

Construction of Compressed Sensing Matrixs Based on m Sequences

Ming Li, Hua Jiang, Liye Pei

Institute of Information System Engineering, PLA Information Engineering University, Zhengzhou Henan
Email: limn10@163.com

Received: Mar. 30th, 2016; accepted: Apr. 19th, 2016; published: Apr. 22nd, 2016

Copyright © 2016 by authors and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

Abstract

The measurement matrix as the core of the compressed sensing theory, will have a significant impact on the measurement and reconstruction. This paper produces a method of compressed sensing measurement matrix through the m sequences. First of all, it gives a method to construct the measurement matrix with compression rate is 0.5; this measurement matrix has small element set and certain cycle characteristics. Secondly, for combining the theory of finite fields, the measurement matrix based on m sequence is further improved. The compression rate of the matrix measurement range is greatly increased. The simulation results show that the measurement matrix is constructed in this paper which is better than Gause measurement matrix reconstruction performance of the same size, avoids the random measurement matrix uncertainty and has a certain practical value.

Keywords

Compressed Sensing, Measurement Matrix, m Sequences, RIP, Column Correlation

基于m序列的压缩感知测量矩阵构造

李明, 江桦, 裴立业

解放军信息工程大学信息工程学院, 河南 郑州
Email: limn10@163.com

收稿日期: 2016年3月30日; 录用日期: 2016年4月19日; 发布日期: 2016年4月22日

文章引用: 李明, 江桦, 裴立业. 基于 m 序列的压缩感知测量矩阵构造[J]. 无线通信, 2016, 6(2): 52-60.
<http://dx.doi.org/10.12677/hjwc.2016.62008>

摘要

测量矩阵作为压缩感知理论的核心内容,对信号的测量和重构会产生重大影响。本文主要基于m序列构造压缩感知测量矩阵。首先,给出一种压缩率为0.5的测量矩阵构造方法,利用该方法构造的测量矩阵元素取值集合较小,具有一定的循环特性。其次,结合有限域的理论,对利用m序列构造的测量矩阵做进一步改进,改进后测量矩阵的压缩率取值范围增大。仿真结果表明:本文构造的测量矩阵的重构性能优于同大小的Gause测量矩阵,避免了随机性测量矩阵的不确定性,具有一定实用价值。

关键词

压缩感知, 测量矩阵, m序列, RIP, 列相关性

1. 引言

压缩感知理论主要包含信号的稀疏表示、测量矩阵的构造和重建算法的设计三个方面的内容,其中,测量矩阵的构造是压缩感知理论的关键问题[1]-[3]。测量信号是否包含了原始信号的足够信息决定着能否精确重构,且测量矩阵的好坏对后端的重构也有很大的作用。在压缩感知理论中,对测量矩阵矩阵的约束并不是非常严格的,Donoho在文献[4]中给出的CS1-CS3三个条件表明大部分一致分布的随机矩阵都可作为测量矩阵。2005年,E Candès和T. Tao共同给出了测量矩阵的有限等距性质(Restricted Isometry Property,简称RIP)[5]。利用RIP性质可以用来证明一个矩阵是否可以作为测量矩阵,RIP性质被公认为是关于测量矩阵的一个重要理论。除RIP外,可用来衡量某一矩阵是否能作为测量矩阵还有其它一些理论,例如零空间条件[6]、相关性理论[7]等。

测量矩阵按照产生方式,可划分为随机性、部分随机性和确定性三类。Gause测量矩阵和Bernoulli测量矩阵属于随机性的测量矩阵,在理论上被证明都可以用做测量矩阵,但具体电路实现起来复杂,占用大量存储资源,而且只在概率统计意义下满足重构要求,并不能保证每一次的测量都包含了信号的全部信息。部分随机性的测量矩阵相比随机性的测量矩阵减少了一些随机性,大多数情况下是行随机,主要有部分Fourier矩阵和部分Hadamard矩阵。他们的基本构造思路都是从正交方阵中随机性地抽取行来构造测量矩阵,可以证明,这两种测量矩阵都在较高概率下具有一定阶数的RIP特性,满足压缩感知对测量矩阵的要求,但是随机抽取行的方法仍有导致测量失败的可能。压缩感知理论被提出后,很多学者对确定性的测量矩阵的构造进行了研究。文献[8]提出通过利用有限域中多项式的取值构造了 $p^2 \times p^{r+1}$ (p 为素数, r 为自然数)的测量矩阵;文献[9]-[12]都是利用混沌序列来构造测量矩阵,从仿真实验的结果来看,比同等大小的Gause测量矩阵效果要好,但利用混沌序列构造的测量矩阵仍是稠密的,占用存储空间较多;文献[13]基于离散Chirp编码构造了 $m \times m^2$ 的测量矩阵,重构性能与Gause测量矩阵相当,但不适用于维数过小的情况;文献[14]利用二阶Reed-Muller码构造了 $2^m \times 2^{m(m+1)/2}$ 的测量矩阵;文献[15][16]基于好的低密度奇偶校验码(LDPC)来构造测量矩阵,但对矩阵的行、列数要求严格。本文利用m序列构造了一种压缩率为0.5的测量矩阵,从理论上证明了该矩阵可以作为测量矩阵使用,并结合有限域的理论对其进一步扩展,扩展后测量矩阵行、列取值相对更加自由,可适应的压缩率范围大大提高。仿真实验表明本文所提出的测量矩阵优于同等大小的Gause测量矩阵,具有一定的循环特性和稀疏性,有一定实用价值。

2. 基本理论

为便于叙述,这里将信号 $x(x_1, x_2, \dots, x_N)$ 抽象记为一个 N 维向量,稀疏性指的是信号 x 中非0元素的

个数较少。稀疏信号的集合用 Σ_k 表示, $\Sigma_k = \{x \in \mathbb{R}^N : \|x\|_0 \leq k\}$, 其中 $\|x\|_0$ 表示 x 中非 0 值数目, 当 $\|x\|_0 \leq k$ 时, 称 x 满足 k 阶稀疏性。对 x 进行压缩观测即是:

$$y = \Phi x \quad (1)$$

其中 $\Phi = (\varphi_1, \dots, \varphi_N) \in \mathbb{C}^{M \times N}$, 是一个 $M \times N$ ($k < M < N$) 的矩阵, 称为测量矩阵, $y = (y_1, y_2, \dots, y_M)$ 是 M 维的观测值, M 称为测量次数, $\gamma = M/N$ 称为压缩率。压缩测量的过程实际是将一个 N 维的向量投影到一个 M 维空间上, 若是投影 y 中包含重构 x 需要的所有信息时, 利用 y 来恢复 x 是有可能的。对于(1)式, 当 $M < N$ 时, 是一个求解欠定线性方程组问题, 一般情况下有无穷多组解。当我们增加了 x 满足 k 阶稀疏性的这个前提条件后, 只需再对 Φ 做一些要求和改变, 确定唯一的 x 是有可能的。文献[17]指出: 在 x 满足 k 阶稀疏性的前提下, 若 Φ 的任意 $2k$ 列都线性无关, 通过求解如下的问题:

$$\begin{aligned} P_0 : \min_{x \in \Sigma_k} & \|x\|_0 \\ \text{s.t.} & \Phi x = y \end{aligned} \quad (2)$$

可获得一个关于 x 的唯一确定解, 这个确保唯一性的条件也是容易理解的, 但这个求解问题是一个 NP-hard 问题。当 Φ 满足零空间特性或是一定阶数的 RIP 特性时, 该问题可进一步转化为如下问题的求解:

$$\begin{aligned} P_1 : \min_{x \in \Sigma_k} & \|x\|_1 \\ \text{s.t.} & \Phi x = y \end{aligned} \quad (3)$$

问题 P_1 属于一个凸优化问题, 可以利用线性规划的一些现有办法来求解, 其中 RIP 特性[5]定义如下: 如果存在常数 $\delta_k \in [0, 1)$, 使得

$$(1 - \delta_k) \|x\|^2 \leq \|\Phi x\|^2 \leq (1 + \delta_k) \|x\|^2 \quad (4)$$

对任意 $x \in \Sigma_k$ 都成立, 则称 Φ 满足 k 阶 RIP 特性, δ_k 称为 RIP 常数。

文献[18]指出, 若 Φ 满足 $2k$ 阶 RIP 特性, 且 RIP 常数 $\delta_{2k} \leq \sqrt{2} - 1$ 时, 那么对于任意 $x \in \Sigma_k$, 用矩阵 Φ 对信号 x 进行测量, 根据观测值 y 可唯一重构出信号 x 。

式(4)给出了 RIP 特性的定义, RIP 特性是一个验证测量矩阵能否用于压缩感知的有力工具, 但是验证一个矩阵的 RIP 特性仍是一个 NP-hard 问题, 且 RIP 特性仍是个充分条件, 并不是必要条件。Gaussian 测量矩阵被证明满足 RIP 特性, 作为测量矩阵可行, 但是真正的随机性测量矩阵实现起来十分困难, 并不能保证每一次具体的测量能够满足重构。

易知, 一个矩阵的列相干性 μ 是相对容易计算的。对于矩阵 $\Phi = (\varphi_1, \dots, \varphi_N) \in \mathbb{C}^{M \times N}$, 定义其列相干性为:

$$\mu = \max_{i \neq j} \frac{|\langle \varphi_i, \varphi_j \rangle|}{\|\varphi_i\| \|\varphi_j\|} \quad (5)$$

文献[19]给出了列相干性 μ 的一个下界, 称为 Welch 界:

$$\sqrt{\frac{N - M}{(N - 1)M}} \quad (6)$$

文献[7]指出: 若矩阵 Φ 的列相干性为 μ , 那么 Φ 满足 RIP 常数为:

$$\delta_{2k} = (2k - 1)\mu \quad (7)$$

的 $2k$ 阶 RIP 特性。本文主要从矩阵的列相干性出发考虑, 利用 m 序列来构造测量矩阵。

3. 基于 m 序列的测量矩阵构造

在扩频通信和密码学理论中, 具有良好的相关特性的序列一直是研究的热点, 序列的互相关函数的

按照式(11)所构造测量矩阵 Φ_1 的大小为 $M \times 2M$ ，压缩率固定为 $\gamma = 0.5$ ， $M = 2^n - 1$ 只能取 2 的幂指数，行、列的取值范围受限。

De Vore 在文献[8]利用有限域中多项式的取值，构造出了 $\Phi_p = p^2 \times p^{r+1}$ (p 为素数， r 为自然数) 的确定性测量矩阵。测量矩阵 Φ_p 的元素在 $\{0, 1\}$ 中取值，且具有一个很好的性质：当 $r=1$ 时，该矩阵的每一列都只有 p 个 1，且任意两列相同位置出现 1 的个数为 1，通俗的说，即求任意两列的内积时仅有一个 1 对上，其余要么是 0 和 0 对上，要么是 0 和 1 对上。

根据有限域的理论可知，将素数 p 替换为 $M+1$ ($M+1$ 是 2 的幂数，即 $(M+1) = 2^n$) 时，DeVore 提出的方法依然有效。即取 $r=1$ 时，构造出的测量矩阵 Φ_{M+1} 的每一列都只有 $M+1$ 个 1，且任意两列相同位置出现 1 的个数为 1，矩阵分析理论中，Kronecker 直积是一种十分重要的概念。其定义如下：对于矩阵 $C = (c_{i,j})_{m \times n}$ 和 $D = (d_{i,j})_{s \times t}$ ， C 、 D 的 Kronecker 直积记为 $\text{kron}(C, D) = C \otimes D$ 等于：

$$\text{kron}(C, D) = C \otimes D = \begin{pmatrix} c_{11}D & c_{12}D & \cdots & c_{1n}D \\ c_{21}D & c_{22}D & \cdots & c_{2n}D \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{m1}D & c_{m2}D & \cdots & c_{mn}D \end{pmatrix} \quad (12)$$

Kronecker 直积具有一个很好的性质：若矩阵 C 、 D 都是正交矩阵，则 $\text{kron}(C, D)$ 也是正交矩阵。这里将 Kronecker 直积作些改变，当 $c_{i,j} \neq 0$ 时，将直积中 $c_{i,j}D$ 用 $c_{i,j}(d_{s,1}, d_{s,2}, \dots, d_{s,t})$ 替换，即原来是用整个矩阵 D 替换，这里用矩阵 D 的某一行来替换；当 $c_{i,j} = 0$ 时，将直积中 $c_{i,j}D$ 用 0 替换。若矩阵 C 中每一列非零值的个数不小于矩阵 D 的行数时，这种替换是可行的。为了下面方便的叙述，将这种替换记为运算 Γ 。

取式(11)中矩阵 Φ 的前 M 列构成的子矩阵(矩阵大小为 $M \times M$)做为矩阵 D ，参照 De Vore 在文献[8]中提出的方法构造的矩阵 Φ_M (矩阵大小为 $(M+1)^2 \times (M+1)^2$)做为矩阵 C ，然后依运算 Γ 可构造出新的测量矩阵 Φ (大小为 $(M+1)^2 \times (M+1)^2 M$ ，压缩率为 $\gamma = \frac{1}{M}$)：

$$\Phi_{\Gamma} = \begin{pmatrix} c_{1,1}\vec{d}_1 & \cdots & c_{1,l}=0 & \cdots & c_{1,M^2}=0 \\ c_{2,1}=0 & \cdots & c_{2,l}\vec{d}_1 & \cdots & c_{2,(M+1)^2}=0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{i,1}=0 & \cdots & c_{i,l}=0 & \cdots & c_{i,(M+1)^2}\vec{d}_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{j,1}\vec{d}_M & \cdots & c_{j,l}=0 & \cdots & c_{j,(M+1)^2}=0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{k,1}=0 & \cdots & c_{k,l}=0 & \cdots & c_{k,(M+1)^2}\vec{d}_M \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{(M+1)^2,1}=0 & \cdots & c_{(M+1)^2,l}\vec{d}_M & \cdots & c_{(M+1)^2,(M+1)^2}=0 \end{pmatrix} \quad (13)$$

与式(12)相比较，在式(13)中， $c_{i,j} = 0$ 的位置，仍为 0； $c_{i,j} \neq 0$ 的位置换成 $c_{i,j}\vec{d}_l$ ，其中 \vec{d}_l 代表矩阵 D 的行向量。

根据式(5)，计算式(13)中的测量矩阵 Φ_{Γ} 的列相干性 μ ：

1) 当 φ_i, φ_j 来自矩阵 Φ_{Γ} 的同一个 $c_{i,j}\vec{d}_l$ 时

此时 φ_i, φ_j 都来自同一个矩阵 D ，且 φ_i, φ_j 的结构未发生变化，所以列相干性等于矩阵 D 的列相干性，

式(11)中前 M 列构成的子矩阵的列相干性为 $\frac{1}{M}$ ，所以此时 Φ_Γ 的 $\mu = \frac{1}{M}$ 。

2) 当 φ_i, φ_j 来自矩阵 Φ_Γ 的不同的 $c_{i,j}\vec{d}_l, c_{i,j}\vec{d}_m (m \neq l)$ 时, φ_i, φ_j 相对于原矩阵 φ_i, φ_j 在矩阵 Φ_Γ 的位置结构发生了变化, 但 φ_i, φ_j 仅有一组 +1 或者 -1 能够对上, 其他都错开了所以式(5)中分子的最大值为 1, 而分母仍为 M , 所以此时列相干性为 $\mu = \frac{1}{M}$ 。

综上所述:

测量矩阵 Φ_Γ 的列相干性 $\mu = \frac{1}{M}$ 。

根据式(6)大小为 $(M+1)^2 \times (M+1)^2 M$ 的矩阵的 Welch 界为: $\sqrt{\frac{(M+1)^2 M - (M+1)^2}{((M+1)^2 M - 1)(M+1)^2}} \approx \frac{1}{M+1}$, 可

见本文构造的测量矩阵 Φ_Γ 基本已经比较接近 Welch 界, 元素取值在 $\{-1, 0, +1\}$ 取值, 较为单一, 且具有一定的循环特性和稀疏性, 有利于硬件产生。

4. 仿真实验

实验(1): 对一维稀疏信号进行测量和恢复

I) 压缩率 $\gamma = \frac{1}{2}$ 。选取周期为 $M = 2^8 - 1$ 的 m 序列作为初始序列, 按照式(11)生成大小为 255×510 的测量矩阵 Φ_1 , 与同等大小的 Gause 测量矩阵对一维稀疏信号进行测量重构。每一个稀疏度 k , 采用 OMP 算法重构 1000 次, 得到重构概率与稀疏度的对应曲线, 如图 1 所示。

从图 1 可以看出, 基于 m 序列构造的测量矩阵重构性能优于同等大小 Gause 测量矩阵, 且能精确重构的信号稀疏度比理论值要大, 稀疏度为 58 时, 本文所提出测量矩阵仍可以精确重构。

II) 压缩率 $\gamma = \frac{1}{16}$ 。分别选取周期为 $M = 2^3 - 1$ 和 $M = 2^4 - 1$ 的 m 序列作为初始序列, 按照式(11)生成 Φ_1 挑选其前列 M 列作为 D , 再与 Devore 提出的确定性矩阵 Φ_{M+1} 结合, 按照式(13)生成 64×512 和 256×4096 的测量矩阵, 然后分别与同等大小的 Gause 测量矩阵对一维稀疏信号进行测量重构。每一个稀疏度 k , 采用 OMP 算法重构 1000 次, 得到重构概率与稀疏度的对应曲线, 如图 2 所示。

从图 2 和图 3 可以看出, 利用 m 序列构造的测量矩阵能精确重构的信号稀疏度均比同等大小 Gause 测量矩阵要大。

实验(2): 对“cameraman”图像进行测量和恢复。

选取 512×512 的“cameraman”图像, 稀疏基取 DCT 基, 分别采用 64×512 、 256×512 的测量矩阵 Φ_Γ 和同等大小的 Gause 测量矩阵对该图像逐行测量和恢复。重构算法仍选择 OMP 算法。恢复结果如图 4 所示。

从图 4 来看, 直观上基于 m 序列构造的测量矩阵 Φ_Γ 比 Gause 测量矩阵恢复的更为清晰。为了进一步说明图 4 的实验结果, 表 1 列举了两种测量矩阵峰值信噪比(PSNR)的对比。

Table 1. PSNR of reconstruction with “cameraman”

表 1. “cameraman” 图像重构的 PSNR 值

测量矩阵	Gause 测量矩阵	基于 m 序列的测量矩阵
64×512	11.67	12.36
256×512	22.83	24.92

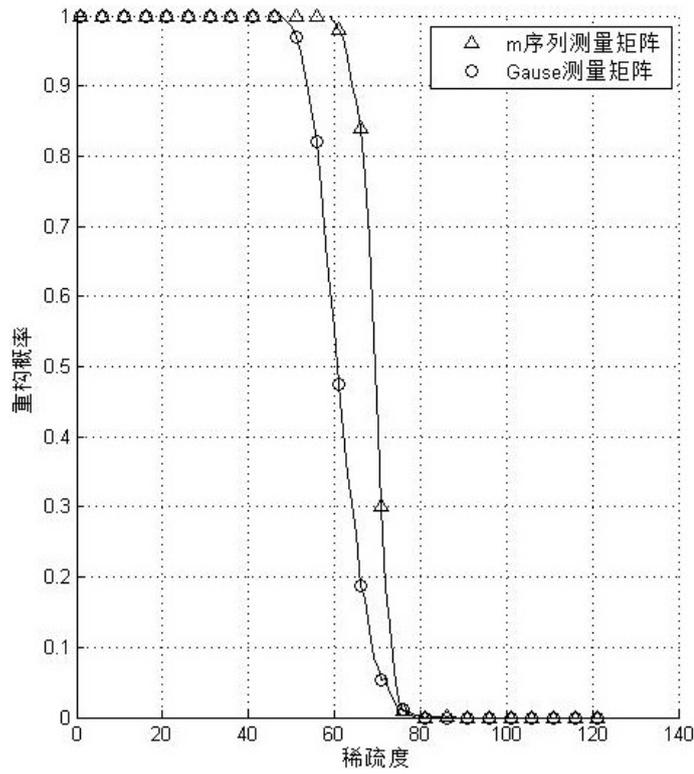


Figure 1. The recovery percentage vs sparsity order
图 1. 重构概率随稀疏度变化的对比曲线

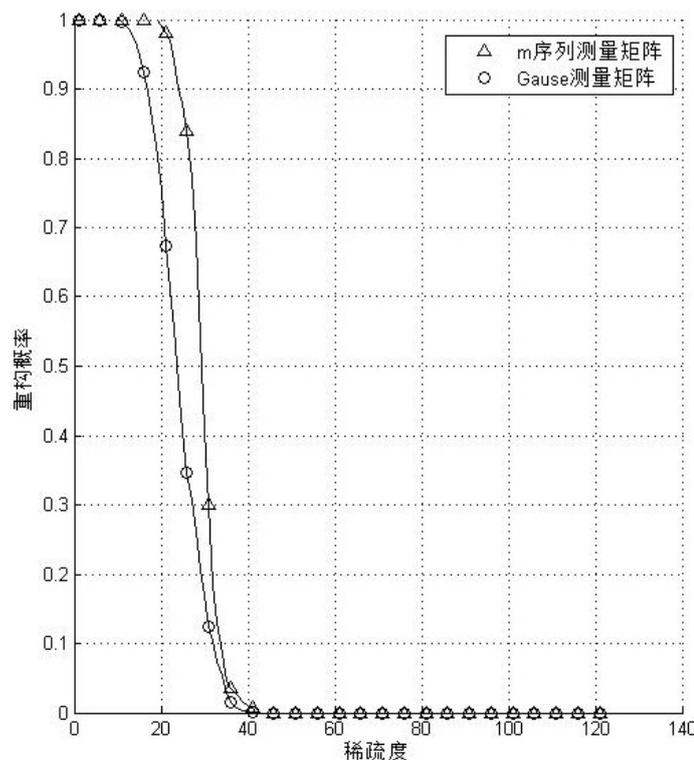


Figure 2. The matrices are 64×512
图 2. 矩阵大小为 64×512

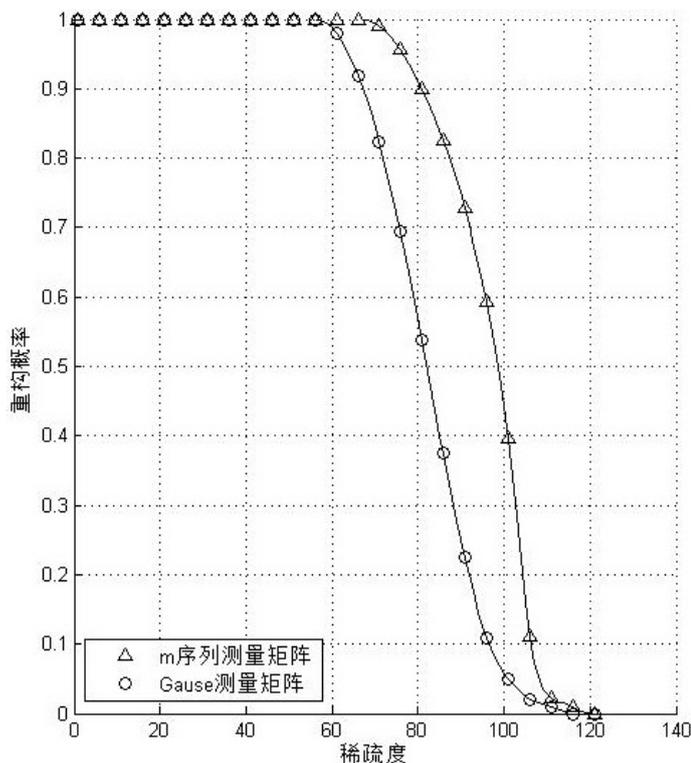
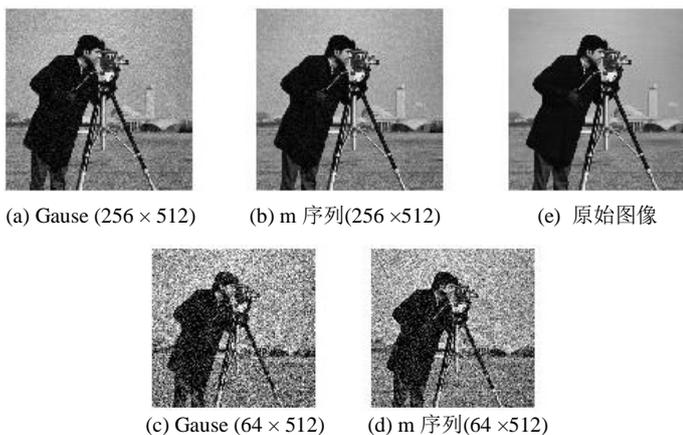
Figure 3. The matrices are 256×4906 图 3. 矩阵大小为 256×4906 

Figure 4. Contrast diagram of reconstruction with “cameraman”

图 4. “cameraman” 图像重构效果对比图

表 1 也说明基于 m 序列构造的测量矩阵的重构性能优于 Gause 测量矩阵。

5. 结束语

本文基于 m 序列构造的测量矩阵的列相干性接近于 Welch 界，元素取值较为单一，且具有一定的循环特性，有利于硬件实现。仿真实验的结果显示基于 m 序列构造的测量矩阵的性能优于同大小的 Gause 测量矩阵。本文从矩阵的列相干性出发设计测量矩阵，本质上是借助于 RIP 特性，但 RIP 特性并非充要条件，所以寻找压缩感知测量矩阵的充要条件，继而根据充要条件才可能设计出更优的测量矩阵；其次

基于 m 序列构造的测量矩阵可任意删列来改变压缩率, 但行的取值仍比较受限, 而 Gause 测量矩阵的行、列选取均任意, 所以寻找行、列取值更加自由的测量矩阵仍需进一步研究。

参考文献 (References)

- [1] Candès, E., Romberg, J. and Tao, T. (2006) Robust Uncertainty Principles: Exact Signal Reconstruction from Highly Incomplete Frequency Information. *IEEE Transactions on Information Theory*, **52**, 489-509. <http://dx.doi.org/10.1109/TIT.2005.862083>
- [2] Candès, E. and Tao, T. (2006) Near Optimal Signal Recovery from Random Projections: Universal Encoding Strategies. *IEEE Transactions on Information Theory*, **52**, 5406-5425.
- [3] Candès, E. and Romberg, J. (2006) Quantitative Robust Uncertainty Principles and Optimally Sparse Decompositions. *Foundations of Computational Mathematics*, **6**, 227-254. <http://dx.doi.org/10.1007/s10208-004-0162-x>
- [4] Donoho, D.L. (2006) Compressed Sensing. *IEEE Transactions on Information Theory*, **52**, 1289-1306.
- [5] Candès, E. and Tao, T. (2005) Decoding by Linear Programming. *IEEE Transactions on Information Theory*, **51**, 4203-4215. <http://dx.doi.org/10.1109/TIT.2005.858979>
- [6] Gribonval, R. and Nielsen, M. (2003) Sparse Representations in Unions of Bases. *IEEE Transactions on Information Theory*, **49**, 3320-3325. <http://dx.doi.org/10.1109/TIT.2003.820031>
- [7] Bourgain, J., Dilworth, S.J., Ford, K., *et al.* (2011) Explicit Constructions of RIP Matrices and Related Problems. *Duke Mathematical Journal*, **159**, 145-185. <http://dx.doi.org/10.1215/00127094-1384809>
- [8] De Vore, R. (2007) Deterministic Constructions of Compressed Sensing Matrices. *Journal of Complexity*, **23**, 918-925. <http://dx.doi.org/10.1016/j.jco.2007.04.002>
- [9] 林斌, 彭玉楼. 基于混沌序列的压缩感知测量矩阵构造算法[J]. 计算机工程与应用, 2013, 49(23): 199-202.
- [10] 王侠, 王开, 王青云, 等. 压缩感知中的确定性随机观测矩阵构造[J]. 信号处理, 2014, 30(4): 436-442.
- [11] 臧华中. 基于 Logistic 混沌 - 贝努力序列的循环压缩测量矩阵构造算法[J]. 四川理工学院学报(自然科学版), 2015, 28(5): 31-36.
- [12] 粟娟, 李智, 李健. 基于切比雪夫扩频序列的测量矩阵构造算法[J]. 四川大学学报(工程科学版), 2015, 47(2): 155-160.
- [13] 赵瑞珍, 王若乾, 张凤珍, 等. 分块的有序范德蒙矩阵作为压缩感知测量矩阵的研究[J]. 电子与信息学报, 2015, 37(6): 1317-1322.
- [14] Ni, K., Datta, S., Mahanti, P., *et al.* (2011) Efficient Deterministic Compressed Sensing for Images with Chirps and Reed-Muller Codes. *SIAM Journal on Imaging Sciences*, **4**, 931-953. <http://dx.doi.org/10.1137/100808794>
- [15] Dimakis, A.G., Smarandache, R. and Vontobel, P.O. (2012) LDPC Codes for Compressed Sensing. *IEEE Transactions on Information Theory*, **58**, 3093-3114. <http://dx.doi.org/10.1109/TIT.2011.2181819>
- [16] Ge, X. and Xia, S.T. (2006) LDPC Codes Based on Berlekamp-Justesen Codes with Large Stopping Distances. *Proceedings of IEEE Information Theory Workshop (ITW)*, Chengdu, 214-218.
- [17] 许志强. 压缩感知[J]. 中国科学, 2012, 42(9): 865-877.
- [18] Candès, E., Romberg, J. and Tao, T. (2006) Stable Signal Recovery from Incomplete and Inaccurate Measurements. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, **59**, 1207-1223. <http://dx.doi.org/10.1002/cpa.20124>
- [19] Welch, L.R. (1974) Lower Bounds on the Maximum Cross-Correlation of Signals. *IEEE Transactions on Information Theory*, **20**, 397-399. <http://dx.doi.org/10.1109/TIT.1974.1055219>
- [20] 曾凡鑫, 葛利嘉. 无线通信中的序列设计原理[M]. 北京: 国防工业出版社, 2007.