

# Simplified Calculation of Natural Frequency of Structure Considering Axial Force

Mengzeng Cao, Bin Li

Civil Engineering School, Inner Mongolia University of Science & Technology, Baotou Inner Mongolia  
Email: 925142999@qq.com

Received: Apr. 24<sup>th</sup>, 2019; accepted: May 9<sup>th</sup>, 2019; published: May 16<sup>th</sup>, 2019

---

## Abstract

The effect of the axial force has a great influence on the stiffness of the system, because the bending of the bar and the axial force will increase the additional bending moment and increase the geometric stiffness of the structure, the calculation is very complicated after introducing the geometric stiffness.

## Keywords

Axial Force, Natural Frequency, Arch Truss, Simplified Calculation

---

# 考虑轴向力作用结构自振频率的简化计算

曹梦增, 李 斌

内蒙古科技大学土木工程学院, 内蒙古 包头  
Email: 925142999@qq.com

收稿日期: 2019年4月24日; 录用日期: 2019年5月9日; 发布日期: 2019年5月16日

---

## 摘 要

轴向力的作用对体系的刚度会产生较大的影响, 由于杆件的弯曲, 轴力作用会增加附加弯矩, 增加了结构的几何刚度, 引入几何刚度后计算颇为复杂。本文利用拱桁架辅助体, 引入合理拱轴概念, 对轴力作用下的自振频率进行了简化, 方法简单适用且精度较高。

## 关键词

轴向力, 自振频率, 拱桁架, 简化计算

---



## 1. 引言

自振频率是结构的重要动力之一, 在结构动力分析中占有重要的地位, 与之而来的也有各种各样的计算方法。

本文仅以简支梁为研究对象, 在原来偏微分求解结构自振频率的基础上, 利用一些近似方法求解自振频率, 以及通过自振频率控制轴力的取值。本文利用拱桁架辅助体, 引入合理拱轴概念, 对轴力作用下的自振频率进行了简化, 是一种具有创新性的解决办法。此研究方法可以为一些实际工程提供一些参考。

## 2. 简化模型

### 2.1. 简化模型 I

现以跨度为  $l$  的简支梁为例, 规定轴力受压为正, 受拉为负, 如图 1 所示。为了简便计算, 将直杆转化成桁架体系[1], 如图 2 所示。在结构承受范围内, 将直杆分成节点过多的桁架, 产生的弯曲效果和原直杆效果相差无几。为了便于观察, 将原图形进行翻转, 以直线替代曲线, 并对其桁架的每一个节点进行编号。假设杆件以顺时针方向转到  $x$  轴的角度为正值, 反之为负, 如图 3 所示。

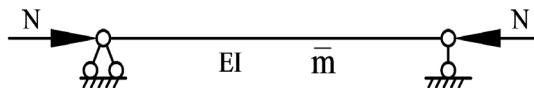


Figure 1. Diagram of simply supported beam

图 1. 简支梁简图

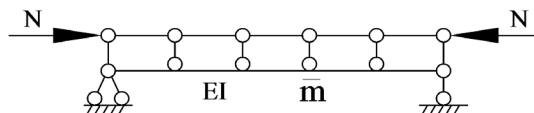


Figure 2. Diagram of simply supported beam truss system

图 2. 简支梁桁架体系简图

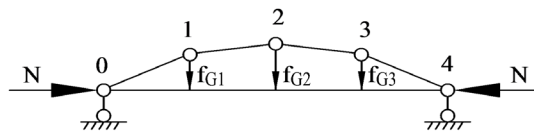


Figure 3. Post-deformation diagram

图 3. 变形后简图

首先选取结点 0, 如图 4 所示, 由  $\sum F_x = 0$  可知  $N_{01} = -N/\cos\alpha_0$ , 再取结点 1 进行分析, 如图 5 所示。

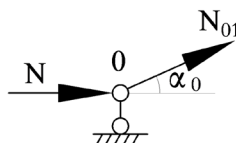


Figure 4. Node zero

图 4. 结点 0

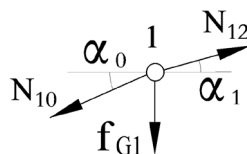


Figure 5. Node one

图 5. 结点 1

由  $\sum F_y = 0$  和  $\sum F_x = 0$  得:

$$N_{01} \sin \alpha_0 + f_{G1} - N_{12} \sin \alpha_1 = 0, \quad N_{12} \cos \alpha_1 - N_{01} \cos \alpha_0 = 0$$

化简整理为

$$-\frac{N}{\cos \alpha_0} \sin \alpha_0 + f_{G1} - \left( -\frac{N}{\cos \alpha_1} \right) \sin \alpha_1 = 0, \quad f_{G1} = N (\tan \alpha_0 - \tan \alpha_1)$$

当  $\alpha$  角度很小时,  $\tan \alpha \approx \alpha$

$$f_{G1} = N (\alpha_0 - \alpha_1) \quad (1)$$

利用公式(1)求解自振频率, 关键是确定结构的第一振型  $Y(x)$ , 只要确定第一振型  $Y(x)$  后, 则可确定  $\alpha_i$  从而轴力的作用转化为竖向力的作用, 如图 6 所示。该简图是无限自由度体系, 有竖向作用力下自振频率计算问题, 如用集中质量原理把均布质量集中在位移最大  $l/2$  处, 因此  $m_z = \bar{m}l/2$ , 计算简图如图 7 所示。

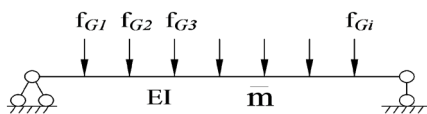


Figure 6. Diagram of calculation under vertical force

图 6. 竖向力作用下计算简图

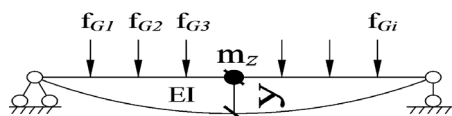


Figure 7. Calculation diagram of concentrated mass

图 7. 集中质量下计算简图

利用柔度法建立运动方程

$$y(x) = -m_z \ddot{y}(x) \delta_{11} + \sum_{i=1}^n f_{Gi} \delta_{li} \quad (2)$$

化简得出自振频率

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{m_z} \left( \frac{1}{\delta_{11}} + \frac{\sum_{i=1}^n f_{Gi} \delta_{li}}{Y(t) \delta_{11}} \right)} \quad (3)$$

## 2.2. 简化模型 II

由桁架模型可看出折线桁架杆轴如拱在轴向力和竖向力下维持平衡, 由图 8 可见。假设第一振型是抛物线, 拱的弯矩全为零可以视为合理拱轴, 维持体系平衡的作用力是均布力  $q$ , 由图 9 可见。

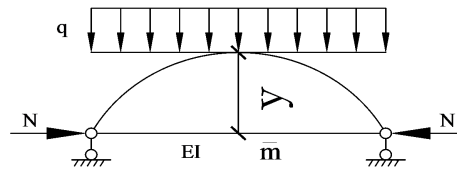


Figure 8. Sketch of truss model

图 8. 桁架模型简图

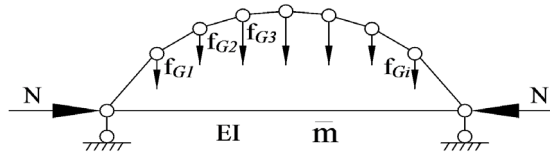


Figure 9. Diagram of calculation under uniformly distributed load

图 9. 均布荷载下简图

取左半部分进行考虑, 对中间铰结点取矩, 列平衡方程求得  $q$

$$\frac{1}{2}ql \cdot \frac{l}{2} = Ny + q \cdot \frac{l}{2} \cdot \frac{l}{4}$$

$$q = \frac{8N}{l^2}y$$

利用挠度建立方程

$$y = \frac{1}{2}\bar{m}l \cdot \ddot{y}\delta_{11} - \frac{5l^4}{384} \cdot \frac{8N}{l^2}y + y = 0$$

### 3. 实例计算

以图 1 为例, 先用简化模型 I 计算, 不妨假设振型曲线为(需要满足边界条件)

$$Y(x) = y \sin \frac{\pi}{l}x \tag{4}$$

将原体系转化成单自由度体系, 仅考虑三个竖向力, 设最大挠度为  $y$ 。此时 1、2、3 结点的转角分别为

$$1 \left\{ \begin{array}{l} \alpha_0 = \frac{y \sin \frac{\pi}{l} \cdot \frac{l}{4}}{\frac{l}{4}} = \frac{0.707y}{\frac{l}{4}} = \frac{2.828y}{l} \\ \alpha_1 = \frac{(1-0.707)y}{\frac{l}{4}} = \frac{1.172y}{l} \end{array} \right. \quad 2 \left\{ \begin{array}{l} \alpha_0 = \frac{1.172y}{l} \\ \alpha_1 = -\frac{1.172y}{l} \end{array} \right. \quad 3 \left\{ \begin{array}{l} \alpha_0 = -\frac{1.172y}{l} \\ \alpha_1 = -\frac{2.828y}{l} \end{array} \right.$$

带入式(4)求结点力

$$f_{G1} = N(2.828 - 1.172) \frac{y}{l} = 1.656 \frac{Ny}{l}$$

$$f_{G2} = N(1.172 + 1.172) \frac{y}{l} = 2.344 \frac{Ny}{l}$$

$$f_{G3} = N(-1.172 + 2.828) \frac{y}{l} = 1.656 \frac{Ny}{l}$$

利用柔度法建立平衡方程

$$y = -m\ddot{y}\delta_{11} + 2f_{G1}\delta_{12} + f_{G2}\delta_{11}$$

根据图乘法可知

$$\delta_{11} = \frac{l^3}{48EI}, \quad \delta_{12} = \frac{11l^3}{768EI}$$

化简整理得

$$m\ddot{y} + \left( \frac{48EI}{l^3} - 4.62 \frac{N}{l} \right) y = 0$$

可以得出自振频率

$$\omega = \frac{\pi^2}{l^2} \sqrt{\left( 1 - \frac{0.95NI^2}{\pi^2 EI} \right) \cdot \frac{EI}{\bar{m}}} \quad (5)$$

利用简化模型 II 进行计算, 利用柔度法建立方程:

$$y = \frac{1}{2} \bar{m} l \cdot \ddot{y} \delta_{11} - \frac{5l^4}{384} \cdot \frac{8N}{l^2} y + y = 0$$

其中  $\delta_{11} = \frac{l^3}{48EI}$ , 化简求出自振频率

$$\omega = \frac{\pi^2}{l^2} \sqrt{\left( 1 - \frac{1.027NI^2}{\pi^2 EI} \right) \cdot \frac{EI}{\bar{m}}} \quad (6)$$

利用偏微分方程求得的自振频率精确解[2][3][4]:

$$\omega = \frac{\pi^2}{l^2} \sqrt{\left( 1 - \frac{NI^2}{\pi^2 EI} \right) \cdot \frac{EI}{\bar{m}}} \quad (7)$$

为了更清晰的反映精度, 分别用式(5)和式(6)与精确解式(7)作商进行比较。令  $\theta = \frac{NI^2}{\pi^2 EI}$ , 式(5)与式(7)比值为  $\beta_1$ , 式(6)与式(7)比值为  $\beta_2$

$$\beta_1 = \frac{\frac{\pi^2}{l^2} \sqrt{\left( 1 - \frac{0.95NI^2}{\pi^2 EI} \right) \cdot \frac{EI}{\bar{m}}}}{\frac{\pi^2}{l^2} \sqrt{\left( 1 - \frac{NI^2}{\pi^2 EI} \right) \cdot \frac{EI}{\bar{m}}}} = \frac{1 - 0.95\theta}{1 - \theta}$$

$$\beta_2 = \frac{\frac{\pi^2}{l^2} \sqrt{\left( 1 - \frac{1.027NI^2}{\pi^2 EI} \right) \cdot \frac{EI}{\bar{m}}}}{\frac{\pi^2}{l^2} \sqrt{\left( 1 - \frac{NI^2}{\pi^2 EI} \right) \cdot \frac{EI}{\bar{m}}}} = \frac{1 - 1.027\theta}{1 - \theta}$$

#### 4. 结论

1) 利用简化方法求出的自振频率同分离变量法求出的自振频率进行对比, 由于  $\theta$  值很小, 可发现自振频率相差不大, 但是计算量却大大减少, 提高工作效率。

2) 有些问题可以适当进行简化, 不要弄得过于繁琐。例如实际问题中初步计算无铰拱的水平推力大小, 就可以转化成三铰拱下求水平推力, 经过计算, 水平推力大小相差不大。

### 参考文献

- [1] 龙驭球, 包世华, 等. 结构力学 I: 基本教程[M]. 第3版. 北京: 高等教育出版社, 2012.
- [2] 龙驭球, 包世华, 等. 结构力学 II: 基本教程[M]. 第3版. 北京: 高等教育出版社, 2012.
- [3] 包世华. 结构动力学[M]. 武汉: 武汉理工大学出版社, 2017.
- [4] 刘晶波, 杜修力. 结构动力学[M]. 北京: 机械工业出版社, 2005.

#### 知网检索的两种方式:

1. 打开知网页面 <http://kns.cnki.net/kns/brief/result.aspx?dbPrefix=WWJD>  
下拉列表框选择: [ISSN], 输入期刊 ISSN: 2326-3458, 即可查询
2. 打开知网首页 <http://cnki.net/>  
左侧“国际文献总库”进入, 输入文章标题, 即可查询

投稿请点击: <http://www.hanspub.org/Submission.aspx>

期刊邮箱: [hjce@hanspub.org](mailto:hjce@hanspub.org)