ(3,3)$ 中有 24 个 8 圈其中 16 个可以表示为：

$a_2$001011-$a_2$001010-$a_2$011010-$a_2$011011-$a_2$011111-$a_2$011110-$a_2$001110-$a_2$001111-$a_2$001011；

$a_2$001001-$a_2$001000-$a_2$011000-$a_2$011001-$a_2$011101-$a_2$011100-$a_2$001100-$a_2$001101-$a_2$001001；

$a_2$000011-$a_2$000010-$a_2$010010-$a_2$010011-$a_2$010111-$a_2$010110-$a_2$000110-$a_2$000111-$a_2$000011；

$a_2$000001-$a_2$000000-$a_2$010000-$a_2$010001-$a_2$010101-$a_2$010100-$a_2$000100-$a_2$000101-$a_2$000001；

$a_2$101011-$a_2$101010-$a_2$111010-$a_2$111011-$a_2$111111-$a_2$111110-$a_2$101110-$a_2$101111-$a_2$101011；

$a_2101001$-$a_2101000$-$a_2111000$-$a_2111001$-$a_2111101$-$a_2111100$-$a_2101100$-$a_2101101$-$a_2101001$；

$a_2100011$-$a_2100010$-$a_2110010$-$a_2110011$-$a_2110111$-$a_2110110$-$a_2100110$-$a_2100111$-$a_2100011$；

$a_2100001$-$a_2100000$-$a_2110000$-$a_2110001$-$a_2110101$-$a_2110100$-$a_2100100$-$a_2100101$-$a_2100001$；

令 $a_2a_1a_0 \in \{000,001,010,011,100,101,110,111\}$，24 个 8 圈中剩余 8 个 8 圈可以表示为：

$a_2a_1a_0 1101$-$a_2a_1a_0 1111$-$a_2a_1a_0 0011$-$a_2a_1a_0 0001$-$a_2a_1a_0 1001$-$a_2a_1a_0 1011$-$a_2a_1a_0 0111$-$a_2a_1a_0 0101$-$a_2a_1a_0 1101$

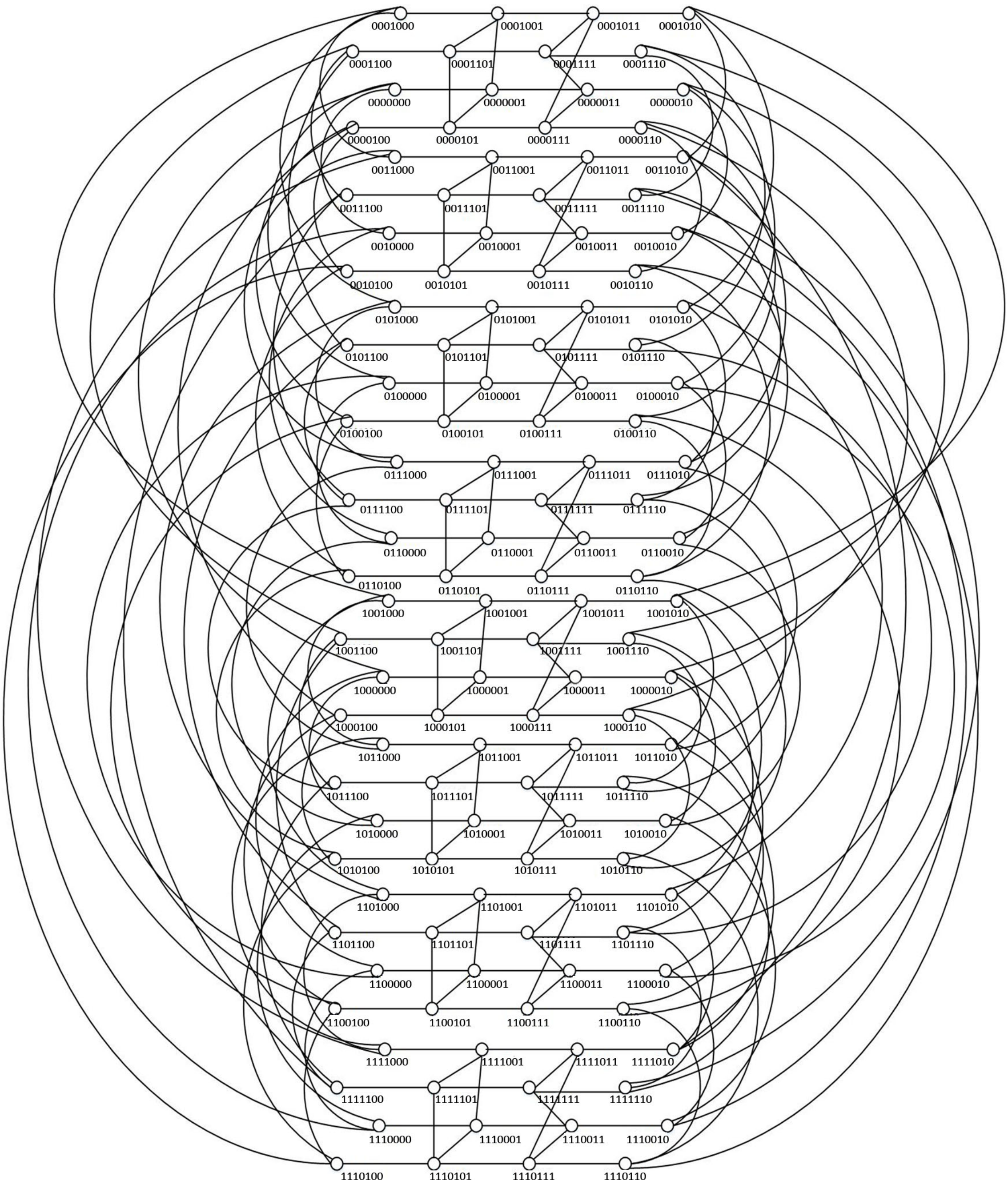

Figure 3. $ECQ(3,3)$

图 3. $ECQ(3,3)$ 的图表示

令 $b_2b_1b_0c\in\{1000,1100,0000,0100\}$, $b_2'b_1'b_0'c'\in\{1010,1110,0010,0110\}$

$EFCQ(3,3)$ 中有 16 个 4 圈可以表示为：

$$000b_2b_1b_0c\text{-}010b_2b_1b_0c\text{-}110b_2b_1b_0c\text{-}100b_2b_1b_0c\text{-}000b_2b_1b_0c$$

$$001b_2b_1b_0c\text{-}011b_2b_1b_0c\text{-}101b_2b_1b_0c\text{-}111b_2b_1b_0c\text{-}001b_2b_1b_0c$$

$$000b_2'b_1'b_0'c'\text{-}010b_2'b_1'b_0'c'\text{-}110b_2'b_1'b_0'c'\text{-}100b_2'b_1'b_0'c'\text{-}000b_2'b_1'b_0'c'$$

$$001b_2'b_1'b_0'c'\text{-}011b_2'b_1'b_0'c'\text{-}101b_2'b_1'b_0'c'\text{-}111b_2'b_1'b_0'c'\text{-}001b_2'b_1'b_0'c'$$

$EFCQ(3,3)$ 中的完美对集为 M：

0001000-1110111, 0001001-1110110, 0001011-1110100, 0001010-1110101, 0001100-1110011, 0001101-1110010, 0001111-1110000, 0001110-1110001, 0000000-1111111, 0000001-1111110, 0000011-1111100, 0000010-1111101, 0000100-1111011, 0000101-1111010, 0000111-1111000, 0000110-1111001, 0011000-1100111, 0011001-1100110, 0011011-1100100, 0011010-1100101, 0011100-1100011, 0011101-1100010, 0011111-1100000, 0011110-1100001, 0010000-1101111, 0010001-1101110, 0010011-1101100, 0010010-1101101, 0010100-1101011, 0010101-1101010, 0010111-1101000, 0010110-1101001, 0101000-1010111, 0101001-1010110, 0101011-1010100, 0101010-1010101, 0101100-1010011, 0101101-1010010, 0101111-1010000, 0101110-1010001, 0100000-1011111, 0100001-1011110, 0100011-1011100, 0100010-1011101, 0100100-1011011, 0100101-1011010, 0100111-1011000, 0100110-1011001, 0111000-1000111, 0111001-1000110, 0111011-1000100, 0111010-1000101, 0111100-1000011, 0111101-1000010, 0111111-1000000, 0111110-1000001, 0110000-1001111, 0110001-1001110, 0110011-1001100, 0110010-1001101, 0110100-1001011, 0110101-1001010, 0110111-1001000, 0110110-1001001.

即：$EFCQ(3,3)$ 可以分解为 24 个 8 圈 16 个 4 圈和一个完美对集 M 的并。

证明 2)：令 $a_2a_1a_0\in\{000,010,100,110\}$, $a_2'a_1'a_0'\in\{001,011,101,111\}$。

当 $a_2a_1a_0=000$ 时，同一个圈内 $a_2'a_1'a_0'=001$；$a_2a_1a_0=010$ 时，同一个圈内 $a_2'a_1'a_0'=011$；当 $a_2a_1a_0=100$ 时，同一个圈内 $a_2'a_1'a_0'=101$；$a_2a_1a_0=110$ 时，同一个圈内 $a_2'a_1'a_0'=111$。$EFCQ(3,3)$ 中的 16 个 8 圈可以表示为：

$$a_2a_1a_0 1000\text{-}a_2a_1a_0 1001\text{-}a_2a_1a_0 1011\text{-}a_2a_1a_0 1010\text{-}a_2'a_1'a_0' 1010\text{-}a_2'a_1'a_0' 1011\text{-}a_2'a_1'a_0' 1001\text{-}a_2'a_1'a_0' 1000\text{-}a_2a_1a_0 1000;$$

$$a_2a_1a_0 1100\text{-}a_2a_1a_0 1101\text{-}a_2a_1a_0 1111\text{-}a_2a_1a_0 1110\text{-}a_2'a_1'a_0' 1110\text{-}a_2'a_1'a_0' 1111\text{-}a_2'a_1'a_0' 1101\text{-}a_2'a_1'a_0' 1100\text{-}a_2a_1a_0 1100;$$

$$a_2a_1a_0 0000\text{-}a_2a_1a_0 0001\text{-}a_2a_1a_0 0011\text{-}a_2a_1a_0 0010\text{-}a_2'a_1'a_0' 0010\text{-}a_2'a_1'a_0' 0011\text{-}a_2'a_1'a_0' 0001\text{-}a_2'a_1'a_0' 0000\text{-}a_2a_1a_0 0000;$$

$$a_2a_1a_0 0100\text{-}a_2a_1a_0 0101\text{-}a_2a_1a_0 0111\text{-}a_2a_1a_0 0110\text{-}a_2'a_1'a_0' 0110\text{-}a_2'a_1'a_0' 0111\text{-}a_2'a_1'a_0' 0101\text{-}a_2'a_1'a_0' 0100\text{-}a_2a_1a_0 0100;$$

令 $a_2a_1a_0\in\{000,001,010,011,100,101,110,111\}$，$EFCQ(3,3)$ 中的 32 个 4 圈其中 16 个可以表示为：

$a_2a_1a_0 1001\text{-}a_2a_1a_0 1101\text{-}a_2a_1a_0 0101\text{-}a_2a_1a_0 0001\text{-}a_2a_1a_0 1001$；

$a_2a_1a_0 1011\text{-}a_2a_1a_0 0111\text{-}a_2a_1a_0 0011\text{-}a_2a_1a_0 1111\text{-}a_2a_1a_0 1011$。

$EFCQ(3,3)$ 中有 32 个 4 圈剩余的 16 个和定理 4 1)的证明中所找到的 16 个 4 圈相同。

完美对集为 $EFCQ(3,3)$ 中的对集 M。

即：$EFCQ(3,3)$ 可以分解为 16 个 8 圈 32 个 4 圈和一个完美对集 M 的并。

证明 3)：$EFCQ(3,3)$ 是一个 Hamilton 图，则可以找到 $EFCQ(3,3)$ 中有一个 Hamilton 圈 H 0011010-0011011-0010111-0010110-0000110-0000111-0000101-0000100-0010100-0010101-0010001-0010000-0000000-0000001-0000011-0000010-0010010-0010011-0011111-0011110-0001110-0001111-0001101-0001

100-0011100-0011101-0011001-0011000-0001000-0001001-0001011-0001010-0101010-0101011-0101001-0101000-0111000-0111001-0111101-0111100-0101100-0101101-0101111-0101110-0111110-0111111-0110011-0110010-0100010-0100011-0100001-0100000-0110000-0110001-0110101-0110100-0100100-0100101-0100111-0100110-0110110-0110111-0111011-0111010-1011010-1011011-1010111-1010110-1000110-1000111-1000101-1000100-1010100-1010101-1010001-1010000-1000000-1000001-1000011-1000010-1010010-1010011-1011111-1011110-1001110-1001111-1001101-1001100-1011100-1011101-1011001-1011000-1001000-1001001-1001011-1001010-1101010-1101011-1101001-1101000-1111000-1111001-1111101-1111100-1101100-1101101-1101111-1101110-1111110-1111111-1110011-1110010-1100010-1100011-1100001-1100000-1110000-1110001-1110101-1110100-1100100-1100101-1100111-1100110-1110110-1110111-1111011-1111010-0011010

除去 H 所占用的边，$EFCQ(3,3)$ 中剩余的边可以分解为的 5 个 8 圈 22 个 4 圈和一个完美对集的并。

其中所分解的 5 个 8 圈为：

0011001-0011011-0011111-0011101-0010101-0010111-0010011-0010001-0011001；

0111001-0111011-0111111-0111101-0110101-0110111-0110011-0110001-0111001；

1011001-1011011-1011111-1011101-1010101-1010111-1010011-1010001-1011001；

1111001-1111011-1111111-1111101-1110101-1110111-1110011-1110001-1111001；

0001010-0011010-0111010-0101010-1101010-1111010-1011010-1001010-0001010。

$EFCQ(3,3)$ 中的 22 个 4 圈，其中 14 个 4 圈为定理 4 1)证明中所找到的 16 个 4 圈中除去两个 4 圈 0001010-0101010-1101010-1001010-0001010；0011010-0111010-1011010-1111010-0011010 所得。

令 $a_2a_1a_0 \in \{000,010,100,110\}$，22 个 4 圈中剩余的 8 个 4 圈则可以表示为：

$a_2a_1a_0$1001-$a_2a_1a_0$1101-$a_2a_1a_0$0101-$a_2a_1a_0$0001-$a_2a_1a_0$1001；

$a_2a_1a_0$1011-$a_2a_1a_0$0111-$a_2a_1a_0$0011-$a_2a_1a_0$1111-$a_2a_1a_0$1011。

完美对集为 $EFCQ(3,3)$ 中的对集 M。

即：$EFCQ(3,3)$ 可以分解为一个 Hamilton 圈 5 个 8 圈 22 个 4 圈和一个完美对集 M 的并。

定理 5 1) $EFCQ(1,1)$ 可以分解为一个 Hamilton 圈和 1 个完美对集的并。

2) $EFCQ(2,2)$ 可以分解为一个 Hamilton 圈和 2 个完美对集的并。

3) $EFCQ(3,3)$ 可以分解为一个 Hamilton 圈和 3 个完美对集的并。

证明 1)：根据定理 3 1)的证明，显然可得。

证明 2)：根据定理 3 2)的证明，$EFCQ(2,2)$ 中有一个 Hamilton 圈为 H_1。

它的完美对集为 M_1,M_2

M_1: 01000-11000, 01100-00100, 00000-10000, 11100-10100, 01010-00010, 01110-11110, 00110-10110, 11010-10010, 01001-01101, 01011-01111, 00001-00011, 00101-00111, 11001-11101, 11011-11111, 10001-10101, 10011-10111.

M_2: 01000-10111, 01001-10110, 01011-10100, 01010-10101, 01100-10011, 01101-10010, 01111-10000, 01110-10001, 00000-11111, 00001-11110, 00011-11100, 00010-11101, 00100-11011, 00101-11010, 00111-11000, 00110-11001.

证明 3)：根据定理 2，$EFCQ(3,3)$ 是一个 Hamilton 图。已知 $EFCQ(3,3)$ 中有一个 Hamilton 圈 H。除去 H 所包含的边，将剩余的边割裂为九块 $E_a,E_b,E_c,E_d,E_e,E_f,E_g,E_h,E_i$，

E_a: 0001000-0101000, 0001100-0101100, 0000000-0100000, 0000100-0100100, 0011000-0111000, 0011100-0111100, 0010000-0110000, 0010100-0110100, 1001000-1101000, 1001100-1101100, 1000000-1100000, 1000100-1100100, 1011000-1111000, 1011100-1111100, 1010000-1110000, 1010100-1110100.

E_b: 0001010-0011010, 0001110-0101110, 0000010-0100010, 0000110-0100110, 0011110-0111110, 0010010-0110010, 0010110-0110110, 0101010-0111010, 1001010-1011010, 1001110-1101110, 1000010-1100010, 1000110-1100110, 1011110-1111110, 1010010-1110010, 1010110-1110110, 1101010-1111010.

E_c: 0001000-1001000, 0001100-1001100, 0000000-1000000, 0000100-1000100, 0011000-1111000, 0011100-1111100, 0010000-1110000, 0010100-1110100, 0101000-1101000, 0101100-1101100, 0100000-1100000, 0100100-1100100, 0111000-1011000, 0111100-1011100, 0110000-1010000, 0110100-1010100.

E_d: 0001010-1001010, 0001110-1001110, 0000010-1000010, 0000110-1000110, 0011010-0111010, 0011110-1111110, 0010010-1110010, 0010110-1110110, 0101010-1101010, 0101110-1101110, 0100010-1100010, 0100110-1100110, 0111110-1011110, 0110010-1010010, 0110110-1010110, 1011010-1111010.

E_e: 0001001-0001101, 0000001-0000101, 0011101-0010101, 0011001-0010001, 0011011-0011111, 0010011-0010111, 0101001-0101101, 0100001-0100101, 0111101-0110101, 0111001-0110001, 0111011-0111111, 0110011-0110111, 1001001-1001101, 1000001-1000101, 1011101-1010101, 1011001-1010001, 1011011-1011111, 1010011-1010111, 1101001-1101101, 1100001-1100101, 1111101-1110101, 1111001-1110001, 1111011-1111111, 1110011-1110111.

E_f: 0001101-0000101, 0001001-0000001, 0011001-0011011, 0011101-0011111, 0010001-0010011, 0010101-0010111, 0101101-0100101, 0101001-0100001, 0111001-0111011, 0111101-0111111, 0110001-0110011, 0110101-0110111, 1001101-1000101, 1001001-1000001, 1011001-1011011, 1011101-1011111, 1010001-1010011, 1010101-1010111, 1101101-1100101, 1101001-1100001, 1111001-1111011, 1111101-1111111, 1110001-1110011, 1110101-1110111.

E_g: 0001011-0001111, 0000011-0000111, 0100011-0100111, 0101011-0101111, 1001011-1001111, 1000011-1000111, 1101011-1101111, 1100011-1100111.

E_h: 0001111-0000011, 0001011-0000111, 0101111-0100011, 0101011-0100111, 1001111-1000011, 1001011-1000111, 1101111-1100011, 1101011-1100111.

$E_i = E(M)$

我们所割裂的九块，可以组成 17 种完美对集分别为：

$$M_1, M_2, M_3, M_4, M_5, M_6, M_7, M_8, M_9, M_{10}, M_{11}, M_{12}, M_{13}, M_{14}, M_{15}, M_{16}, M$$

$$M_1 = (E_a \cup E_b \cup E_e \cup E_g), M_2 = (E_a \cup E_b \cup E_f \cup E_h), M_3 = (E_a \cup E_b \cup E_e \cup E_h),$$

$$M_4 = (E_a \cup E_b \cup E_f \cup E_g), M_5 = (E_c \cup E_d \cup E_f \cup E_h), M_6 = (E_c \cup E_d \cup E_e \cup E_g)$$

$$M_7 = (E_c \cup E_d \cup E_e \cup E_h), M_8 = (E_c \cup E_d \cup E_f \cup E_g), M_9 = (E_c \cup E_b \cup E_e \cup E_g)$$

$$M_{10} = (E_c \cup E_b \cup E_f \cup E_h), M_{11} = (E_c \cup E_b \cup E_e \cup E_h), M_{12} = (E_c \cup E_b \cup E_f \cup E_g)$$

$$M_{13} = (E_a \cup E_d \cup E_f \cup E_h), M_{14} = (E_a \cup E_d \cup E_e \cup E_g), M_{15} = (E_a \cup E_d \cup E_e \cup E_h)$$

$$M_{16} = (E_a \cup E_d \cup E_f \cup E_g)$$

$$\begin{aligned} & E(EFCQ(3,3)) \\ & = E(H) \cup E(M) \cup E(M_1) \cup E(M_5) = E(H) \cup E(M) \cup E(M_2) \cup E(M_6) \\ & = E(H) \cup E(M) \cup E(M_3) \cup E(M_8) = E(H) \cup E(M) \cup E(M_4) \cup E(M_7) \\ & = E(H) \cup E(M) \cup E(M_9) \cup E(M_{13}) = E(H) \cup E(M) \cup E(M_{10}) \cup E(M_{14}) \\ & = E(H) \cup E(M) \cup E(M_{11}) \cup E(M_{16}) = E(H) \cup E(M) \cup E(M_{12}) \cup E(M_{15}) \end{aligned}$$

即：$EFCQ(3,3)$可以分解为一个Hamilton圈和三个完美对集的并。

4. 结束语

交换折叠交叉立方体网络作为一种新型的互连网络，具有非常重要的意义。本文中给出了$EFCQ(s,t)$相关定理，对低维的交换折叠交叉立方体的 Hamilton 可分解性做了证明，但对于$s=t\geq 3$的情况，$EFCQ(s,t)$是否是 Hamilton 可分解的以及$s=t\geq 4$情况，$EFCQ(s,t)$是否可以分解为一个 Hamilton 圈和s个完美对集的问题仍需要进一步研究证明。

参考文献

[1] Nibedita, A. and Tripathy, C.R. (2010) The Folded Crossed Cube: A New Interconnection Network for Parallel Systems. *International Journal of Computer Applications*, **4**, 43-40.

[2] Lon, P.K.K., Hsu, W.J. and Pan, Y. (2005) The Exchanged Hypercube. *IEEE Transaction on Parallel and Distributed Systems*, **16**, 866-874. https://doi.org/10.1109/tpds.2005.113

[3] Li, K., Mu, Y., Li, K. and Min, G. (2013) Exchanged Crossed Cube: A Novel Interconnection Network for Parallel Computation. *IEEE Transaction on Parallel and Distributed Systems*, **24**, 2211-2219. https://doi.org/10.1109/tpds.2012.330

[4] 徐俊明. 组合网络理论[M]. 北京: 科学出版社, 2007.

[5] Bondy, J.A. and Murty, U.S.R. (1976) Graph Theory with Applications. Macmillan Press Ltd., London and Basingstoke.

[6] 师海忠. 正则图连通圈: 多种互连网络的统一模型[C]//中国运筹学会第十届学术交流会论文集, 2010: 202-208.

[7] Bhavani, K. and Jena, S. (2018) Exchanged Folded Crossed Cube: A New Interconnection Network for Parallel Computation. *Information Processing Letters*, **137**, 40-46. https://doi.org/10.1016/j.ipl.2018.04.017

[8] 蔡学鹏, 杨伟, 杜洁, 任佰通. 交换折叠交叉立方体的连通度和超连通度[J]. 吉首大学学报, 2019, 40(5): 1-9.

[9] 周东仿. 交换交叉立方体上若干性质的研究[D]: [博士学位论文]. 苏州: 苏州大学, 2017.