关于四面体对棱棱长比和二面角正弦比的定理

李兴源

广州一智通供应链管理有限公司，广州，中国
Email: lihpb@qq.com

收稿日期：2021年2月28日；发布日期：2021年3月2日

摘　要

本文给出了四面体的三组对棱棱长之比以及三组对棱所夹二面角正弦比的定理，推导出四面体的对棱棱长、对棱所夹的二面角正弦值与该四面体各侧面面积、外接圆半径之间的关系。

关键词

四面体，对棱，二面角，正弦比

The Theorem of Opposite Edge Length Ratio and Dihedral Angle Sine Ratio in the Tetrahedron

Xingyuan Li

Guangzhou 1ziton Supply Chain Management Co., Ltd, Guangzhou, China
Email: lihpb@qq.com

Received: Feb. 28th, 2021, published: Mar. 2nd, 2021

Abstract

In this paper, we give the theorem of the ratio of the three pairs of opposite edges length and the sine ratio of three pairs of opposite edges between their dihedral angles in the tetrahedron, the relationship between the opposite edges length, the sine of the opposite edges between their dihedral angles of a tetrahedron and the area of each side and the circumradius is deduced in the tetrahedron.

HANS PrePrints | https://doi.org/10.12677/hans.preprints.61006. | CC-BY 4.0 Open Access | rec: 28 February 2021, publ: 9 March 2021

Keywords

Tetrahedron, Opposite Edges, Dihedral Angle, Sine Ratio

1. 引言

本文约定四面体 $A_0A_1A_2A_3$ 的各顶点 A_i 所对之底面三角形及其面积为 S_i，S_i 的外接圆半径为 R_i，S_i 与 S_j 所夹的二面角表为 $\langle S_i, S_j\rangle$， $0 \le i < j \le 3$。四面体 $A_0A_1A_2A_3$ 的体积为 V。

下面先给出有关四面体和三面角的几个一般正弦定理：

引理一

$$\frac{\sin\langle S_2,S_3\rangle}{A_0A_1\cdot S_1}=\frac{\sin\langle S_1,S_3\rangle}{A_0A_2\cdot S_2}=\frac{\sin\langle S_1,S_2\rangle}{A_0A_3\cdot S_3},$$

$$\frac{S_1\cdot\sin\langle S_0,S_1\rangle}{A_2A_3}=\frac{S_2\cdot\sin\langle S_0,S_2\rangle}{A_1A_3}=\frac{S_3\cdot\sin\langle S_0,S_3\rangle}{A_1A_2}。$$

证明：根据四面体的体积公式有[1]

$$V=\frac{2}{3}\cdot\frac{S_2\cdot S_3}{A_0A_1}\cdot\sin\langle S_2,S_3\rangle=\frac{2}{3}\cdot\frac{S_1\cdot S_3}{A_0A_2}\cdot\sin\langle S_1,S_3\rangle=\frac{2}{3}\cdot\frac{S_1\cdot S_2}{A_0A_3}\cdot\sin\langle S_1,S_2\rangle。$$

对上式除以 $S_1S_2S_3$ 即可证得命题的第一式。又

$$V=\frac{2}{3}\cdot\frac{S_0\cdot S_1}{A_2A_3}\cdot\sin\langle S_0,S_1\rangle=\frac{2}{3}\cdot\frac{S_0\cdot S_2}{A_1A_3}\cdot\sin\langle S_0,S_2\rangle=\frac{2}{3}\cdot\frac{S_0\cdot S_3}{A_1A_2}\cdot\sin\langle S_0,S_3\rangle。$$

对上式除以 S_0 即可证得命题的第二式。

再将引理一的两式对应相乘即可证得下面的引理二。

引理二

$$\frac{\sin\langle S_0,S_1\rangle\cdot\sin\langle S_2,S_3\rangle}{A_0A_1\cdot A_2A_3}=\frac{\sin\langle S_0,S_2\rangle\cdot\sin\langle S_1,S_3\rangle}{A_0A_2\cdot A_1A_3}=\frac{\sin\langle S_0,S_3\rangle\cdot\sin\langle S_1,S_2\rangle}{A_0A_3\cdot A_1A_2}。$$

引理三在三面角 $\angle A_0-A_1A_2A_3$ 中，有以下正弦定理：

$$\frac{\sin\langle S_2,S_3\rangle}{\sin\angle A_2A_0A_3}=\frac{\sin\langle S_1,S_3\rangle}{\sin\angle A_1A_0A_3}=\frac{\sin\langle S_1,S_2\rangle}{\sin\angle A_1A_0A_2}。\text{[2]}$$

引理四

$$\frac{R_1\cdot\sin\langle S_2,S_3\rangle}{A_2A_3}=\frac{R_2\cdot\sin\langle S_1,S_3\rangle}{A_1A_3}=\frac{R_3\cdot\sin\langle S_1,S_2\rangle}{A_1A_2},\quad\frac{\sin\langle S_0,S_1\rangle}{A_0A_1\cdot R_1}=\frac{\sin\langle S_0,S_2\rangle}{A_0A_2\cdot R_2}=\frac{\sin\langle S_0,S_3\rangle}{A_0A_3\cdot R_3}。$$

证明：在三角形 $A_0A_2A_3$ 中，由三角形的正弦定理有[3]

$$\frac{A_2A_3}{\sin\angle A_2A_0A_3}=\frac{A_0A_2}{\sin\angle A_0A_3A_2}=\frac{A_0A_3}{\sin\angle A_0A_2A_3}=2R_1,$$

即

$$A_2A_3=2R_1\cdot\sin\angle A_2A_0A_3。$$

同理

$$A_1A_3 = 2R_2 \cdot \sin\angle A_1A_0A_3,\quad A_1A_2 = 2R_3 \cdot \sin\angle A_1A_0A_2 。$$

根据引理三可知

$$\begin{aligned}\frac{R_1\cdot\sin\langle S_2,S_3\rangle}{A_2A_3} &= \frac{R_2\cdot\sin\langle S_1,S_3\rangle}{A_1A_3} = \frac{R_3\cdot\sin\langle S_1,S_2\rangle}{A_1A_2}\\ &= \frac{\sin\langle S_2,S_3\rangle}{2\cdot\sin\angle A_2A_0A_3} = \frac{\sin\langle S_1,S_3\rangle}{2\cdot\sin\angle A_1A_0A_3} = \frac{\sin\langle S_1,S_2\rangle}{2\cdot\sin\angle A_1A_0A_2}\end{aligned} 。$$

故命题第一式得证，再由命题第一式与引理二对应相除即得命题第二式。该命题第二式的证明还可参考文献[4]。

2. 主要结论

在四面体 $A_0A_1A_2A_3$ 中，各顶点 A_i 所对之底面三角形及其面积为 S_i，S_i 的外接圆半径为 R_i，S_i 与 S_j 所夹的二面角表为 $\langle S_i,S_j\rangle$，$0\le i<j\le 3$。

只要将引理一和引理四各自的第一式对应相除，或者将引理一和引理四各自的第二式对应相除，即可得到下面定理。

2.1. 四面体的对棱棱长比定理

$$\frac{A_0A_1}{A_2A_3}\cdot R_1\cdot S_1 = \frac{A_0A_2}{A_1A_3}\cdot R_2\cdot S_2 = \frac{A_0A_3}{A_1A_2}\cdot R_3\cdot S_3 。$$

再将引理一的第一式和引理四的第二式对应相除，或者将引理一的第二式和引理四的第一式对应相除，还可得到下面定理。

2.2. 四面体的对棱二面角正弦比定理

$$\frac{S_1\cdot\sin\langle S_0,S_1\rangle}{R_1\cdot\sin\langle S_2,S_3\rangle} = \frac{S_2\cdot\sin\langle S_0,S_2\rangle}{R_2\cdot\sin\langle S_1,S_3\rangle} = \frac{S_3\cdot\sin\langle S_0,S_3\rangle}{R_3\cdot\sin\langle S_1,S_2\rangle} 。$$

参考文献

[1] 苏化明. 关于单形二面角平分面面积的不等式[J]. 数学杂志, 1992, 12(3): 315-318.
[2] 沈慧祥. 三面角的正弦定理及其应用[J]. 中学数学(苏州), 1996, 7: 13-15.
[3] 何逸萌. 三角形中正弦定理、余弦定理、射影定理的等价性的证明[J]. 数学学习与研究：教研版, 2015, 15: 145.
[4] 贺茂佑. 四面体中的类正弦定理[J]. 数学通讯, 2005, 9: 31.

HANS PrePrints | https://doi.org/10.12677/hans.preprints.61006. | CC-BY 4.0 Open Access | rec: 28 February 2021, publ: 9 March 2021